1

解説

①　正方形の周の長さは，$x\times4=4x$ より　　$4x$ cm

よって　　$y=4x$

②　縦の長さは $2x$ cm であるから，$2x\times x=2x^2$

より，長方形の面積は　　$2x^2$ cm^2

よって　　$y=2x^2$

③　円周の長さは，$2\pi\times x=2\pi x$ より　　$2\pi x$ cm

よって　　$y=2\pi x$

2

解説

(1)　y は x^2 に比例するから，a を定数として，$y=ax^2$ と表すことができる。

$x=2$ のとき $y=12$ であるから

$$12=a\times2^2$$
$$12=4a$$
$$a=3$$

よって　$y=3x^2$

(2)　y は x^2 に比例するから，a を定数として，$y=ax^2$ と表すことができる。

$x=-4$ のとき $y=-8$ であるから

$$-8=a\times(-4)^2$$
$$-8=16a$$
$$a=-\frac{1}{2}$$

よって　$y=-\frac{1}{2}x^2$

3

解説

(1)　①　$x=2$ のとき $y=3\times2^2=12$，　$x=5$ のとき $y=3\times5^2=75$

よって，変化の割合は　$\dfrac{75-12}{5-2}=\dfrac{63}{3}=21$　答

②　$x=-3$ のとき $y=3\times(-3)^2=27$，　$x=-1$ のとき $y=3\times(-1)^2=3$

よって，変化の割合は　$\dfrac{3-27}{-1-(-3)}=\dfrac{-24}{2}=-12$　答

(2)　$x=p$ のとき $y=-5p^2$，　$x=p+3$ のとき $y=-5(p+3)^2$

よって，x の値が p から $p+3$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{-5(p+3)^2-(-5p^2)}{(p+3)-p}=\frac{-30p-45}{3}=-10p-15$$

これが 15 に等しいから　$-10p-15=15$

これを解いて　$p=-3$　答

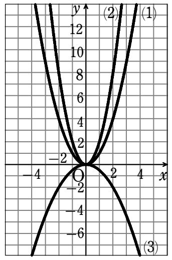
4

解説

3 つの関数 $y=x^2$，$y=2x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$ について，対応する x，y の値を計算して表をつくると，次のようになる。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$

上の表の x，y の値の組を座標とする点をとって，なめらかに結ぶと，右のようなグラフが得られる。答



5

解説

(1)　①，④，⑥

(2)　②，③，⑤

(3)　グラフの開きぐあいが最も大きいものは，$y=ax^2$ の a の絶対値が最も小さいものである。

よって　⑤

(4)　グラフの開きぐあいが最も小さいものは，$y=ax^2$ の a の絶対値が最も大きいものである。

よって　④

(5)　x 軸について対称となるものは，$y=ax^2$ の a の絶対値が等しく，符号が異なるものである。

よって　②と⑥

6

解説

(1)　グラフより，$y=ax^2$ に $x=3$，$y=3$ を代入すると

$$3=a\times3^2$$
$$9a=3$$
$$a=\frac{1}{3}$$

よって　　$y=\frac{1}{3}x^2$

(2)　A は直線 $y=2x$ 上の点だから，その y 座標は　　$y=2\times2=4$

さらに，A は関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点だから，$x=2$，$y=4$ を $y=ax^2$ に代入して

$$4=a\times2^2$$

よって　　$a=1$

7

解説

放物線 $y=ax^2$ について　$a\neq0$

(1)　放物線 $y=ax^2$ が点 A $(-1,\ 5)$ を通るとき

$$5=a\times(-1)^2$$

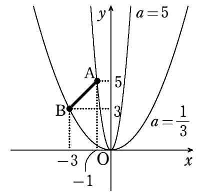
よって　　$a=5$

放物線 $y=ax^2$ が点 B $(-3,\ 3)$ を通るとき

$$3=a\times(-3)^2$$

よって　　$a=\frac{1}{3}$

したがって，求める a の値の範囲は　　$\frac{1}{3}\leqq a\leqq5$



(2)　放物線 $y=ax^2$ が点 C $(2,\ 2)$ を通るとき

$$2=a\times2^2$$

よって　　$a=\frac{1}{2}$

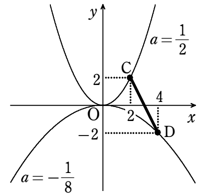
放物線 $y=ax^2$ が点 D $(4,\ -2)$ を通るとき

$$-2=a\times4^2$$

よって　　$a=-\frac{1}{8}$

したがって，求める a の値の範囲は

$$-\frac{1}{8}\leqq a<0,\ 0<a\leqq\frac{1}{2}$$



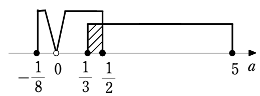
(3)　(1)，(2) より，求める a の値の範囲は

$\frac{1}{3}\leqq a\leqq5$　と

$-\frac{1}{8}\leqq a<0,\ 0<a\leqq\frac{1}{2}$

の共通範囲である。

よって　　$\frac{1}{3}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$



(4)　(1)，(2) より，求める a の値の範囲は，$a\neq0$ から

$\frac{1}{3}\leqq a\leqq5$　と　$-\frac{1}{8}\leqq a<0,\ 0<a\leqq\frac{1}{2}$

を除いた範囲である。

よって　　$a<-\frac{1}{8}$，$5<a$

8

解説

(1)　点 B の x 座標は 3 である。

よって，点 B の y 座標は　$y=\frac{1}{3}\times3^2=3$

すなわち，点 B の座標は　$(3,\ 3)$

(2)　点 C と点 B は，y 軸について対称である。

よって，点 C の座標は　$(-3,\ 3)$

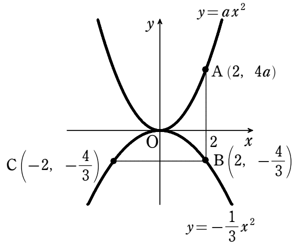
(3)　$\mathrm{AB}=9-3=6$，$\mathrm{BC}=3-(-3)=6$

よって，△ABC の面積は　$\frac{1}{2}\times6\times6=18$

9

解説

点Aの x 座標は2であり，Aは関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点であるから，
点Aの y 座標は　$a\times2^2=4a$
よって，点Aの座標は　$(2,\ 4a)$
点Bの x 座標は2であり，Bは関数 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ のグラフ上の点であるから，
点Bの y 座標は　$-\dfrac{1}{3}\times2^2=-\dfrac{4}{3}$
よって，点Bの座標は　$\left(2,\ -\dfrac{4}{3}\right)$



点Cは点Bと y 軸について対称であるから，点Cの座標は　$\left(-2,\ -\dfrac{4}{3}\right)$

AB＝BC が成り立つとき

$$4a-\left(-\frac{4}{3}\right)=2-(-2)$$

$$4a=\frac{8}{3}$$

よって　　$a=\dfrac{2}{3}$

10

解説

(1)　2点A，Bは関数 $y=2x^2$ のグラフ上にあるから，$y=2x^2$ に $x=-2$，1 をそれぞれ代入すると

$$y=2\times(-2)^2=8$$

$$y=2\times1^2=2$$

よって，Aの座標は　$(-2,\ 8)$，Bの座標は　$(1,\ 2)$

(2)　直線 ℓ の傾きは　$\dfrac{2-8}{1-(-2)}=-2$

よって，ℓ の式は $y=-2x+b$ とおける。
$y=-2x+b$ に $x=1$，$y=2$ を代入すると

$$2=-2+b$$

$$b=4$$

したがって，ℓ の式は　$y=-2x+4$

(3)　直線 ℓ と y 軸との交点をCとすると，Cの座標は $(0,\ 4)$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OBC}$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times2+\frac{1}{2}\times4\times1$$

$$=6$$

11

解説

点Aの x 座標を a とすると，3点A，B，Dの座標は，それぞれ

$$\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right),\quad\left(-a,\ \frac{1}{2}a^2\right),\quad(a,\ -2a^2)$$

となる。

よって　　$\mathrm{AB}=a-(-a)=2a$

$$\mathrm{AD}=\frac{1}{2}a^2-(-2a^2)=\frac{5}{2}a^2$$

四角形ABCDが正方形となるとき，AB＝AD であるから　　$2a=\dfrac{5}{2}a^2$

ゆえに　　$a(5a-4)=0$
点Aの x 座標は正の数であるから　　$a>0$
よって　　$a=\dfrac{4}{5}$　　　このとき　　$\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{8}{25}$

したがって，点Aの座標は　　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{25}\right)$

12

解説

(1)　点Aの y 座標は　$y=3^2=9$
よって，点Aの座標は　$(3,\ 9)$
直線ACの傾きは -1 となるから，直線ACの式は $y=-x+k$ とおける。
この直線が点 $\mathrm{A}(3,\ 9)$ を通るから　$9=-3+k$
よって　　　$k=12$
したがって，求める直線の式は　$y=-x+12$

(2)　点Aの座標を $(t,\ t^2)$ とおく。
正方形ABCDの1辺の長さは2であるから，点Cの座標は $(t+2,\ t^2-2)$ となる。
この点が放物線　$y=\dfrac{1}{3}x^2$　上にあるから

$$t^2-2=\frac{1}{3}(t+2)^2$$

$$t^2-2t-5=0$$

これを解いて　$t=1\pm\sqrt{6}$
点Aの x 座標は正であるから　$1+\sqrt{6}$

13

解説

(1)　点Oを x 軸方向に a，y 軸方向に a^2 だけ移動した点がAである。
線分OAと線分BCは平行で長さが等しいから，点Bを x 軸方向に a，y 軸方向に a^2 だけ移動した点がCとなる。
よって，点Cの座標は　　$(-1+a,\ 1+a^2)$

(2)　平行四辺形の面積を2等分する直線は，平行四辺形の2本の対角線の交点を通る。
2本の対角線の交点は，線分OCの中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{1+a^2}{2}\right)$$

直線　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{4}$　が，この点を通るから

$$\frac{1+a^2}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{-1+a}{2}+\frac{9}{4}$$

$$2a^2-a-6=0$$

$$(a-2)(2a+3)=0$$

$a>0$ であるから　　$a=2$　　　このとき　　$a^2=4$
したがって，点Aの座標は　　$(2,\ 4)$

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times(4+1)\times3-\left(\dfrac{1}{2}\times2\times4+\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)$

$$=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}$$

$$=3$$

平行四辺形OACBの面積は，△OABの面積の2倍であるから
　　$3\times2=6$

14

解説

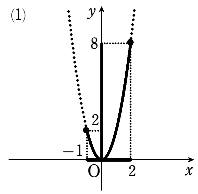
(1)　$x=-1$ のとき $y=2$，$x=2$ のとき $y=8$
$y=2x^2$ $(-1\leqq x\leqq2)$ のグラフは，図(1)のようになる。
よって，求める値域は　　$0\leqq y\leqq8$　答

(2)　$x=1$ のとき $y=-\dfrac{2}{3}$，$x=3$ のとき $y=-6$

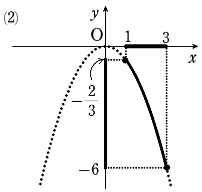
$y=-\dfrac{2}{3}x^2$ $(1\leqq x\leqq3)$ のグラフは，図(2)のようになる。

よって，求める値域は　　$-6\leqq y\leqq-\dfrac{2}{3}$　答

(1)



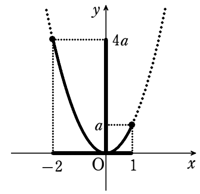
(2)



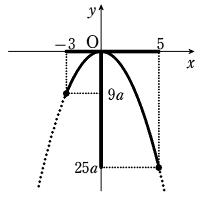
15

解説

(1)　y の値の範囲が0以上であるから
$a>0$
$y=ax^2$ について
$x=-2$ のとき　$y=4a$
$x=1$　のとき　$y=a$
グラフから，値域は　$0\leqq y\leqq4a$
これが $0\leqq y\leqq8$ と等しいから
$4a=8$
よって　　$a=2$



(2)　y の値の範囲が0以下であるから
$a<0$
$y=ax^2$ について
$x=-3$ のとき　$y=9a$
$x=5$　のとき　$y=25a$
グラフから，値域は　$25a\leqq y\leqq0$
これが $-10\leqq y\leqq0$ と等しいから
$25a=-10$



よって　$a=-\frac{2}{5}$

16

解説

(1) 定義域が $-3\leqq x\leqq a$ であるから　$-3<a$

$x=-3$ のとき　$y=-9$

$x=a$ 　のとき　$y=-a^2$

値域が $-16\leqq y\leqq b$ であるから　$-a^2=-16$

$a^2=16$

$a=\pm4$

$a>-3$ であるから，$a=-4$ はこの問題に適さない。

$a=4$ は，この問題に適する。

定義域は $-3\leqq x\leqq 4$ となり，値域は $-16\leqq y\leqq 0$ となるから　$b=0$

答　$a=4$，$b=0$

(2) 関数 $y=ax^2$ の値域が $b\leqq y\leqq 12$ であるから　$a>0$

$x=-6$ のとき　$y=36a$

$x=5$ 　のとき　$y=25a$

$a>0$ であるから　$25a<36a$

よって，$-6\leqq x\leqq 5$ のとき　$0\leqq y\leqq 36a$

したがって　$b=0$，$36a=12$

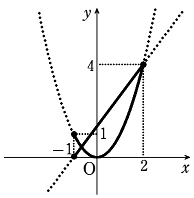
$a=\frac{1}{3}$　答　$a=\frac{1}{3}$，$b=0$

17

解説

$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，関数 $y=x^2$ の値域は　$0\leqq y\leqq 4$

$a>0$ であるから，関数 $y=ax+b$ のグラフは右上がりの直線となる。



よって　$x=-1$ のとき　$y=0$

$x=2$ のとき　$y=4$

となればよい。

したがって　$0=-a+b$ ……①

$4=2a+b$ ……②

①，② より　$a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{4}{3}$

18

解説

(1) $x^2=x+6$

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$x=-2,\ 3$

$x=-2$ のとき　$y=4$

$x=3$ のとき　$y=9$

よって，共有点の座標は　$(-2,\ 4)$，$(3,\ 9)$

(2) $2x^2=2x$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0,\ 1$

$x=0$ のとき　$y=0$

$x=1$ のとき　$y=2$

よって，共有点の座標は　$(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$

(3) $-\frac{1}{2}x^2=-x-4$

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$x=-2,\ 4$

$x=-2$ のとき　$y=-2$

$x=4$ のとき　$y=-8$

よって，共有点の座標は　$(-2,\ -2)$，$(4,\ -8)$

(4) $x^2=2x-1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$　　このとき　$y=1$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 1)$

19

解説

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-x+6$ の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2=-x+6$ の解である。

これを解くと　$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3,\ 2$

$x=-3$ のとき，$y=9$ であるから，点 A の座標は　$(-3,\ 9)$

また，点 B の x 座標は，方程式 $-x+6=0$ を解いて　$x=6$

よって，点 B の座標は　$(6,\ 0)$

したがって　$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times6\times9=27$　答

20

解説

$\triangle$OAB と $\triangle$PAB は，共通な辺 AB をもつ。

よって，$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{PAB}$ となるのは，2 つの三角形の底辺を AB としたときの高さが等しくなるときである。

ゆえに，点 P は，点 O を通り直線 AB に平行な直線と，放物線との交点である。

直線 AB の傾きは 1 であるから，点 O を通り直線 AB に平行な直線の式は　$y=x$

よって，点 P は，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=x$ の交点である。

$\frac{1}{2}x^2=x$　より　$x(x-2)=0$

点 P は点 O とは異なる点であるから　$x\neq0$

よって　$x=2$　　このとき　$y=2$

ゆえに，点 P の座標は　$(2,\ 2)$

21

解説

(1) $y=\frac{1}{4}x^2$ について，$x=-4$ のとき　$y=\frac{1}{4}\times(-4)^2=4$

よって，点 P の座標は　$(-4,\ 4)$

$y=x^2$ について，$x=1$ のとき　$y=1$

よって，点 R の座標は　$(1,\ 1)$

直線 ℓ の式を $y=ax+b$ とおくと，ℓ は 2 点 P，R を通るから

$4=-4a+b$，$1=a+b$

これを解くと　$a=-\frac{3}{5}$，$b=\frac{8}{5}$

よって，直線 ℓ の式は　$y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$

(2) 放物線 $y=x^2$ と直線 ℓ の交点 Q の x 座標は，方程式 $x^2=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ の 1 以外の解である。

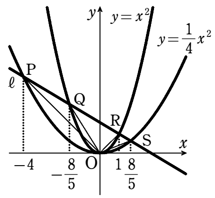
これを解くと　$5x^2+3x-8=0$

$(x-1)(5x+8)=0$

よって　$x=1,\ -\frac{8}{5}$

したがって，点 Q の x 座標は　$-\frac{8}{5}$

放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ と直線 ℓ の交点 S の x 座標は，方程式 $\frac{1}{4}x^2=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ の -4 以外の解である。



これを解くと　$5x^2+12x-32=0$

$(x+4)(5x-8)=0$

よって　$x=-4,\ \frac{8}{5}$

したがって，点 S の x 座標は　$\frac{8}{5}$

$\triangle$OPQ と $\triangle$OQR と $\triangle$ORS は，底辺を，それぞれ PQ，QR，RS とみると，高さが等しいから

$\triangle\mathrm{OPQ}:\triangle\mathrm{OQR}:\triangle\mathrm{ORS}=\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}:\mathrm{RS}$

ここで

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}:\mathrm{RS}=\left\{-\frac{8}{5}-(-4)\right\}:\left\{1-\left(-\frac{8}{5}\right)\right\}:\left(\frac{8}{5}-1\right)$$

$$=\frac{12}{5}:\frac{13}{5}:\frac{3}{5}=12:13:3$$

よって　$\triangle\mathrm{OPQ}:\triangle\mathrm{OQR}:\triangle\mathrm{ORS}=12:13:3$

1

解説

(1)　$y=6x^2$　　y は x^2 に比例する。

(2)　$y=\pi x^2$　　y は x^2 に比例する。

(3)　$y=\frac{1}{3}\times x^2\times 3x$　　すなわち　　$y=x^3$

y は x^2 に比例しない。

(4)　$y=2(x\times 0.5x+0.5x\times 4x+4x\times x)$

すなわち　　$y=13x^2$

y は x^2 に比例する。

2

解説

(1)　y は x^2 に比例するから，a を定数として，$y=ax^2$ とおくことができる。

$x=2$，$y=20$ を代入すると　　$20=a\times 2^2$

よって　　$a=5$

したがって　$y=5x^2$

(2)　y は x^2 に比例するから，a を定数として，$y=ax^2$ とおくことができる。

$x=-3$，$y=3$ を代入すると　　$3=a\times(-3)^2$

よって　　$a=\frac{1}{3}$

したがって　$y=\frac{1}{3}x^2$

(3)　y は x^2 に比例するから，a を定数として，$y=ax^2$ とおくことができる。

$x=-\frac{1}{2}$，$y=-1$ を代入すると　　$-1=a\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

よって　　$a=-4$

したがって　$y=-4x^2$

(4)　y は x^2 に比例するから，a を定数として，$y=ax^2$ とおくことができる。

$x=-\sqrt{3}$，$y=-\frac{15}{4}$ を代入すると　　$-\frac{15}{4}=a\times(-\sqrt{3})^2$

よって　　$a=-\frac{5}{4}$

したがって　$y=-\frac{5}{4}x^2$

(5)　y は x^2 に比例するから，a を定数として，$y=ax^2$ とおくことができる。

$x=5$，$y=75$ を代入すると　　$75=a\times 5^2$

よって　　$a=3$

したがって　$y=3x^2$

よって，$x=-2$ のとき　　$y=3\times(-2)^2=12$

3

解説

(1)　①　$x=3$ のとき　$y=\frac{2}{3}\times 3^2=6$

$x=6$ のとき　$y=\frac{2}{3}\times 6^2=24$

よって，変化の割合は　　$\frac{24-6}{6-3}=\frac{18}{3}=6$

②　$x=-2$ のとき　$y=\frac{2}{3}\times(-2)^2=\frac{8}{3}$

$x=4$　のとき　$y=\frac{2}{3}\times 4^2=\frac{32}{3}$

よって，変化の割合は　　$\dfrac{\frac{32}{3}-\frac{8}{3}}{4-(-2)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

③　$x=-3$ のとき　$y=\frac{2}{3}\times(-3)^2=6$

$x=3$　のとき　$y=6$

よって，変化の割合は　　$\frac{6-6}{3-(-3)}=0$

(2)　①　$x=-3$ のとき　$y=-2\times(-3)^2=-18$

$x=k$　のとき　$y=-2k^2$

よって，x の値が -3 から k まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{-2k^2-(-18)}{k-(-3)}=\frac{-2(k^2-9)}{k+3}=\frac{-2(k+3)(k-3)}{k+3}$$
$$=-2(k-3)$$

これが -4 に等しいから　　$-2(k-3)=-4$

これを解いて　　$k=5$

これは $k>-3$ を満たす。　　答　$k=5$

②　$x=1$ のとき　$y=a\times 1^2=a$

$x=4$ のとき　$y=a\times 4^2=16a$

よって，x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{16a-a}{4-1}=\frac{15a}{3}=5a$$

これが 3 に等しいから　　$5a=3$

これを解いて　　$a=\frac{3}{5}$

③　$x=p-2$ のとき　$y=6(p-2)^2$

$x=p+4$ のとき　$y=6(p+4)^2$

よって，x の値が $p-2$ から $p+4$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{6(p+4)^2-6(p-2)^2}{(p+4)-(p-2)}=\frac{6\{(p+4)^2-(p-2)^2\}}{6}$$
$$=(p^2+8p+16)-(p^2-4p+4)$$
$$=12p+12$$

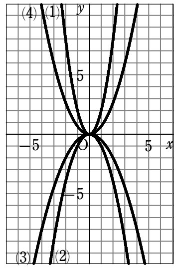
これが 36 に等しいから　　$12p+12=36$

これを解いて　　$p=2$

4

解説

(1)～(4)　[図]



5

解説

(1)　グラフが上に凸となるものは　②，④，⑤

(2)　グラフが下に凸となるものは　①，③，⑥

(3)　グラフの開きぐあいが最も大きいものは，$y=ax^2$ の a の絶対値が最も小さいものである。

$$-\frac{1}{4}=-0.25,\ \frac{2}{5}=0.4$$

よって　②

(4)　グラフの開きぐあいが最も小さいものは，$y=ax^2$ の a の絶対値が最も大きいものである。

よって　④

(5)　x 軸について対称となるものは，$y=ax^2$ の a の絶対値が等しく，符号が異なるものである。

よって　③と⑤

$\boxed{6}$

解説

(1)　求める式は $y=ax^2$ とおくことができる。

①　点 $(2,\ 2)$ を通るから　　$2=a\times2^2$

よって　　$a=\dfrac{1}{2}$　　　すなわち　　$y=\dfrac{1}{2}x^2$

②　点 $(1,\ 1)$ を通るから　　$1=a\times1^2$

よって　　$a=1$　　　すなわち　　$y=x^2$

③　点 $(1,\ -1)$ を通るから　　$-1=a\times1^2$

よって　　$a=-1$　　　すなわち　　$y=-x^2$

④　点 $(1,\ -2)$ を通るから　　$-2=a\times1^2$

よって　　$a=-2$　　　すなわち　　$y=-2x^2$

(2)　A は関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点だから，その y 座標は

$$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$$

さらに，A は直線 $y=ax$ 上の点だから，$x=-2$，$y=2$ を $y=ax$ に代入して

$$2=a\times(-2)$$

よって　　$a=-1$

$\boxed{7}$

解説

(1)　放物線 $y=ax^2$ が点 A $(-1,\ 3)$ を通るとき　　$3=a\times(-1)^2$

よって　　$a=3$

放物線 $y=ax^2$ が点 B $(-2,\ 2)$ を通るとき　　$2=a\times(-2)^2$

よって　　$a=\dfrac{1}{2}$

したがって，求める a の値の範囲は　　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq3$

(2)　放物線 $y=ax^2$ が点 C $(1,\ 1)$ を通るとき　　$1=a\times1^2$

よって　　$a=1$

放物線 $y=ax^2$ が点 D $(2,\ -1)$ を通るとき　　$-1=a\times2^2$

よって　　$a=-\dfrac{1}{4}$

したがって，求める a の値の範囲は　　$-\dfrac{1}{4}\leqq a<0,\ 0<a\leqq1$

(3)　(1)，(2) より，求める a の値の範囲は $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq3$ と $-\dfrac{1}{4}\leqq a<0,\ 0<a\leqq1$ の共通範囲である。

よって　　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq1$

(4)　(1)，(2) より，求める a の値の範囲は，$a\fallingdotseq0$ から $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq3$ と $-\dfrac{1}{4}\leqq a<0,$ $0<a\leqq1$ を除いた範囲である。

よって　　$a<-\dfrac{1}{4},\ 3<a$

$\boxed{8}$

解説

(1)　①　点 B の x 座標は -3 である。

よって，点 B の y 座標は　　$y=\dfrac{1}{3}\times(-3)^2=3$

したがって，点 B の座標は　　$(-3,\ 3)$

②　点 C と点 B は，y 軸について対称である。

よって，点 C の座標は　　$(3,\ 3)$

③　$AB=9-3=6$，$BC=3-(-3)=6$

よって，$\triangle ABC$ の面積は　　$\dfrac{1}{2}\times6\times6=18$

(2)　①　点 B の x 座標は 2 である。

よって，点 B の y 座標は　　$y=2^2=4$

したがって，点 B の座標は　　$(2,\ 4)$

②　点 C と点 B は，y 軸について対称である。

よって，点 C の座標は　　$(-2,\ 4)$

③　$AB=4-(-2)=6$，$BC=2-(-2)=4$

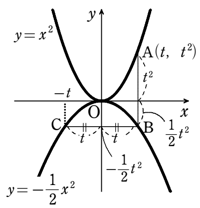
よって，$\triangle ABC$ の面積は　　$\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$

$\boxed{9}$

解説

点 A は関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるから，その座標は $(t,\ t^2)$ $[t>0]$ と表せる。

また，AB は y 軸に平行で，点 B が関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるから，その座標は $\left(t,\ -\dfrac{1}{2}t^2\right)$



よって　　$AB=t^2-\left(-\dfrac{1}{2}t^2\right)=\dfrac{3}{2}t^2$

BC は x 軸に平行で，点 C は関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるから，点 B と点 C は y 軸について対称である。

よって，点 C の x 座標は $-t$ で　$BC=t-(-t)=2t$

$AB=BC$ であるから　$\dfrac{3}{2}t^2=2t$

よって　　$t(3t-4)=0$

$t>0$ であるから　　$t=\dfrac{4}{3}$

したがって，A の座標は　$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{16}{9}\right)$　答

$\boxed{10}$

解説

(1)　2 点 A，B は関数 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあるから，$y=\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=-3$，6 をそれぞれ代入すると

$$y=\frac{1}{3}\times(-3)^2=3$$

$$y=\frac{1}{3}\times6^2=12$$

よって，A の座標は　$(-3,\ 3)$，B の座標は　$(6,\ 12)$

直線 ℓ の傾きは　　$\dfrac{12-3}{6-(-3)}=1$

よって，ℓ の式は $y=x+b$ とおける。

$y=x+b$ に $x=-3$，$y=3$ を代入すると

$$3=-3+b$$

$$b=6$$

したがって，ℓ の式は　　$y=x+6$

(2)　直線 ℓ と y 軸との交点を C とすると，C の座標は $(0,\ 6)$

$$\triangle OAB=\triangle OAC+\triangle OBC$$

$$=\frac{1}{2}\times6\times3+\frac{1}{2}\times6\times6$$

$$=27$$

$\boxed{11}$

解説

点 A の x 座標を a とすると，3 点 A，B，D の座標は，それぞれ

$$\left(a,\ \frac{1}{3}a^2\right),\ \left(-a,\ \frac{1}{3}a^2\right),\ (a,\ -3a^2)$$

となる。

よって　　$AB=a-(-a)=2a$

$$AD=\frac{1}{3}a^2-(-3a^2)=\frac{10}{3}a^2$$

四角形 ABCD が正方形となるとき，$AB=AD$ であるから

$$2a=\frac{10}{3}a^2$$

$$a(5a-3)=0$$

点 A の x 座標は正であるから　$a=\dfrac{3}{5}$

このとき　　$\dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{3}{25}$

したがって，点 A の座標は　$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3}{25}\right)$

$\boxed{12}$

解説

(1)　点 A の y 座標は　　$y=4^2=16$

よって，点 A の座標は　　(4，16)

直線 AC の傾きは -1 となるから，直線 AC の式は $y=-x+k$ とおける。

この直線が点 (4，16) を通るから　　$16=-4+k$

よって　　$k=20$

したがって，直線 AC の式は　　$y=-x+20$

(2)　点 A の座標は $(t,\ t^2)$ とおける。

正方形 ABCD の 1 辺の長さは 2 であるから，点 C の座標は $(t+2,\ t^2-2)$ となる。

この点が放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるから

$$t^2-2=\frac{1}{2}(t+2)^2$$

$$t^2-4t-8=0$$

これを解いて　　$t=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-8)}}{1}=2\pm2\sqrt{3}$

点 A の x 座標は正の数であるから　　$2+2\sqrt{3}$

$\boxed{13}$

解説

(1)　点 O を x 軸方向に a，y 軸方向に a^2 だけ移動した点が A である。

線分 OA と線分 BC は平行で長さが等しいから，点 B を x 軸方向に a，y 軸方向に a^2 だけ移動した点が C となる。

よって，点 C の座標は　$(-1+a,\ 1+a^2)$

(2)　平行四辺形の面積を 2 等分する直線は，平行四辺形の 2 本の対角線の交点を通る。

2 本の対角線の交点は，線分 OC の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{1+a^2}{2}\right)$$

直線 $y=4x+\frac{1}{2}$ が，点 $\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{1+a^2}{2}\right)$ を通るから

$$\frac{1+a^2}{2}=4\times\frac{-1+a}{2}+\frac{1}{2}$$

$$a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0$$

よって　　$a=2$

このとき　　$a^2=2^2=4$

したがって，点 A の座標は　(2，4)

(3)　まず，△OAB の面積を求める。

△OAB の面積は，台形の面積から 2 つの三角形の面積をひけばよいから

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times(1+4)\times3-\left(\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times2\times4\right)$$

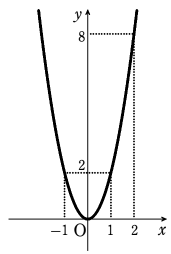
$$=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=3$$

平行四辺形 OACB の面積は，△OAB の面積の 2 倍であるから　$3\times2=6$

$\boxed{14}$

解説

(1)　関数 $y=2x^2$ のグラフは，右の図のようになる。



①　$x=1$ のとき　$y=2$

　$x=2$ のとき　$y=8$

よって，求める値域は　　$2\leqq y\leqq8$

②　$x=-1$ のとき　$y=2$

　$x=2$ のとき　$y=8$

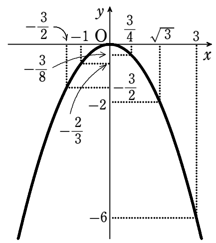
よって，求める値域は　　$0\leqq y\leqq8$

③　$x=-1$ のとき　$y=2$

　$x=1$ のとき　$y=2$

よって，求める値域は　　$0\leqq y\leqq2$

(2)　関数 $y=-\frac{2}{3}x^2$ のグラフは，右の図のようになる。



①　$x=0$ のとき　$y=0$

　$x=3$ のとき　$y=-6$

よって，求める値域は　　$-6\leqq y\leqq0$

②　$x=-\frac{3}{2}$ のとき　$y=-\frac{3}{2}$

　$x=\frac{3}{4}$ のとき　$y=-\frac{3}{8}$

よって，求める値域は　　$-\frac{3}{2}\leqq y\leqq0$

③　$x=-1$ のとき　$y=-\frac{2}{3}$

　$x=\sqrt{3}$ のとき　$y=-2$

よって，求める値域は　　$-2\leqq y\leqq0$

$\boxed{15}$

解説

(1)　関数 $y=ax^2$ の値域が $0\leqq y\leqq2$ であるから　　$a>0$

$x=-1$ のとき　$y=a$

$x=2$　のとき　$y=4a$

$a>0$ であるから　$a<4a$

よって，$-1\leqq x\leqq2$ のとき　$0\leqq y\leqq4a$

したがって　　$4a=2$

$$a=\frac{1}{2}$$

(2)　関数 $y=ax^2$ の値域が $-12\leqq y\leqq0$ であるから　　$a<0$

$x=-3$ のとき　$y=9a$

$x=4$　のとき　$y=16a$

$a<0$ であるから　$9a>16a$

よって，$-3\leqq x\leqq4$ のとき　$16a\leqq y\leqq0$

したがって　　$16a=-12$

$$a=-\frac{3}{4}$$

(3)　関数 $y=ax^2$ の値域が $0\leqq y\leqq6$ であるから　　$a>0$

$x=-\sqrt{2}$ のとき　$y=2a$

$x=\sqrt{3}$　のとき　$y=3a$

$a>0$ であるから　$2a<3a$

よって，$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ のとき　$0\leqq y\leqq3a$

したがって　　$3a=6$

$$a=2$$

$\boxed{16}$

解説

(1)　$x=-2$ のとき　　$y=-2\times(-2)^2=-8$

　$x=a$　のとき　　$y=-2a^2$

$-8\neq-18$ であることから，$a>2$ で，$x=a$ のとき $y=-18$ となることがわかる。

ゆえに　　$-2a^2=-18$　　　$a>2$ であるから　　$a=3$

また　　$b=0$　　　　答　$a=3$，$b=0$

(2)　関数 $y=ax^2$ の値域は，0 以上のみ，あるいは 0 以下のみであり，正と負にまたがることはない。

この問題の値域は $b\leqq y\leqq8$ であるから　　$a>0$

$x=-4$ のとき　　$y=a\times(-4)^2=16a$

$x=2$　のとき　　$y=a\times2^2=4a$

$a>0$ であるから　　$16a>4a$　　　よって　　$16a=8$

ゆえに　　$a=\frac{1}{2}$　　　また　　$b=0$　　　　答　$a=\frac{1}{2}$，$b=0$

17

(解説)

(1)　$y=3x^2$ について　　$x=-4$ のとき　$y=48$

$x=2$　のとき　$y=12$

グラフから，$y=3x^2$ $(-4\leqq x\leqq 2)$ の値域は　　$0\leqq y\leqq 48$

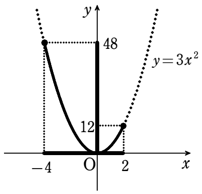
$a<0$ であるから，$y=ax+b$ のグラフは右下がりの直線で

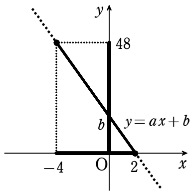
$x=-4$ のとき　$y=-4a+b$

$x=2$　のとき　$y=2a+b$

よって，条件から　　$-4a+b=48$，$2a+b=0$

これを解いて　　$a=-8$，$b=16$





(2)　$y=6x+b$ のグラフは右上がりの直線で

$x=-\frac{4}{3}$ のとき　$y=-8+b$

$x=4$　　のとき　$y=24+b$

よって，$y=6x+b$ $\left(-\frac{4}{3}\leqq x\leqq 4\right)$ の値域は　　$-8+b\leqq y\leqq 24+b$

$y=ax^2$ について

$x=-\frac{4}{3}$ のとき　$y=\frac{16}{9}a$

$x=4$　　のとき　$y=16a$

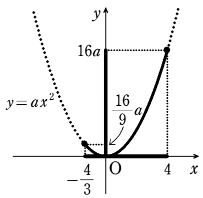
$a>0$ であるから，$y=ax^2$ $\left(-\frac{4}{3}\leqq x\leqq 4\right)$ の

値域は　　$0\leqq y\leqq 16a$

よって，条件から

$-8+b=0$，$24+b=16a$

これを解いて　　$a=2$，$b=8$



18

(解説)

(1)　$x^2=3x+4$

$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

したがって　　$x=-1$，4

$x=-1$ のとき $y=1$，　$x=4$ のとき $y=16$

よって，共有点の座標は　　$(-1,\ 1)$，$(4,\ 16)$

(2)　$2x^2=4x$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0$，2

$x=0$ のとき　$y=0$

$x=2$ のとき　$y=8$

よって，共有点の座標は　$(0,\ 0)$，$(2,\ 8)$

(3)　$-2x^2=-6x+4$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

したがって　　$x=1$，2

$x=1$ のとき $y=-2$，　$x=2$ のとき $y=-8$

よって，共有点の座標は　　$(1,\ -2)$，$(2,\ -8)$

(4)　$2x^2=-x+6$

$2x^2+x-6=0$

$(x+2)(2x-3)=0$

したがって　　$x=-2$，$\frac{3}{2}$

$x=-2$ のとき $y=8$，　$x=\frac{3}{2}$ のとき $y=\frac{9}{2}$

よって，共有点の座標は　　$(-2,\ 8)$，$\left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

(5)　$-6x^2=-5x+1$

$6x^2-5x+1=0$

$(2x-1)(3x-1)=0$

したがって　　$x=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$

$x=\frac{1}{2}$ のとき $y=-\frac{3}{2}$，　$x=\frac{1}{3}$ のとき $y=-\frac{2}{3}$

よって，共有点の座標は　　$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

(6)　$-x^2=-4x+4$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

したがって　　$x=2$

$x=2$ のとき　$y=-4$

よって，共有点の座標は　　$(2,\ -4)$

19

(解説)

点 C の y 座標は 6 であるから　C$(0,\ 6)$

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-x+6$ の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2=-x+6$ の解である。

これを解くと　　$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3$，2

$x=-3$ のとき，$y=9$ であるから，点 A の座標は　$(-3,\ 9)$

$x=2$ のとき，$y=4$ であるから，点 D の座標は　$(2,\ 4)$

(1)　$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$

(2)　$\triangle\mathrm{ODC}=\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$

よって　　$\triangle\mathrm{OAD}=\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{ODC}=9+6=15$

20

(解説)

$\triangle$OAB と $\triangle$PAB は，共通な辺 AB をもつ。

$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{PAB}$ となるのは，2 つの三角形の底辺を AB としたときの高さが等しくなるときである。

よって，点 P は，点 O を通り直線 AB に平行な直線と，放物線との交点である。

直線 AB の傾きは 1 であるから，点 O を通り直線 AB に平行な直線の式は　$y=x$

よって，点 P は，直線　$y=x$ と放物線　$y=\frac{1}{3}x^2$ の交点のうち原点 O とは異なる点である。

$\frac{1}{3}x^2=x$

$x(x-3)=0$

点 P は原点 O とは異なる点であるから

$x=3$

このとき　　$y=3$

したがって，点 P の座標は　$(3,\ 3)$

$\boxed{21}$

（解説）

(1)　$x=2$ を $y=x^2$ に代入すると

$$y=2^2=4$$

よって，点 A の座標は　(2，4)

直線 ℓ の傾きは　$\dfrac{4-0}{2-(-2)}=1$

したがって，ℓ の式は $y=x+b$ とおける。

$x=2$，$y=4$ を $y=x+b$ に代入すると

$$4=2+b$$
$$b=2$$

よって，ℓ の式は　$y=x+2$

(2)　点 E から右へ $2-(-2)=4$，上へ 4 だけ動いた点が A である。

AE＝AC であるから，点 C の座標は

$(2+4,\ 4+4)$　すなわち　(6，8)

$x=6$，$y=8$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$8=a\times6^2$$

よって　　$a=\dfrac{2}{9}$

(3)　$y=\dfrac{2}{9}x^2$ を $y=x+2$ に代入すると

$$\frac{2}{9}x^2=x+2$$

$$2x^2-9x-18=0$$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\times2\times(-18)}}{2\times2}=6,\ -\frac{3}{2}$$

よって，点 D の x 座標は　$-\dfrac{3}{2}$

点 A を通り y 軸に平行な直線 m をひく。

2 点 C，D から m にそれぞれ垂線をひき，m との交点を C′，D′ とすると

$$\mathrm{CC'}=6-2=4$$

$$\mathrm{DD'}=2-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}$$

△ODA：△OAC＝DA：AC＝DD′：CC′ であるから，求める面積の比は

$$\frac{7}{2}:4=7:8$$

$\boxed{1}$

（解説）

(1)　求める式は $y=ax^2$ とおくことができる。

①　グラフが点 $(-5,\ 10)$ を通るから，$y=ax^2$ に $x=-5$，$y=10$ を代入すると

$$10=a\times(-5)^2$$

よって　　$a=\dfrac{2}{5}$

したがって　$y=\dfrac{2}{5}x^2$

②　グラフが点 $(2,\ 4)$ を通るから，$y=ax^2$ に $x=2$，$y=4$ を代入すると

$$4=a\times2^2$$

よって　　$a=1$

したがって　$y=x^2$

③　グラフが点 $(3,\ -3)$ を通るから，$y=ax^2$ に $x=3$，$y=-3$ を代入すると

$$-3=a\times3^2$$

よって　　$a=-\dfrac{1}{3}$

したがって　$y=-\dfrac{1}{3}x^2$

(2)　$y=\dfrac{2}{5}x^2$ に $x=-6$ を代入すると　　$y=\dfrac{2}{5}\times(-6)^2=\dfrac{72}{5}$

(3)　$y=x^2$ に $x=3$ を代入すると　　$y=3^2=9$

(4)　$y=-\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=5$ を代入すると　　$y=-\dfrac{1}{3}\times5^2=-\dfrac{25}{3}$

$\boxed{2}$［三重］

（解説）

放物線 $y=-x^2$，$y=2x^2$，$y=\dfrac{1}{3}x^2$，

$y=-\dfrac{1}{4}x^2$ において，x 座標が 1 である点を

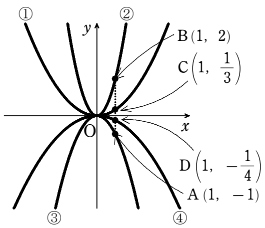
それぞれ A，B，C，D とすると

A $(1,\ -1)$，B $(1,\ 2)$，

C$\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$，D$\left(1,\ -\dfrac{1}{4}\right)$

A，B，C，D の位置関係は右の図のように

なるから，放物線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ は　　①



$\boxed{3}$［奈良県］

（解説）

ア　正しい。

イ　y 軸について対称な曲線であるから，正しくない。

ウ　正しい。

エ　正しい。

オ　a の値の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は小さいから，正しくない。

$\boxed{4}$

（解説）

(1)　$x=-3$ のとき　$y=18$，　$x=2$ のとき　$y=8$

$y=2x^2\ (-3\leqq x\leqq2)$ のグラフは，図 (1) のようになる。

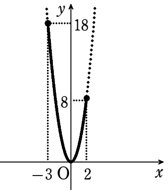
よって，求める値域は　　$0\leqq y\leqq18$

(2)　$x=-2$ のとき　$y=-8$，　$x=3$ のとき　$y=-18$

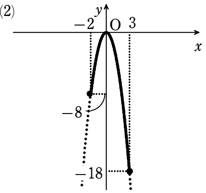
$y=-2x^2\ (-2\leqq x\leqq3)$ のグラフは，図 (2) のようになる。

よって，求める値域は　　$-18\leqq y\leqq0$

(1)



(2)



(3)　$x=-1$ のとき　$y=\dfrac{1}{4}$，　$x=\dfrac{8}{3}$ のとき　$y=\dfrac{16}{9}$

$y=\dfrac{1}{4}x^2\left(-1\leqq x\leqq\dfrac{8}{3}\right)$ のグラフは，図 (3) のようになる。

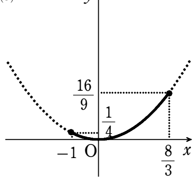
よって，求める値域は　　$0\leqq y\leqq\dfrac{16}{9}$

(4)　$x=-3$ のとき　$y=-3$，　$x=-1$ のとき　$y=-\dfrac{1}{3}$

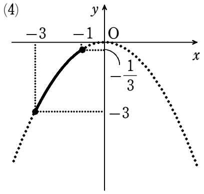
$y=-\dfrac{1}{3}x^2\ (-3\leqq x\leqq-1)$ のグラフは，図 (4) のようになる。

よって，求める値域は　　$-3\leqq y\leqq-\dfrac{1}{3}$

(3)



(4)



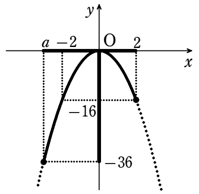
5

解説

(1) $y=-4x^2$ について

$x=a$ のとき　$y=-4a^2$

$x=2$ のとき　$y=-16$



$-16\neq-36$ であるから，$a<-2$ で $x=a$ のとき

$y=-36$ となる。

よって　$-4a^2=-36$

したがって　$a^2=9$

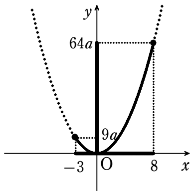
$a<-2$ であるから　$a=-3$

また，グラフから　$b=0$

答　$a=-3$，$b=0$

(2) 関数 $y=ax^2$ の値域は，$a>0$ のとき 0 以上，$a<0$ のとき 0 以下となり，正と負にまたがることはない。

この関数の値域は $b\leqq y\leqq 48$ であるから　$a>0$



$y=ax^2$ について

$x=-3$ のとき　$y=9a$

$x=8$　のとき　$y=64a$

グラフから，値域は　$0\leqq y\leqq 64a$

これが $b\leqq y\leqq 48$ と等しいから

$0=b$，$64a=48$

よって　$a=\dfrac{3}{4}$，$b=0$

6

解説

(1) $x=p$ のとき　$y=3p^2$

$x=p+2$ のとき　$y=3(p+2)^2$

よって，x の値が p から $p+2$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{3(p+2)^2-3p^2}{(p+2)-p}=\frac{12p+12}{2}=6p+6$$

したがって　$6p+6=10$

これを解いて　$p=\dfrac{2}{3}$

(2) $x=t-1$ のとき　$y=-4(t-1)^2$

$x=t+3$ のとき　$y=-4(t+3)^2$

よって，x の値が $t-1$ から $t+3$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{\{-4(t+3)^2\}-\{-4(t-1)^2\}}{(t+3)-(t-1)}=\frac{-4(8t+8)}{4}=-8t-8$$

したがって　$-8t-8=16$

これを解いて　$t=-3$

(3) $x=-k$ のとき　$y=-\dfrac{2}{5}\times(-k)^2=-\dfrac{2}{5}k^2$

$x=2k$ のとき　$y=-\dfrac{2}{5}\times(2k)^2=-\dfrac{8}{5}k^2$

よって，x の値が $-k$ から $2k$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{\left(-\frac{8}{5}k^2\right)-\left(-\frac{2}{5}k^2\right)}{2k-(-k)}=\frac{-\frac{6}{5}k^2}{3k}=-\frac{2}{5}k$$

したがって　$-\dfrac{2}{5}k=-4$

これを解いて　$k=10$

7

解説

(1) $y=x^2$ について

$x=p-3$ のとき　$y=(p-3)^2$

$x=p+3$ のとき　$y=(p+3)^2$

よって，x の値が $p-3$ から $p+3$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{(p+3)^2-(p-3)^2}{(p+3)-(p-3)}=\frac{12p}{6}=2p$$

$y=6x+5$ の変化の割合は，つねに 6 であるから　$2p=6$

これを解いて　$p=3$

(2) $y=-\dfrac{2}{3}x^2$ について

$x=t-1$ のとき　$y=-\dfrac{2}{3}(t-1)^2$

$x=t+7$ のとき　$y=-\dfrac{2}{3}(t+7)^2$

よって，x の値が $t-1$ から $t+7$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{\left\{-\frac{2}{3}(t+7)^2\right\}-\left\{-\frac{2}{3}(t-1)^2\right\}}{(t+7)-(t-1)}=-\frac{4}{3}t-4$$

$y=-2x+3$ の変化の割合は，つねに -2 であるから　$-\dfrac{4}{3}t-4=-2$

これを解いて　$t=-\dfrac{3}{2}$

(3) $y=kx^2$ について

$x=k-1$ のとき　$y=k(k-1)^2$

$x=k$　のとき　$y=k\times k^2$

よって，x の値が $k-1$ から k まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{(k\times k^2)-k(k-1)^2}{k-(k-1)}=\frac{k(2k-1)}{1}=2k^2-k$$

$y=kx+5$ の変化の割合は，つねに k であるから

$2k^2-k=k$

$k(k-1)=0$

$k\neq0$ であるから　$k=1$

8

解説

(1) 放物線 $y=ax^2$ が点 A (1，6) を通るとき　$6=a\times1^2$

よって　$a=6$

放物線 $y=ax^2$ が点 B (2，6) を通るとき　$6=a\times2^2$

よって　$a=\dfrac{3}{2}$

したがって，求める a の値の範囲は　$\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 6$　答

(2) 放物線 $y=ax^2$ が点 C (−2，2) を通るとき　$2=a\times(-2)^2$

よって　$a=\dfrac{1}{2}$

放物線 $y=ax^2$ が点 D (−1，2) を通るとき　$2=a\times(-1)^2$

よって　$a=2$

したがって，求める a の値の範囲は　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 2$　答

(3) (1)，(2) より，求める a の値の範囲は $\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 6$ と $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 2$ の共通範囲である。

よって　$\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 2$　答

(4) (1)，(2) より，求める a の値の範囲は，$a>0$ から $\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 6$ と $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 2$ を除いた範囲である。

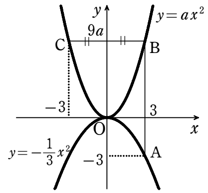
よって　$0<a<\dfrac{1}{2}$，$6<a$　答

9

解説

(1) 点 A の x 座標は 3 であるから，y 座標は

$y=-\dfrac{1}{3}\times3^2=-3$



(2) 点 B の x 座標は 3 であるから，y 座標は

$y=a\times3^2=9a$

よって　$AB=9a-(-3)=9a+3$

また，B と C は y 軸について対称であるから，点 C の x 座標は -3 である。

よって　$BC=3-(-3)=6$

$AB:BC=3:2$ のとき　$(9a+3):6=3:2$

したがって　$2(9a+3)=18$

これを解いて　$a=\dfrac{2}{3}$

10

解説

点 A の x 座標は p であるから，A の y 座標は　p^2

点 B の x 座標も p であるから，B の y 座標は　$2p+4$

よって　$PA=p^2$，$PB=2p+4$

$PA=\dfrac{1}{2}PB$ とすると　$p^2=\dfrac{1}{2}(2p+4)$

$p^2-p-2=0$

これを解くと　$p=-1$，2

$p>0$ であるから　$p=2$

したがって，P の座標は　(2，0)

11

解説

2 点 A，B は関数 $y=-x^2$ のグラフ上にあるから

A の y 座標は　$y=-(-2)^2=-4$，　B の y 座標は　$y=-3^2=-9$

A の座標は　$(-2,\ -4)$，　B の座標は　$(3,\ -9)$

2 点 A，B を通る直線の式を求めると

$$y=-x-6$$

12

解説

(1)　点 A は放物線 $y=ax^2$ 上の点であるから

$$8=a\times(-4)^2$$

よって　$a=\dfrac{1}{2}$

(2)　直線 AB の式を $y=px+q$ とおくと

$$\begin{cases}8=-4p+q\\2=2p+q\end{cases}$$

これを解くと　$p=-1$，$q=4$

よって，直線 AB の式は　$y=-x+4$

(3)　OC＝4 であるから

$$\triangle AOC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$$

(4)　$\triangle BOC=\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$

よって　$\triangle OAB=\triangle AOC+\triangle BOC=8+4=12$

(5)　条件を満たす直線は，点 A と線分 OC の中点を通る。

線分 OC の中点の座標は　$(0,\ 2)$

よって，求める直線の式は $y=rx+2$ とおける。

この直線が，点 A を通るから

$$8=-4r+2$$

$$r=-\frac{3}{2}$$

したがって，求める直線の式は　$y=-\dfrac{3}{2}x+2$

13［高田］

解説

(1)　$y=2$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$2=\frac{1}{2}x^2$$

$$x=\pm2$$

よって，点 A の座標は　$(-2,\ 2)$

点 D の座標は　$(2,\ 2)$

また，2 点 B，C は y 軸について対称であるから，点 C の座標は

$(3,\ -6)$

(2)　AD＝4，BC＝6 であるから，四角形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}\times(4+6)\times\{2-(-6)\}=40$$

(3)　点 D を通り，四角形 ABCD の面積を 2 等分する直線と，線分 BC との交点を E とする。

△DEC の面積について

$$\frac{1}{2}\times EC\times8=40\times\frac{1}{2}$$

$$EC=5$$

よって，点 E の座標は　$(-2,\ -6)$

求める直線の式を $y=mx+n$ とおくと

$$2=2m+n$$

$$-6=-2m+n$$

これを解くと　$m=2$，$n=-2$

したがって，求める式は　$y=2x-2$

14

解説

(1)　放物線 $y=ax^2$ は点 A $(-2,\ 8)$ を通るから　$8=a\times(-2)^2$

よって　$a=2$

(2)　$y=2x^2$ について

$x=1$ のとき　$y=2\times1^2=2$

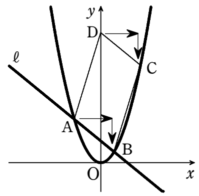
よって，点 B の座標は　$(1,\ 2)$

直線 ℓ の式を $y=mx+n$ とおくと，ℓ は 2 点 A，B を通るから

$8=-2m+n$，$2=m+n$

これを解くと　$m=-2$，$n=4$

したがって，直線 ℓ の式は　$y=-2x+4$



(3)　平行四辺形 ABCD においては，点 A から点 B への移動と，点 D から点 C への移動は，同じ移動である。

点 A から点 B への移動は，右に 3，下に 6 の移動である。

点 D の x 座標は 0 であるから，点 C の x 座標は 3 になる。

よって，点 C の y 座標は　$2\times3^2=18$

答　$(3,\ 18)$

(4)　点 D の y 座標は，点 C の y 座標より 6 だけ大きいから

$$18+6=24$$

よって，点 D の座標は　$(0,\ 24)$

15

解説

条件より　AB∥CO

よって，四角形 OBAC が平行四辺形となるのは，AB＝CO となるときである。

点 A の y 座標は　$y=a\times3^2=9a$

点 B の y 座標は　$y=-\dfrac{1}{2}\times3^2=-\dfrac{9}{2}$

よって　$AB=9a-\left(-\dfrac{9}{2}\right)=9a+\dfrac{9}{2}$

CO＝6 であるから　$9a+\dfrac{9}{2}=6$

これを解くと　$a=\dfrac{1}{6}$　答

16

解説

(1)　$y=x^2$ について

$x=3$ のとき　$y=9$，　$x=-1$ のとき　$y=1$

よって，点 A の座標は $(3,\ 9)$，点 C の座標は $(-1,\ 1)$

2 点 A，C を通る直線の式を $y=mx+n$ とおくと

$9=3m+n$，$1=-m+n$

これを解くと　$m=2$，$n=3$

よって，求める直線の式は　$y=2x+3$

(2)　平行四辺形 OABC においては，点 O から点 C への移動と，点 A から点 B への移動は，同じ移動である。

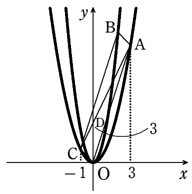
点 O から点 C への移動は，左に 1，上に 1 の移動である。

よって，点 B の座標は

$(3-1,\ 9+1)$　すなわち　$(2,\ 10)$

放物線 $y=ax^2$ が点 B を通るから　$10=a\times2^2$

したがって　$a=\dfrac{5}{2}$



(3)　四角形 OABC は平行四辺形であるから，その面積を S とすると

$$S=2\triangle OAC$$

直線 AC と y 軸との交点を D とする。

(1) より，直線 AC の y 切片は 3 であるから　D $(0,\ 3)$

したがって

$$\triangle OAC=\triangle OAD+\triangle OCD$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$$

よって　$S=2\times6=12$

17

解説

(1)　点 A の y 座標は　$4a^2$

よって，点 D の y 座標は $4a^2$ となる。

点 D の x 座標は $4a^2=x^2$ を解いて　$x=\pm2a$

点 D の x 座標は正であるから　$x=2a$

したがって，点 D の座標は　$(2a,\ 4a^2)$

(2)　点 B の y 座標は　a^2

よって　$AB=4a^2-a^2=3a^2$

また　$AD=2a-a=a$

したがって，四角形 ABCD の面積は

$$3a^2\times a=3a^3$$

(3)　AB＝AD となればよいから

$$3a^2=a$$

$$3a^2-a=0$$

$$a(3a-1)=0$$

$a>0$ であるから　$a=\frac{1}{3}$

$\boxed{18}$

解説

点Pは放物線 $y=x^2$ 上の点であるから，Pの座標は $(t,\ t^2)$ とおける。

ただし，$0<t<1$ である。

このとき，$PQ=t^2$，$PR=1-t$ である。

四角形PQARが正方形になるとき，$PQ=PR$ であるから

$$t^2=1-t$$

すなわち　$t^2+t-1=0$

これを解くと　$t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$0<t<1$ であるから　$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって，Pの x 座標は　$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{19}$

解説

(1)　放物線 $y=ax^2$ は点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を通るから　$\frac{1}{2}=a\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

よって　$a=2$

(2)　点Dの x 座標を t $(t>0)$とする。

CDは y 軸に平行であるから，点Cの x 座標も t になる。

よって　$C\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$

また，BCは x 軸に平行であるから，点Bの y 座標は，点Cの y 座標と等しく

$\frac{1}{2}t^2$

$y=2x^2$ で $y=\frac{1}{2}t^2$ とすると　$\frac{1}{2}t^2=2x^2$

よって　$x^2=\frac{1}{4}t^2$　　これを解くと　$x=\pm\frac{1}{2}t$

したがって，点Bの x 座標は $\frac{1}{2}t$ であるから　$B\left(\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$

点Aの x 座標は，点Bの x 座標と等しく $\frac{1}{2}t$ で，y 座標は　$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}t\right)^2=\frac{1}{8}t^2$

よって　$A\left(\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{8}t^2\right)$

四角形ABCDは正方形であるから　$BC=BA$

すなわち　$t-\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^2$

これを解くと　$\frac{1}{2}t=\frac{3}{8}t^2$

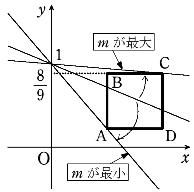
$$3t^2-4t=0$$

$$t(3t-4)=0$$

$t>0$ であるから　$t=\frac{4}{3}$　　答　$\frac{4}{3}$

(3)　(2)から　$C\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{9}\right)$，$A\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{9}\right)$，$B\left(\frac{2}{3},\ \frac{8}{9}\right)$，$D\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{9}\right)$

点(0, 1)を通る直線が正方形ABCDと共有点をもつとき，傾き m が最大になるのは，直線が点Cを通るときである。



このとき　$m=\frac{\frac{8}{9}-1}{\frac{4}{3}-0}=-\frac{1}{9}\div\frac{4}{3}=-\frac{1}{12}$

また，傾き m が最小になるのは，直線が点Aを通るときである。

このとき　$m=\frac{\frac{2}{9}-1}{\frac{2}{3}-0}=-\frac{7}{9}\div\frac{2}{3}=-\frac{7}{6}$

よって，求める m の値の範囲は　$-\frac{7}{6}\leqq m\leqq-\frac{1}{12}$

$\boxed{20}$

解説

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=-x+4$ の共有点の x 座標は，2次方程式 $\frac{1}{2}x^2=-x+4$ の解である。

これを解くと　$x^2+2x-8=0$

$$(x+4)(x-2)=0$$

よって　$x=-4,\ 2$

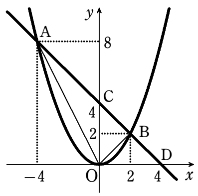
$x=-4$ のとき　$y=8$，　$x=2$ のとき　$y=2$

したがって，Aの座標は$(-4,\ 8)$，Bの座標は$(2,\ 2)$

また，直線 $y=-x+4$ の y 切片は4であるから，Cの座標は$(0,\ 4)$

Dの x 座標は，$0=-x+4$ を解いて　$x=4$

よって，Dの座標は　$(4,\ 0)$



(1)　$\triangle ODC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

(2)　$\triangle OAC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

(3)　$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times4\times2=4$ であるから

$\triangle OAB=\triangle OAC+\triangle OBC$

$=8+4=12$

$\boxed{21}$

解説

点Aの座標を求める。

Aは①と②の共有点であるから，$-\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x$ を解いて　$x=0,\ -3$

Aは原点Oではないから　$x=-3$

このとき　$y=-\frac{9}{2}$

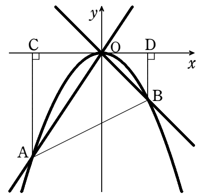
よって，Aの座標は　$\left(-3,\ -\frac{9}{2}\right)$

また，点Bは①と③の共有点であるから，$-\frac{1}{2}x^2=-x$ を解いて　$x=0,\ 2$

Bは原点Oではないから　$x=2$

このとき　$y=-2$

よって，Bの座標は$(2,\ -2)$



2点A，Bから x 軸に引いた垂線と x 軸との交点を，それぞれC，Dとする。

2点A，Bの座標から，次のことがわかる。

$OC=3$，　$AC=\frac{9}{2}$，　$OD=2$，　$BD=2$

△OABの面積は

(台形ABDCの面積)−(△OAC＋△OBD)

で求められるから

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{2}+2\right)\times5-\left(\frac{1}{2}\times3\times\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\times2\times2\right)=\frac{65}{4}-\left(\frac{27}{4}+2\right)=\frac{15}{2}$$

$\boxed{22}$ [広陵]

解説

(1)　点Aは関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあるから，$y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=-3$ を代入すると，

y 座標は

$$y=\frac{1}{3}\times(-3)^2=3$$

直線 ℓ の式を $y=-\frac{1}{3}x+b$ とおくと，点Aはこの直線上にあるから

$$3=-\frac{1}{3}\times(-3)+b$$

$$b=2$$

よって，直線 ℓ の式は　$y=-\frac{1}{3}x+2$

(2)　点Cの x 座標は $\frac{1}{3}x^2=-\frac{1}{3}x+2$ の解で表される。

$$x^2+x-6=0$$

$$(x-2)(x+3)=0$$

点Cの x 座標は正であるから　$x=2$

よって　$\triangle OAC=\triangle OAB+\triangle OCB$

$=\frac{1}{2}\times2\times3+\frac{1}{2}\times2\times2$

$=5$

$\boxed{23}$［城西大学附属川越］

解説

(1)　直線 ℓ の傾きは　$\dfrac{-1-(-4)}{2-(-4)}=\dfrac{1}{2}$

よって，直線 ℓ の式は $y=\dfrac{1}{2}x+b$ と表すことができる。

$x=2$，$y=-1$ をこの式に代入すると

$$-1=\frac{1}{2}\times 2+b$$

$$b=-2$$

したがって，求める式は　$y=\dfrac{1}{2}x-2$

(2)　$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4+\dfrac{1}{2}\times 2\times 2$

$=6$

(3)　点 O を通り，直線 ℓ と平行な直線をひき，この直線と放物線 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ との交点のうち原点でないものを P とする。

このとき，$\triangle OAB=\triangle PAB$ となることから，この点 P の座標を求めればよい。

直線 OP の式は　$y=\dfrac{1}{2}x$

$y=\dfrac{1}{2}x$ を $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると

$$\frac{1}{2}x=-\frac{1}{4}x^2$$

$$x^2+2x=0$$

$$x(x+2)=0$$

$$x=0,\ -2$$

点 P は原点とは異なるから　$x=-2$

$x=-2$ を $y=\dfrac{1}{2}x$ に代入すると

$$y=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$$

よって，点 P の座標は　$(-2,\ -1)$

$\boxed{24}$［清真学園］

解説

(1)　$x=-2$ を $y=x^2$ に代入すると　$y=(-2)^2=4$

$x=3$ を $y=x^2$ に代入すると　$y=3^2=9$

よって，点 A の座標は　$(-2,\ 4)$，点 B の座標は　$(3,\ 9)$

直線 ℓ の傾きは　$\dfrac{9-4}{3-(-2)}=1$

したがって，ℓ の式は $y=x+b$ とおける。

$x=-2$，$y=4$ を $y=x+b$ に代入すると

$$4=-2+b$$

$$b=6$$

よって，求める式は　$y=x+6$

(2)　$\triangle OAB:\triangle OPA=5:2$ より　$AB:PA=5:2$　……①

点 P の x 座標を t とすると，① より

$$\{3-(-2)\}:(-2-t)=5:2$$

$$-10-5t=10$$

$$t=-4$$

$x=-4$ を $y=x+6$ に代入すると

$$y=-4+6=2$$

よって，点 P の座標は　$(-4,\ 2)$

$x=-4$，$y=2$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$2=a\times(-4)^2$$

したがって　$a=\dfrac{1}{8}$

(3)　$y=\dfrac{1}{8}x^2$ を $y=x+6$ に代入すると

$$\frac{1}{8}x^2=x+6$$

$$x^2-8x-48=0$$

$$(x+4)(x-12)=0$$

$$x=-4,\ 12$$

よって，点 Q の x 座標は　12

$\triangle OAB:\triangle OPQ=AB:PQ$ であるから，求める面積の比は

$$\{3-(-2)\}:\{12-(-4)\}=5:16$$

$\boxed{25}$［明治大学付属明治］

解説

(1)　点 B の座標は　$(2,\ 1)$

$BD:DP:PC=1:3:4$ より　　$BP=PC$

よって，点 C の座標は　$(-2,\ 4a)$

また，$BD:DP=1:3$ より，点 D の x 座標は　$2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$

よって，点 D の座標は　$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4}a\right)$

点 B，D，C の y 座標について，$BD:BC=1:8$ であるから

$$\left(\frac{9}{4}a-1\right):(4a-1)=1:8$$

$$4a-1=18a-8$$

したがって　　$a=\dfrac{1}{2}$

(2)　点 C の座標は　$(-2,\ 2)$

よって，直線 ℓ の傾きは　$\dfrac{1-2}{2-(-2)}=-\dfrac{1}{4}$

したがって，直線 ℓ の式は $y=-\dfrac{1}{4}x+b$ とおけるから

$$2=\frac{1}{2}+b$$

$$b=\frac{3}{2}$$

よって，求める式は　$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$

(3)　$y=\dfrac{1}{4}x^2$ を $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$ に代入すると

$$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$$

$$x^2=-x+6$$

$$x^2+x-6=0$$

$$(x-2)(x+3)=0$$

$$x=2,\ -3$$

点 A の x 座標は -3 であるから

$$AP:CP=3:2$$

1 ［兵庫県］

解説

(1)　$x=3$，$y=3$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$3=a\times3^2$$

よって　$a=\frac{1}{3}$

(2)　$y=bx^2$ のグラフは，x 軸を対称の軸として $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフと線対称であるから

$$b=-\frac{1}{3}$$

(3)　$y=cx^2$ について，

$x=1$ のとき　$y=c\times1^2=c$

$x=3$ のとき　$y=c\times3^2=9c$

よって，変化の割合について

$$\frac{9c-c}{3-1}=2$$

$$4c=2$$

$$c=\frac{1}{2}$$

(4)　比例定数が正の数であるのは

$$y=\frac{1}{3}x^2,\ y=\frac{1}{2}x^2,\ y=dx^2$$

である。

$\frac{1}{2}<d$ であるから，$y=dx^2$ の開きぐあいが一番小さい。

よって，$y=dx^2$ のグラフが　ア

$y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフが　イ

$y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフが　ウ

である。

$y=-\frac{1}{3}x^2$ のグラフは，ウのグラフと x 軸を対称の軸として線対称であるから，オである。

$e<-\frac{1}{3}$ であるから，$y=ex^2$ の開きぐあいはオより小さい。

よって，$y=ex^2$ のグラフは　エ

したがって，$y=cx^2$ のグラフはイ，$y=ex^2$ のグラフはエである。

2

解説

値域に 0 を含むから，定義域も 0 を含む。

また，値域が $-2\leqq y\leqq0$ であるから，$x=a$ か $x=a+3$ のどちらかで $y=-2$ となる。

［1］　$x=a$ で $y=-2$ となる場合

$$-2=-\frac{1}{2}a^2$$

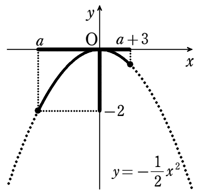
よって　$a^2=4$

したがって　$a=\pm2$

定義域を調べると

$a=2$ のとき，$2\leqq x\leqq5$ で適さない。

$a=-2$ のとき，$-2\leqq x\leqq1$ で適する。



［2］　$x=a+3$ で $y=-2$ となる場合

$$-2=-\frac{1}{2}(a+3)^2$$

$$(a+3)^2=4$$

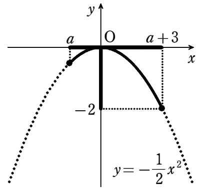
$$a+3=\pm2$$

よって　$a=-1,\ -5$

定義域を調べると

$a=-1$ のとき，$-1\leqq x\leqq2$ で適する。

$a=-5$ のとき，$-5\leqq x\leqq-2$ で適さない。



したがって，求める a の値は　$a=-2,\ -1$

3

解説

$y=-2x+b$ のグラフは右下がりの直線で

$x=-2$ のとき　$y=4+b$

$x=3$　のとき　$y=-6+b$

よって，$y=-2x+b$ $(-2\leqq x\leqq3)$ の値域は　$-6+b\leqq y\leqq4+b$

$y=ax^2$ について　$x=-2$ のとき　$y=4a$

$x=3$　のとき　$y=9a$

［1］　$a>0$ のとき

$y=ax^2$ $(-2\leqq x\leqq3)$ の値域は

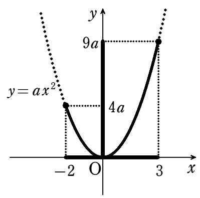
$$0\leqq y\leqq9a$$

よって，条件から

$$-6+b=0,\ 4+b=9a$$

これを解いて

$$a=\frac{10}{9},\ b=6$$



［2］　$a<0$ のとき

$y=ax^2$ $(-2\leqq x\leqq3)$ の値域は

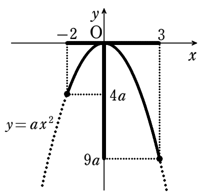
$$9a\leqq y\leqq0$$

よって，条件から

$$-6+b=9a,\ 4+b=0$$

これを解いて

$$a=-\frac{10}{9},\ b=-4$$



したがって

$$a=\frac{10}{9},\ b=6\ \text{または}\ a=-\frac{10}{9},\ b=-4$$

4

解説

(1)　$a=-1$ のとき，x の定義域は

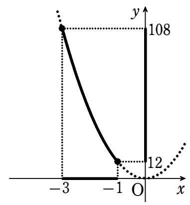
$-3\leqq x\leqq-1$

$x=-1$ のとき，$y=12\times(-1)^2=12$

$x=-3$ のとき，$y=12\times(-3)^2=108$

$y=12x^2(-3\leqq x\leqq-1)$ のグラフは，右の図のようになる。

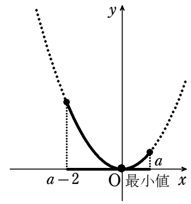
したがって，y の最小値は 12，最大値は 108



(2)　y の最小値が 0 になるのは，x の定義域に 0 を含むときで，右の図 のように，$a-2$ が 0 以下で，a が 0 以上であればよい。

すなわち　$a-2\leqq0$，$a\geqq0$

よって　$0\leqq a\leqq2$



(3)　$a\geqq1$ であるから　$a-2\geqq-1$

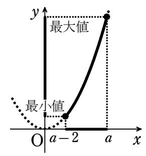
x の定義域に 0 を含む場合と含まない場合に分けて考える。

［1］　$a>2$ のとき

$y=12x^2$ $(a-2\leqq x\leqq a)$ のグラフは右の図のようになる。

よって，$x=a$ で最大値 $12a^2$，

$x=a-2$ で最小値 $12(a-2)^2$ をとる。



よって，$12a^2-12(a-2)^2=36$ とおくと

$$12a^2-12a^2+48a-48=36$$

$$48a=84$$

$$a=\frac{7}{4}$$

これは，$a>2$ を満たさないから適さない。

［2］　$1\leqq a\leqq2$ のとき

$y=12x^2$ $(a-2\leqq x\leqq a)$ のグラフは右の図のようになる。

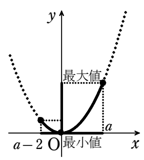
よって，最小値は 0 である。

また，$x=a$ で最大値 $12a^2$ をとる。

よって，$12a^2-0=36$ とおくと

$$a^2=3$$

$$a=\pm\sqrt{3}$$



$1\leqq a\leqq2$ であるから　$a=\sqrt{3}$

したがって，求める a の値は　$a=\sqrt{3}$

5

解説

放物線と直線の共有点がただ1つになるためには，放物線の式と直線の式を連立方程式と考えて y を消去した x の2次方程式が

$$(ax+b)^2=0$$

の形になればよい。

2つの式から y を消去すると

$$x^2=8x+m$$

よって　$x^2-8x-m=0$　……①

一方　$(x-4)^2=x^2-8x+16$ である。

すなわち　$x^2-8x=(x-4)^2-16$

これを利用して①の左辺を変形すると

$$(x-4)^2-16-m=0$$

ゆえに，$-16-m=0$ となればよい。

したがって　$m=-16$

別解　判別式の考えを使って，次のように解いてもよい。

2次方程式①の判別式を D とすると

$$D=(-8)^2-4\times1\times(-m)=64+4m$$

①の実数解がただ1つであるとき　$D=0$

すなわち　$64+4m=0$　　これを解いて　$m=-16$

6［滝川］

解説

(1)　A，B は放物線 $y=ax^2$ 上にあるから，A の座標は $(4,\ 16a)$，B の座標は $(-2,\ 4a)$ である。

直線 AB の傾きについて

$$\frac{16a-4a}{4-(-2)}=\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{4}$$

(2)　点 A の座標は $(4,\ 4)$，点 B の座標は $(-2,\ 1)$ であり，直線 AB の式は $y=\frac{1}{2}x+b$ とおける。

$y=\frac{1}{2}x+b$ に $x=4$，$y=4$ を代入すると

$$4=\frac{1}{2}\times4+b$$

$$b=2$$

よって，直線 AB の式は　$y=\frac{1}{2}x+2$

(3)　直線 AB と y 軸の交点を C とすると　OC$=2$

よって　$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OBC}$

$$=\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times2\times2$$

$$=6$$

7［常磐大学］

解説

(1)　$x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y=\frac{1}{2}\times4^2=8$$

よって，点 B の座標は　$(4,\ 8)$

$x=4$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$y=a\times4^2=16a$$

よって，点 C の座標は　$(4,\ 16a)$

BC$=14$ であるから

$$8-16a=14$$

$$a=-\frac{3}{8}$$

(2)　$x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$$

よって，点 A の座標は　$(-2,\ 2)$

直線 AP が線分 BC の中点を通るとき，この直線は △ABC の面積を2等分する。

線分 BC の中点の座標は

$$\left(4,\ 8-\frac{14}{2}\right)$$　すなわち　$(4,\ 1)$

直線 AP の式を $y=mx+n$ とおくと

$$2=-2m+n$$

$$1=4m+n$$

これを解いて　$m=-\frac{1}{6}$，$n=\frac{5}{3}$

したがって，直線 AP の式は　$y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{3}$

この式に $y=0$ を代入すると

$$0=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{3}$$

$$x=10$$

よって，点 P の座標は　$(10,\ 0)$

8［成蹊］

解説

(1)　点 A は関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあるから，$y=ax^2$ に $x=-4$，$y=12$ を代入すると

$$12=a\times(-4)^2$$

$$a=\frac{3}{4}$$

(2)　点 B は関数 $y=\frac{3}{4}x^2$ のグラフ上にあるから，$y=\frac{3}{4}x^2$ に $x=1$ を代入すると

$$y=\frac{3}{4}$$

よって，点 B の座標は　$\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$

直線 AB の傾きは

$$\left(\frac{3}{4}-12\right)\div\{1-(-4)\}=-\frac{45}{4}\div5$$

$$=-\frac{9}{4}$$

点 C の y 座標を c とすると，直線 AB の式は $y=-\frac{9}{4}x+c$ とおける。

この式に $x=-4$，$y=12$ を代入すると

$$12=9+c$$

$$c=3$$

よって，点 C の座標は　$(0,\ 3)$

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OBC}$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1$$

$$=\frac{15}{2}$$

(4)　直線 OA の傾きは $-\frac{12}{4}=-3$ であるから，直線 OA の式は　$y=-3x$

求める直線と OA の交点 D の座標を $(d,\ -3d)$ とする。

$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{3}{2}$ であるから

$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{15}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

よって　$\frac{1}{2}\times3\times(-d)=\frac{9}{4}$

$$-d=\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}$$

$$d=-\frac{3}{2}$$

点 D の座標は　$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

直線 CD の傾きは　$\left(3-\frac{9}{2}\right)\div\left\{0-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=-1$

したがって，直線 CD の式は　$y=-x+3$

$\boxed{9}$［桃山学院］

解説

(1)　$y=x^2$ を $y=2x+8$ に代入すると

$$x^2=2x+8$$
$$x^2-2x-8=0$$
$$(x-4)(x+2)=0$$
$$x=-2,\ 4$$

よって，点Aの x 座標は -2，点Bの x 座標は4である。

直線 $y=2x+8$ と y 軸との交点をCとすると

$$\triangle OAC=\frac{1}{2}\times8\times2=8$$
$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times8\times4=16$$

したがって　$\triangle AOB=8+16=24$

(2)　点Aの座標は $(-2,\ 4)$，点Bの座標は $(4,\ 16)$ である。

直線OBの式は　$y=\frac{16}{4}x$　すなわち　$y=4x$

$x=2$ を $y=4x$ に代入すると

$$y=4\times2=8$$

よって，点Qの座標は　$(2,\ 8)$

$x=2$ を $y=2x+8$ に代入すると

$$y=2\times2+8=12$$

よって，点Pの座標は　$(2,\ 12)$

したがって　$\triangle PQB=\frac{1}{2}\times(12-8)\times(4-2)=4$

(3)　求める点Pの x 座標を t とする。

点Pの y 座標は $2t+8$，点Qの y 座標は $4t$ であるから

$$PQ=2t+8-4t=8-2t$$

よって，$\triangle PBQ$ の面積について

$$\frac{1}{2}\times(8-2t)\times(4-t)=24\div2$$
$$(t-4)^2=12$$
$$t-4=\pm2\sqrt{3}$$
$$t=4\pm2\sqrt{3}$$

$0<t<4$ であるから　$t=4-2\sqrt{3}$

したがって，求める点Pの x 座標は　$4-2\sqrt{3}$

$\boxed{10}$［東北学院］

解説

(1)　点A，Bの座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ y=x+6 \end{cases}$ の解であるから，これを解くと

$$\frac{1}{3}x^2=x+6$$
$$x^2-3x-18=0$$
$$(x+3)(x-6)=0$$
$$x=-3,\ 6$$

$x=-3$ のとき　$y=-3+6=3$

$x=6$　のとき　$y=6+6=12$

よって，点Aの座標は $(-3,\ 3)$，点Bの座標は $(6,\ 12)$

(2)　$\triangle AOB=\triangle APB$ となるとき，$AB /\!/ OP$ である。

直線ABの傾きは1であるから，直線OPの式は　$y=x$

連立方程式 $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ y=x \end{cases}$ を解くと

$$\frac{1}{3}x^2=x$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$
$$x=0,\ 3$$

$x=0$ のとき $y=0$，$x=3$ のとき $y=3$

点Pは原点とは異なる点であるから，点Pの座標は $(3,\ 3)$

(3)　四角形OPBAの面積は

$$\triangle OAP+\triangle BAP=\frac{1}{2}\times\{3-(-3)\}\times3+\frac{1}{2}\times\{3-(-3)\}\times(12-3)$$
$$=9+27$$
$$=36$$

求める直線と直線ABの交点をQとすると

$$\triangle QAP=\frac{36}{2}-\triangle OAP=18-9$$
$$=9$$

点Qの座標を $(q,\ q+6)$ とおくと

$$\frac{1}{2}\times6\times\{(q+6)-3\}=9$$
$$3(q+3)=9$$
$$q+3=3$$
$$q=0$$

よって，点Qの座標は $(0,\ 6)$ であるから，直線PQの式は

$$y=\frac{3-6}{3-0}x+6$$

すなわち　$y=-x+6$

$\boxed{11}$［茨城県］

解説

(1)　$a\times2^2=4a$，$-\frac{1}{2}\times(-2)^2=-2$ より，2点A，Bの座標はそれぞれ $A(2,\ 4a)$，$B(-2,\ -2)$ である。

よって，直線ABの傾きは　$\frac{4a-(-2)}{2-(-2)}=a+\frac{1}{2}$

また，2点C，Dの座標はそれぞれ $C(4,\ 0)$，$D(8,\ 12)$ であるから，直線CDの傾きは　$\frac{12-0}{8-4}=3$

四角形ABCDは平行四辺形であるから　$AB /\!/ DC$

よって　$a+\frac{1}{2}=3$

$$a=\frac{5}{2}$$

(2)　平行四辺形の面積を2等分する直線は，平行四辺形の2本の対角線の交点を通る。

2本の対角線の交点は，線分ACの中点である。

その座標をFとすると，A，Cの座標はそれぞれ $(2,\ 10)$，$(4,\ 0)$ であるから，

$\frac{2+4}{2}=3$，$\frac{10+0}{2}=5$ より，Fの座標は $(3,\ 5)$ となる。

求める直線の式は，2点E，Fを通る。

その傾きは $\frac{9-5}{7-3}=1$ であるから直線EFの式は $y=x+b$ と表せる。

$y=x+b$ に，$x=3$，$y=5$ を代入すると

$$5=3+b$$
$$b=2$$

よって，求める直線の式は　$y=x+2$

$\boxed{12}$［滝］

解説

(1)　$x=-4$，$y=8$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$8=a\times(-4)^2$$

よって　$a=\frac{1}{2}$

(2)　$y=\frac{1}{2}x^2$ を $y=x+4$ に代入すると

$$\frac{1}{2}x^2=x+4$$
$$x^2-2x-8=0$$
$$(x+2)(x-4)=0$$
$$x=-2,\ 4$$

$x=-2$ を $y=x+4$ に代入すると　$y=-2+4=2$

$x=4$　を $y=x+4$ に代入すると　$y=4+4=8$

よって，点Aの座標は　$(-2,\ 2)$

点Bの座標は　$(4,\ 8)$

(3)　直線 $y=x+4$ と y 軸との交点をCとすると

$$OC=4$$

$\triangle OAB=\triangle OAC+\triangle OBC$ であるから

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times2+\frac{1}{2}\times4\times4=12$$

(4)　線分OCの中点をDとすると

$$\triangle DAB=\frac{1}{2}\triangle OAB$$

よって，点Dを通り直線ABに平行な直線と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ との交点が点Pである。

この直線の式は　$y=x+2$

$y=\frac{1}{2}x^2$ を $y=x+2$ に代入すると

$$\frac{1}{2}x^2=x+2$$
$$x^2-2x-4=0$$
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}=1\pm\sqrt{5}$$

これは問題に適している。

したがって，点 P の x 座標は　$1\pm\sqrt{5}$

$\boxed{13}$

（解説）

(1)　点 A の y 座標は　$y=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=1$

よって，点 A の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

点 B の y 座標は　$y=\dfrac{1}{2}\times2^2=2$

よって，点 B の座標は　$(2,\ 2)$

直線 AB の式を $y=ax+b$ とおくと　$1=\dfrac{1}{2}a+b$，　$2=2a+b$

これを解いて　$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$

したがって，直線 AB の式は　$y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$

(2)　点 C の x 座標は，方程式 $4x^2=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$ の解のうち $\dfrac{1}{2}$ でない方である。

$$4x^2=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

$$6x^2-x-1=0$$

$$(3x+1)(2x-1)=0$$

よって　$x=-\dfrac{1}{3}$　　このとき　$y=4\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

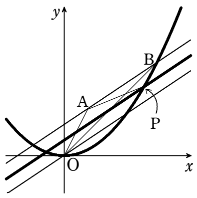
したがって，点 C の座標は　$\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{9}\right)$

(3)　直線 AB の y 切片は $\dfrac{2}{3}$ であるから

$$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times2-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(4)　△AOB の面積は $\dfrac{1}{2}$ であるから，△APB の面積は △AOB の面積の半分である。

よって，AB を底辺と考えたときの △APB の高さが，△AOB の高さの半分になればよい。



直線 AB は，傾きが $\dfrac{2}{3}$，y 切片が $\dfrac{2}{3}$ の直線である。

よって，点 P は，傾きが $\dfrac{2}{3}$，y 切片が $\dfrac{1}{3}$ の直線と放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ との交点のうち，x 座標が 0 より大きく 2 より小さいものである。

傾きが $\dfrac{2}{3}$，y 切片が $\dfrac{1}{3}$ の直線の式は　$y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$

よって，点 P の x 座標は，方程式 $\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$ の解のうち，0 より大きく 2 より小さいものである。

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$3x^2-4x-2=0$$

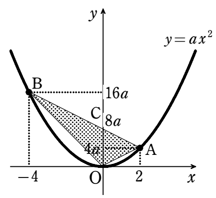
これを解いて　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times(-2)}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{3}$

したがって，点 P の x 座標は　$\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$

$\boxed{14}$

（解説）

(1)　点 A，B はともに放物線 $y=ax^2$ 上にあるから，その座標は　A $(2,\ 4a)$，B $(-4,\ 16a)$



直線 AB は，傾きが $\dfrac{4a-16a}{2-(-4)}=-2a$ であるから，

式を $y=-2ax+b$ とおくと，点 A を通るから

$$4a=-4a+b$$

$$b=8a$$

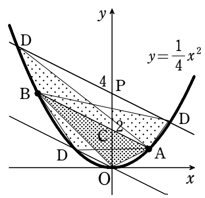
よって，直線 AB と y 軸の交点を C とすると，点 C の y 座標は　$8a$

△OAB の面積について

$$\frac{1}{2}\times8a\times2+\frac{1}{2}\times8a\times4=6$$

よって　$24a=6$　　したがって　$a=\dfrac{1}{4}$

(2)　(1)から，直線 AB の式は　$y=-\dfrac{1}{2}x+2$



点 O を通り，直線 AB に平行な直線 $y=-\dfrac{1}{2}x$ と，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の交点を D とすると，

△DAB＝△OAB である。

このとき，点 D の x 座標は $\dfrac{1}{4}x^2=-\dfrac{1}{2}x$ の解で表される。

よって　$x^2+2x=0$

これを解くと　$x=0,\ -2$

点 D の x 座標は 0 以外であるから　$x=-2$

また，y 軸上に OC＝PC となる点 P$(0,\ 4)$ をとると，△PAB＝△OAB であるから，点 P を通り，直線 AB に平行な直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の交点を D とすると，△DAB＝△OAB である。

このとき，点 D の x 座標は $\dfrac{1}{4}x^2=-\dfrac{1}{2}x+4$ の解で表される。

よって　$x^2+2x-16=0$

これを解くと

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-16)}}{2\times1}=-1\pm\sqrt{17}$$

したがって，点 D の x 座標は　-2，$-1\pm\sqrt{17}$

$\boxed{15}$

（解説）

(1)　放物線 $y=ax^2$ は点 A$(-2,\ 1)$ を通るから　$1=a\times(-2)^2$

よって　$a=\dfrac{1}{4}$　（答）

(2)　点 B の y 座標は　$y=\dfrac{1}{4}\times6^2=9$

よって，点 B の座標は　$(6,\ 9)$

直線 ℓ の式を $y=mx+n$ とおく。

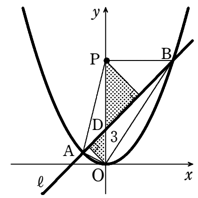
点 A$(-2,\ 1)$ を通るから　$1=-2m+n$　…… ①

点 B$(6,\ 9)$ を通るから　$9=6m+n$　…… ②

①，② を解いて　$m=1$，$n=3$

したがって，直線 ℓ の式は　$y=x+3$　（答）

(3)　直線 ℓ と y 軸の交点を D とすると，D の y 座標は 3 である。



△PAB と △OAB は辺 AB が共通であるから，面積の比は底辺 AB に対する高さの比に等しい。

右の図で影をつけた 2 つの三角形は相似であるから，底辺 AB に対する高さの比は，DP : OD と等しい。

よって，△PAB : △OAB＝2 : 1 のとき

DP : OD＝2 : 1

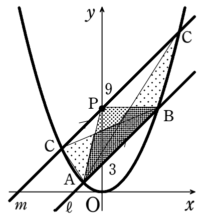
OD＝3 であるから　DP : 3＝2 : 1

したがって　DP＝6

P は原点より上側にあるから，P の y 座標は

$3+6=9$　（答）

(4)　△CAB＝△PAB となるのは，底辺 AB に対する高さが等しいときである。



したがって，点 C は，点 P を通り直線 ℓ に平行な直線 m と放物線の交点である。

(2)，(3)から，直線 m の式は $y=x+9$ と表される。

よって，点 C の x 座標は，方程式 $\dfrac{1}{4}x^2=x+9$ の解で表される。

よって　$x^2-4x-36=0$

これを解くと　$x=2\pm2\sqrt{10}$

$x=2-2\sqrt{10}$ のとき　$y=2-2\sqrt{10}+9=11-2\sqrt{10}$

$x=2+2\sqrt{10}$ のとき　$y=2+2\sqrt{10}+9=11+2\sqrt{10}$

したがって，点 C の座標は

$(2-2\sqrt{10},\ 11-2\sqrt{10})$，$(2+2\sqrt{10},\ 11+2\sqrt{10})$　（答）

$\boxed{16}$

(解説)

(1)　放物線 $y=ax^2$ は点 A $(-1,\ 2)$ を通るから　　$2=a\times(-1)^2$

よって　　$a=2$

(2)　$y=2x^2$ について

$x=2$ のとき　$y=2\times2^2=8$

よって，点 B の座標は　$(2,\ 8)$

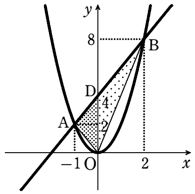
直線 AB の式を $y=px+q$ とおくと

$2=-p+q,\ 8=2p+q$

これを解くと　　$p=2,\ q=4$

したがって，直線 AB の式は　　$y=2x+4$

(3)　直線 AB と y 軸の交点を D とする。



直線 AB の y 切片は 4 であるから，点 D の座標は

$(0,\ 4)$

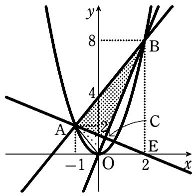
したがって

$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAD}+\triangle\mathrm{OBD}$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times1+\dfrac{1}{2}\times4\times2$

$=2+4=6$

(4)　点 $(2,\ 0)$ を E とする。



直線 AE の式を $y=mx+n$ とおくと

$2=-m+n,$

$0=2m+n$

これを解くと　$m=-\dfrac{2}{3},\ n=\dfrac{4}{3}$

よって，直線 AE の式は

$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$

また，直線 OB の式は　　$y=4x$

この 2 直線の交点 C の x 座標は，$-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}=4x$ を解いて　　$x=\dfrac{2}{7}$

$\triangle$OAC と $\triangle$ABC は，底辺をそれぞれ OC，CB とみると，高さが等しいから

$\triangle\mathrm{OAC}:\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{OC}:\mathrm{CB}$

$\mathrm{OC}:\mathrm{OB}=\dfrac{2}{7}:2=1:7$ であるから　　$\mathrm{OC}:\mathrm{CB}=1:6$

よって　　$\triangle\mathrm{OAC}:\triangle\mathrm{ABC}=1:6$

$\boxed{17}$［芝浦工業大学柏］

(解説)

(1)　$x=4$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると

$y=\dfrac{1}{2}\times4^2=8$

よって，点 A の座標は　$(4,\ 8)$

$x=-2$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると

$y=\dfrac{1}{2}\times(-2)^2=2$

よって，点 B の座標は　$(-2,\ 2)$

したがって，直線 AB の傾きは $\dfrac{8-2}{4-(-2)}=1$ であるから，その式は

$y=x+b$

とおける。

$x=4,\ y=8$ を $y=x+b$ に代入すると

$8=4+b$

$b=4$

よって，直線 AB の切片は　4

(2)　$x=3$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると

$y=\dfrac{1}{2}\times3^2=\dfrac{9}{2}$

よって，点 P の座標は　$\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

したがって，直線 BP の傾きは $\left(\dfrac{9}{2}-2\right)\div\{3-(-2)\}=\dfrac{1}{2}$ であるから，その式は

$y=\dfrac{1}{2}x+b'$

とおける。

$x=-2,\ y=2$ を $y=\dfrac{1}{2}x+b'$ に代入すると

$2=\dfrac{1}{2}\times(-2)+b'$

$b'=3$

よって，直線 BP の式は　$y=\dfrac{1}{2}x+3$

直線 OA の傾きは $\dfrac{8}{4}=2$ であるから，その式は　$y=2x$

$y=2x$ を $y=\dfrac{1}{2}x+3$ に代入すると

$2x=\dfrac{1}{2}x+3$

$x=2$

したがって，点 Q の x 座標は 2 であるから，3 点 B，Q，P のそれぞれの x 座標に注目すると

$\mathrm{BQ}:\mathrm{QP}=\{2-(-2)\}:(3-2)=4:1$

(3)　点 P を通り y 軸に平行な直線をひき，直線 AB との交点を C とする。

$x=3$ を $y=x+4$ に代入すると

$y=3+4=7$

よって　　$\mathrm{CP}=7-\dfrac{9}{2}=\dfrac{5}{2}$

$\triangle\mathrm{ABP}=\triangle\mathrm{BCP}+\triangle\mathrm{ACP}$ であるから

$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\{4-(-2)\}=\dfrac{15}{2}$

(4)　点 P を通り y 軸に平行な直線をひき，直線 OA との交点を D とする。

点 P の y 座標は $\dfrac{1}{2}p^2$，点 D の y 座標は $2p$ であるから

$\mathrm{DP}=2p-\dfrac{1}{2}p^2$

よって，$\triangle$AOP の面積について

$\dfrac{1}{2}\times\left(2p-\dfrac{1}{2}p^2\right)\times4=\dfrac{7}{4}$

$4p-p^2=\dfrac{7}{4}$

$4p^2-16p+7=0$

$p=\dfrac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\times4\times7}}{2\times4}$

$=\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}$

$\boxed{18}$

(解説)

(1)　$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{PQO}$ となるとき，$\triangle$PQO は PQ＝PO である二等辺三角形となる。

点 P は線分 OQ の垂直二等分線上にあるから，P の y 座標は $\dfrac{3}{2}$ である。

したがって，点 P の x 座標は，方程式 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}x^2$ の解である。

整理すると　$x^2=3$

P の x 座標は正であるから　$x=\sqrt{3}$

よって，点 P の座標は　$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$

(2)　線分 OR の傾きは　$-\dfrac{1}{2}$

OR∥PQ であるから，直線 PQ は，傾きが $-\dfrac{1}{2}$，y 切片が 3 の直線である。

直線 PQ の式は　　$y=-\dfrac{1}{2}x+3$

したがって，点 P の x 座標は，方程式 $\dfrac{1}{2}x^2=-\dfrac{1}{2}x+3$ の解である。

整理すると　$x^2+x-6=0$

$(x-2)(x+3)=0$

P の x 座標は正であるから　$x=2$

このとき

(台形 OPQR の面積)＝$\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{OQR}$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times2+\dfrac{1}{2}\times3\times1$

$=\dfrac{9}{2}$

$\boxed{19}$［四天王寺］

解説

(1)　$x=-4$，$y=2$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$2=a\times(-4)^2$$

よって　$a=\dfrac{1}{8}$

$x=8$，$y=b$ を $y=\dfrac{1}{8}x^2$ に代入すると

$$b=\frac{1}{8}\times 8^2$$

よって　$b=8$

直線 AB の傾きは　$\dfrac{8-2}{8-(-4)}=\dfrac{1}{2}$

したがって，直線 AB の式は　$y=\dfrac{1}{2}x+c$

$x=8$，$y=8$ を $y=\dfrac{1}{2}x+c$ に代入すると

$$8=\frac{1}{2}\times 8+c$$

よって　$c=4$

(2)　点 Q の座標は $\left(p,\ \dfrac{1}{8}p^2\right)$ であるから

$$\triangle OQC=\frac{1}{2}\times 4\times p=2p \quad \cdots\cdots ①$$

$$\triangle ODQ=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{1}{8}p^2=\frac{1}{2}p^2 \quad \cdots\cdots ②$$

$\triangle OQC=\triangle ODQ$ のとき

$$2p=\frac{1}{2}p^2$$

$$p(p-4)=0$$

$0<p<8$ であるから　$p=4$

(3)　台形 OCBD の面積は　$\dfrac{1}{2}\times(4+8)\times 8=48$

また　$\triangle BQD=\dfrac{1}{2}\times 8\times(8-p)=4(8-p)$

①，② より　$\triangle CQB=48-\left\{4(8-p)+2p+\dfrac{1}{2}p^2\right\}$

$$=-\frac{1}{2}p^2+2p+16$$

$\triangle ODQ=\triangle CQB$ のとき

$$\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}p^2+2p+16$$

$$p^2-2p-16=0$$

$$p=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-16)}}{2\times1}=1\pm\sqrt{17}$$

$0<p<8$ であるから　$p=1+\sqrt{17}$

$\boxed{20}$［明星］

解説

(1)　$x=4$ を $y=-x+8$ に代入すると

$$y=-4+8=4$$

よって，点 A の座標は　(4，4)

$x=4$，$y=4$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$4=a\times 4^2$$

したがって　$a=\dfrac{1}{4}$

また，$x=4$，$y=4$ を $y=\dfrac{1}{2}x+b$ に代入すると

$$4=\frac{1}{2}\times 4+b$$

したがって　$b=2$

(2)　$y=\dfrac{1}{4}x^2$ を $y=\dfrac{1}{2}x+2$ に代入すると

$$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x+2$$

$$x^2-2x-8=0$$

$$(x-4)(x+2)=0$$

$$x=4,\ -2$$

よって，点 B の x 座標は -2 であるから，$x=-2$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると

$$y=\frac{1}{4}\times(-2)^2=1$$

したがって，点 B の座標は　$(-2,\ 1)$

(3)　点 R の座標は　$(t,\ -t+8)$，点 Q の座標は　$\left(t,\ \dfrac{1}{2}t+2\right)$

よって　$RQ=(-t+8)-\left(\dfrac{1}{2}t+2\right)=-\dfrac{3}{2}t+6$

また，直線 ② の切片は 2，直線 ③ の切片は 8 であるから

$$DC=8-2=6$$

したがって，台形 DCQR の面積について

$$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}t+6+6\right)\times t=3$$

$$-\frac{3}{4}t^2+6t=3$$

$$t^2-8t+4=0$$

解の公式により　$t=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times4}}{2\times1}$

$$=4\pm2\sqrt{3}$$

$0<t<4$ であるから　$t=4-2\sqrt{3}$

(4)　点 P の座標は　$\left(t,\ \dfrac{1}{4}t^2\right)$ であるから

$$QP=\frac{1}{2}t+2-\frac{1}{4}t^2$$

よって　$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}t+2-\dfrac{1}{4}t^2\right)\times\{4-(-2)\}$

$$=-\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{2}t+6$$

台形 DCQR の面積と $\triangle ABP$ の面積が等しいとき

$$-\frac{3}{4}t^2+6t=-\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{2}t+6$$

$$\frac{9}{2}t=6$$

したがって　$t=\dfrac{4}{3}$

1 ［城北］

解説

(1)　$x=-3$，$y=3$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$3=a\times(-3)^2$$

よって　$a=\frac{1}{3}$

(2)　点 P の座標は $(t,\ t)$ とおけるから

$$t=\frac{1}{3}t^2$$

$$t(t-3)=0$$

$t>0$ であるから　$t=3$

よって，点 P の座標は　$(3,\ 3)$

(3)　点 Q の x 座標を s とすると，y 座標は　$s+3\times2=s+6$

よって　$s+6=\frac{1}{3}s^2$

$$s^2-3s-18=0$$

$$(s+3)(s-6)=0$$

$s>0$ であるから　$s=6$

よって，点 Q の座標は　$(6,\ 12)$

ℓ と y 軸の交点を R とする。

y 軸と ℓ は，2 つの円に接するから，3 点 R，P，Q は一直線上にある。

直線 PQ の式を $y=mx+n$ とすると

$$3=3m+n$$

$$12=6m+n$$

これを解くと　$m=3$，$n=-6$

したがって，直線 PQ の式は　$y=3x-6$

$\triangle OPQ=\triangle ORQ-\triangle ORP$ であるから

$$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times6\times(6-3)=9$$

(4)　(3) より，ℓ の切片は　-6

2 ［東大寺学園］

解説

(1)　$P(p,\ 0)$，$A(a,\ ka^2)$，$B(3,\ 9k)$，$C(5,\ 25k)$

$PA/\!/BC$，$PA=BC$ より

$$\begin{cases} a-p=5-3 & \cdots\cdots ① \\ ka^2=25k-9k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② より　$ka^2=16k$

$k>0$ より　$a^2=16$

$a<0$ より　$a=-4$

① より　$p=-6$

(2)　$P(-6,\ 0)$，$A(-4,\ 16k)$ より，直線 PA の式は，$y=8kx+48k$ と表される。

$y=kx^2$ との交点の x 座標は，$kx^2=8kx+48k$ の解で表されるから，$k>0$ より

$$x^2=8x+48$$

$$x^2-8x-48=0$$

$$(x+4)(x-12)=0$$

$x\neq-4$ より　$x=12$

よって，点 D の x 座標は　12

(3)　点 B を通り，y 軸に平行な直線と直線 AC との交点を E，点 C を通り，y 軸に平行な直線と直線 AD との交点を F とする。

直線 AC の式は $y=kx+20k$ であるから，E の座標は　$(3,\ 23k)$

(2) より，F の座標は　$(5,\ 88k)$

$$(\text{四角形 }ABCD)=\triangle ABC+\triangle ACD$$

$$=\frac{1}{2}\times14k\times(4+5)+\frac{1}{2}\times63k\times(12+4)$$

$$=567k$$

条件より　$567k=504$

$$k=\frac{8}{9}$$

3 ［東京都立高］

解説

(1)　$x=-3$，$y=-3$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$-3=a\times(-3)^2$$

$$a=-\frac{1}{3}$$

よって　$y=-\frac{1}{3}x^2$

点 B の x 座標は 2 であるから，$x=2$ を $y=-\frac{1}{3}x^2$ に代入すると

$$y=-\frac{1}{3}\times2^2=-\frac{4}{3}$$

したがって，直線 OB の傾きは　$-\frac{4}{3}\div2=-\frac{2}{3}$

よって，求める式は　$y=-\frac{2}{3}x$

(2)　$y=\frac{25}{2}$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}x^2$$

$$x^2=25$$

$x<0$ であるから　$x=-5$

よって，点 P の座標は　$\left(-5,\ \frac{25}{2}\right)$

$x=2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y=\frac{1}{2}\times2^2=2$$

よって，点 A の座標は　$(2,\ 2)$

直線 ℓ と x 軸との交点を A′ とすると，四角形 OA′AP の面積は

$$\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{25}{2}\right)\times(2+5)-\frac{1}{2}\times5\times\frac{25}{2}=\frac{39}{2}\ (\text{cm}^2)$$

$x=2$ を $y=ax^2$ に代入すると　$y=a\times2^2=4a$

△OA′B の面積は $\frac{45}{2}-\frac{39}{2}=3\ (\text{cm}^2)$ であるから

$$\frac{1}{2}\times(-4a)\times2=3$$

$$-4a=3$$

$$a=-\frac{3}{4}$$

(3)　$x=2$ を $y=-\frac{1}{4}x^2$ に代入すると　$y=-\frac{1}{4}\times2^2=-1$

よって，点 B の座標は　$(2,\ -1)$

直線 OA の傾きは $\frac{2}{2}=1$ であるから，その式は　$y=x$

点 Q は直線 OA 上にあるから，その座標は $(t,\ t)$ とおける。

$x=t$，$y=t$ を $y=-\frac{1}{4}x^2$ に代入すると

$$t=-\frac{1}{4}t^2$$

$$t(t+4)=0$$

$t<0$ であるから　$t=-4$

よって，点 Q の座標は　$(-4,\ -4)$

$x=-4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると　$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=8$

よって，点 P の座標は　$(-4,\ 8)$

したがって　$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times\{8-(-4)\}\times\{2-(-4)\}=36\ (\text{cm}^2)$

$36\div2=18\ (\text{cm}^2)$ で，$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times12\times4=24\ (\text{cm}^2)$ であるから，n は線分 PQ と交わる。

この交点を R とすると　$\frac{1}{2}\times QR\times4=18$

$$QR=9\ \text{cm}$$

よって，点 R の座標は　$(-4,\ 5)$

したがって，n の傾きは $-\frac{5}{4}$ であるから，その式は　$y=-\frac{5}{4}x$

n と ℓ との交点を S とする。

$x=2$ を $y=-\frac{5}{4}x$ に代入すると　$y=-\frac{5}{4}\times2=-\frac{5}{2}$

よって，点 S の 座標は　$\left(2,\ -\frac{5}{2}\right)$

したがって　$BS=-1-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\ (\text{cm})$

$RQ/\!/BS$ より，$QC:CB=RQ:BS$ であるから

$$QC:CB=9:\frac{3}{2}=6:1$$

$\triangle OQC:\triangle OCB=QC:CB$ であるから

$$\triangle OQC:\triangle OCB=6:1$$

よって，△OQC の面積は，△OCB の面積の 6 倍である。

$\boxed{4}$［大阪星光学院］

解説

(1)　点 A は放物線 $y=x^2$ 上にあるから，$y=x^2$ に $x=1$ を代入すると

$y=1$

よって，点 A の座標は $(1,\ 1)$，点 B の座標は $(-1,\ 1)$ である。

直線 AC の式は $y=-x+b$ とおける。

$y=-x+b$ に $x=1$，$y=1$ を代入すると

$1=-1+b$

$b=2$

よって，直線 AC の式は　$y=-x+2$

直線 AB，AD，AC と y 軸の交点をそれぞれ B′，D′，C′ とする。

△AB′C′ において AC の傾きが -1，AB′$=1$ であるから　AC′$=\sqrt{2}$

∠CAD＝∠BAD より　C′D′：B′D′＝AC′：AB′＝$\sqrt{2}$：1

よって，点 D′ の y 座標は

$$1+1\times\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=1+\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$=\sqrt{2}$$

(2)　直線 AD の傾きは $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1-0}=1-\sqrt{2}$ であるから，直線 AD の式は

$y=(1-\sqrt{2})x+\sqrt{2}$

点 D の x 座標は $x^2=(1-\sqrt{2})x+\sqrt{2}$ の解として表されるから

$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x-1)(x+\sqrt{2})=0$

よって　$x=1,\ -\sqrt{2}$

点 D の x 座標は負であるから　$x=-\sqrt{2}$

y 座標は $x=-\sqrt{2}$ を $y=x^2$ に代入して

$y=2$

よって，点 D の座標は　$(-\sqrt{2},\ 2)$

(3)　点 C の x 座標は $x^2=-x+2$ の解として表されるから

$x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

よって　$x=1,\ -2$

$x\neq1$ より　$x=-2$

点 C の x 座標は -2 であるから，y 座標は　$(-2)^2=4$

したがって　△ACD＝△AC′D＋△CC′D

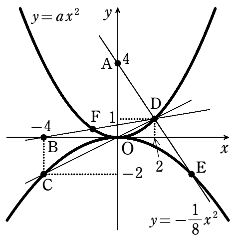
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times(2-1)+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times(4-2)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{5}$［慶應義塾女子］

解説



(1)　点 C は放物線 $y=-\dfrac{1}{8}x^2$ 上にあり，x 座標は -4 である。

よって，点 C の y 座標は　$-\dfrac{1}{8}\times(-4)^2=-2$

したがって，点 C の座標は　$(-4,\ -2)$

△AOD の面積が 4，OA の長さが 4 である。

点 D の x 座標を t とすると　　$\dfrac{1}{2}\times4\times t=4$

よって，$t=2$ である。

直線 CO の式は $y=\dfrac{1}{2}x$ であるから，点 D の y 座標は　$\dfrac{1}{2}\times2=1$

したがって，点 D の座標は　$(2,\ 1)$

(2)　直線 AD の式は，$y=-\dfrac{3}{2}x+4$ である。

よって，点 E の x 座標は，方程式　$-\dfrac{1}{8}x^2=-\dfrac{3}{2}x+4$　の解で表される。

この方程式を整理すると　$x^2-12x+32=0$

$(x-4)(x-8)=0$

$x=4$ または $x=8$ となるが，原点 O に近い方が点 E であるから　$x=4$

点 E の x 座標は 4 である。y 座標は　$-\dfrac{1}{8}\times4^2=-2$

したがって，点 E の座標は　$(4,\ -2)$

$y=ax^2$ の a の値を求める。

放物線 $y=ax^2$ は，点 D$(2,\ 1)$ を通るから　　$1=a\times2^2$

よって　　$a=\dfrac{1}{4}$

直線 BD の式は，$y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{2}{3}$ である。

よって，点 F の x 座標は，方程式　$\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{2}{3}$　の解で表される。

この方程式を整理すると　$3x^2-2x-8=0$

これを解いて　　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3\times(-8)}}{2\times3}=\dfrac{2\pm\sqrt{100}}{6}=\dfrac{2\pm10}{6}$

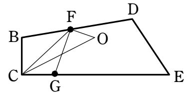
すなわち　　$x=2$ または $x=-\dfrac{4}{3}$

点 F は点 D と異なる点であるから　$x=-\dfrac{4}{3}$

点 F の x 座標は $-\dfrac{4}{3}$ である。y 座標は　$\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

したがって，点 F の座標は　$\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{9}\right)$

(3)　四角形 BCGF から △FCG を取り除き，△FCO を加えると，四角形 BCOF となる。



一方，四角形 FGED に △FCG を加えて，△FCO を取り除くと，五角形 FOCED となる。

よって，△FCG と △FOC の面積が等しければ

四角形 BCGF の面積と 四角形 BCOF の面積は等しい

かつ

四角形 FGED の面積と 五角形 FOCED の面積は等しい

ということになる。

このとき，　(四角形 BCGF)：(四角形 FGED)＝(四角形 BCOF)：(五角形 FOCED)

が成り立つ。

△FCG と △FOC の面積が等しくなるためには，FC と OG が平行であればよい。

直線 FC の傾きは　　$\left\{\dfrac{4}{9}-(-2)\right\}\div\left\{-\dfrac{4}{3}-(-4)\right\}=\dfrac{22}{9}\div\dfrac{8}{3}=\dfrac{11}{12}$

よって，直線 OG の式は，$y=\dfrac{11}{12}x$ である。

2 点 C，E の y 座標はともに -2 であるから，点 G の y 座標も -2 となる。

$-2=\dfrac{11}{12}x$ を満たす x は　$x=-\dfrac{24}{11}$

したがって，点 G の座標は　$\left(-\dfrac{24}{11},\ -2\right)$

6 ［東大寺学園］

解説

(1)　2 点 A，B の座標は，A $(-1,\ a)$，B $(5,\ 25a)$ であるから，直線 ℓ の傾きは

$$\frac{25a-a}{5-(-1)}=4a$$

直線 m は直線 ℓ と平行で，原点 O を通るから，直線 m の式は　$y=4ax$

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は，方程式 $ax^2=4ax$ の解で表される。

この方程式を解いて　$x=0$ または $x=4$

点 P は原点 O とは異なる点であるから，P の x 座標は　4

(2)　3 点 A，B，P の座標は，A $(-1,\ a)$，B $(5,\ 25a)$，P $(4,\ 16a)$ であるから

直線 AO の式は　$y=-ax$，　直線 BP の式は　$y=9ax-20a$

よって，点 Q の x 座標は，方程式 $-ax=9ax-20a$ の解で表される。

この方程式を解いて　$x=2$

したがって，点 Q の座標は　$(2,\ -2a)$

(3)　直線 AQ と直線 PR が垂直に交わるから，直線 OA と直線 OP も垂直に交わる。

2 点 A，P の座標は，A $(-1,\ a)$，P $(4,\ 16a)$ であるから

直線 OA の傾きは $\dfrac{0-a}{0-(-1)}=-a$，　直線 OP の傾きは $\dfrac{16a-0}{4-0}=4a$

よって，$(-a)\times 4a=-1$ より　$a^2=\dfrac{1}{4}$　　$a>0$ であるから　$a=\dfrac{1}{2}$

このとき，3 点 A，P，Q の座標は，A $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，P $(4,\ 8)$，Q $(2,\ -1)$ である。

放物線 $y=bx^2\ (b<0)$ は，点 Q を通るから　　$-1=4b$

これを解いて　$b=-\dfrac{1}{4}$　　これは，$b<0$ という条件を満たす。

点 R は，直線 OP 上にある。直線 OP の式は $y=2x$ であるから，R の座標は $(t,\ 2t)$ とおくことができる。

この点が，放物線 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ の上にあるから　　$2t=-\dfrac{1}{4}t^2$

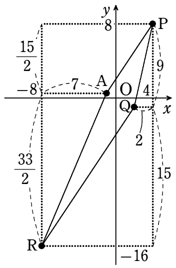
この方程式を解いて　　$t=0$ または $t=-8$

R は原点 O とは異なる点であるから　$t\fallingdotseq 0$

よって，$t=-8$ であるから，R の座標は　$(-8,\ -16)$

PR を対角線とする長方形から，2 つの台形と 2 つの直角三角形を取り除くと，四角形 APQR が残る。

この方針で四角形 APQR の面積を求める。



$$
\begin{aligned}
&24\times 12\\
&\quad -\frac{1}{2}\times(12+7)\times\frac{15}{2}-\frac{1}{2}\times 7\times\frac{33}{2}\\
&\quad -\frac{1}{2}\times 2\times 9-\frac{1}{2}\times(2+12)\times 15\\
&=288-\frac{285}{4}-\frac{231}{4}-9-105\\
&=45
\end{aligned}
$$

7 ［東京都立高］

解説

(1)　P の座標を $\left(p,\ \dfrac{1}{2}p^2\right)$ とおくと

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\times 8\times\left(8-\frac{1}{2}p^2\right)=2(4+p)(4-p)$$

$$\triangle\mathrm{BCP}=\frac{1}{2}\times 8\times(4-p)=4(4-p)$$

よって　$\triangle\mathrm{ABP}:\triangle\mathrm{BCP}=2(4+p)(4-p):4(4-p)=(4+p):2$

したがって　$\triangle\mathrm{ABP}:\triangle\mathrm{BCP}=3:8$

$$(4+p):2=3:8$$

$$p=-\frac{13}{4}$$

P の座標は $\left(-\dfrac{13}{4},\ \dfrac{169}{32}\right)$，B の座標は $(4,\ 8)$

直線 BP の傾きは $\left(8-\dfrac{169}{32}\right)\div\left\{4-\left(-\dfrac{13}{4}\right)\right\}=\dfrac{3}{8}$ であるから，直線 BP の式を

$y=\dfrac{3}{8}x+b$ とおくと，$(4,\ 8)$ を通るから

$$8=\frac{3}{8}\times 4+b$$

$$b=\frac{13}{2}$$

よって，直線 BP の式は　$y=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{13}{2}$

(2)　(ア)　Q の座標を $\left(q,\ \dfrac{1}{2}q^2\right)$ とおくと，R の座標は $\left(-q,\ \dfrac{1}{2}q^2\right)$

直線 m の傾きは　$\left(8-\dfrac{1}{2}q^2\right)\div(10-q)$

直線 n の傾きは　$\left(8-\dfrac{1}{2}q^2\right)\div(10+q)$

よって　$\left(8-\dfrac{1}{2}q^2\right)\div(10-q)=2\times\left(8-\dfrac{1}{2}q^2\right)\div(10+q)$

$$(10+q)=2\times(10-q)$$

$$q=\frac{10}{3}$$

したがって，R の座標は　$\left(-\dfrac{10}{3},\ \dfrac{50}{9}\right)$

(イ)　$\triangle\mathrm{ADR}:\triangle\mathrm{APQ}=7:5$ と $\triangle\mathrm{ADR}=\triangle\mathrm{ADQ}$ より　$\triangle\mathrm{ADQ}:\triangle\mathrm{APQ}=7:5$

$\triangle\mathrm{ADQ}:\triangle\mathrm{APQ}=\mathrm{DQ}:\mathrm{PQ}$ であるから　$\mathrm{DQ}:\mathrm{PQ}=7:5$

ここで，点 P を通り y 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を H，点 Q を通り y 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を K とする。

$\mathrm{DQ}:\mathrm{PQ}=\mathrm{DK}:\mathrm{HK}$ より　$\mathrm{DK}:\mathrm{HK}=7:5$

よって，点 Q の x 座標を t とすると，点 P の x 座標は

$$t-\frac{5}{7}(10-t)=\frac{2}{7}(6t-25)$$

点 P の y 座標は　$\dfrac{2}{49}(6t-25)^2$

$\mathrm{QK}:\mathrm{PH}=7:12$ であるから

$$\left(8-\frac{1}{2}t^2\right):\left\{8-\frac{2}{49}(6t-25)^2\right\}=7:12$$

整理すると　$t^2-20t+51=0$

$$(t-3)(t-17)=0$$

$0<t<4$ より　$t=3$

よって，点 Q の座標は　$\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

$\boxed{8}$ [東京都立高]

解説

(1)　点 A の y 座標が 1 であるから，点 P の y 座標も 1 であり，点 P は $y=x^2$ 上の点であるから，点 P の座標は $(1,\ 1)$ である。

また，点 B の座標は $(-1,\ 1)$ である。

点 P の座標は $(1,\ 1)$ で $k=\dfrac{1}{2}$ であるから，点 C の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$ であり，2 点 B，C を通る直線 m の傾きは

$$\left(\frac{9}{4}-1\right)\div\left\{\frac{3}{2}-(-1)\right\}=\frac{5}{4}\div\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$

(2)　(ア)　点 $\mathrm{P}(2,\ 4)$ であるから，点 B の座標は $(-2,\ 4)$ である。

$\triangle\mathrm{PCB}=\triangle\mathrm{QCB}$ より，$\mathrm{PQ}/\!/\mathrm{BC}$ であるから，直線 PQ の傾きは 2 である。直線 PQ の式は，$y=2x+b$ と表され，点 P を通るから，$y=2x$ となる。

また，点 $\mathrm{A}(2+k,\ 4)$ であるから，点 $\mathrm{C}(2+k,\ (2+k)^2)$ と表せられ，直線 m の傾きが 2 であるから

$$\mathrm{BA}:\mathrm{AC}=1:2$$
$$\mathrm{AC}=2\mathrm{BA}$$
$$(2+k)^2-4=2\{2+k-(-2)\}$$
$$4+4k+k^2-4=2(4+k)$$
$$k^2+4k=8+2k$$
$$k^2+2k-8=0$$
$$(k+4)(k-2)=0$$

よって　$k=-4,\ 2$

$k>0$ より　$k=2$

点 Q は $y=2x$ 上にあり，x 座標が 4 であるから 点 Q の座標は　$(4,\ 8)$

よって，2 点 $\mathrm{B}(-2,\ 4)$，$\mathrm{Q}(4,\ 8)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{8-4}{4-(-2)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$y=\dfrac{2}{3}x+c$ に $(-2,\ 4)$ を代入すると

$$4=-\frac{4}{3}+c$$
$$c=\frac{16}{3}$$

よって，求める直線の式は　$y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{16}{3}$

(イ)　点 P の座標を $(p,\ p^2)$ とすると，点 B の座標は $(-p,\ p^2)$，点 A の座標は $(p+k,\ p^2)$，点 C の座標は $(p+k,\ (p+k)^2)$ と表される。

直線 m の傾きが 1 であるから

$$\frac{(p+k)^2-p^2}{(p+k)-(-p)}=1$$
$$\frac{2pk+k^2}{2p+k}=1$$
$$k=1$$

また，点 Q は AC の中点であるから，その座標は　$\left(p+1,\ p^2+p+\dfrac{1}{2}\right)$

P，Q を通る直線の傾きが 2 であるから

$$\frac{p^2+p+\frac{1}{2}-p^2}{(p+1)-p}=2$$
$$p+\frac{1}{2}=2$$
$$p=\frac{3}{2}$$

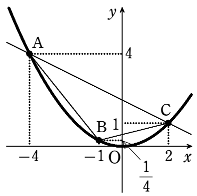
よって，点 A の座標は　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$

$\boxed{9}$ [ラ・サール]

解説

3 点 A，B，C の座標はそれぞれ　$\mathrm{A}(-4,\ 4)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ \dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{C}(2,\ 1)$　である。

(1)　直線 AC の傾きは　$\dfrac{1-4}{2-(-4)}=-\dfrac{1}{2}$



直線 AC の式を $y=-\dfrac{1}{2}x+k$ とおく。

$x=2$ のとき $y=1$ となるから　$1=-1+k$

よって，$k=2$ であるから，直線 AC の式は

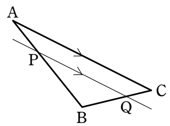
$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

(2)　辺 AC を含む台形から，辺 AB を含む台形，辺 BC を含む台形の 2 つを取り除けば，$\triangle\mathrm{ABC}$ が残る。

この方針で，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めると

$$\frac{1}{2}\times(4+1)\times\{2-(-4)\}-\frac{1}{2}\times\left(4+\frac{1}{4}\right)\times\{(-1)-(-4)\}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+1\right)\times\{2-(-1)\}$$
$$=15-\frac{51}{8}-\frac{15}{8}$$
$$=\frac{27}{4}$$

(3)　直線 AC に平行で，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を 2 等分する直線と辺 AB，辺 BC との交点を，それぞれ P，Q とする。

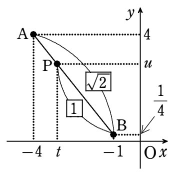


$\mathrm{AC}/\!/\mathrm{PQ}$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{PBQ}$ である。

$\triangle\mathrm{PBQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ となるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{PBQ}$ の相似比は $\sqrt{2}:1$ となる。

よって，$\mathrm{AB}:\mathrm{PB}=\sqrt{2}:1$ である。

点 P の座標を $(t,\ u)$ とする。



x 座標について

$$\{(-1)-(-4)\}:\{(-1)-t\}=\sqrt{2}:1$$
$$3:(-1-t)=\sqrt{2}:1$$

$\sqrt{2}(-1-t)=3$ より　$t=\dfrac{-3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2}$

y 座標について

$$\left(4-\frac{1}{4}\right):\left(u-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{2}:1$$

$\sqrt{2}\left(u-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{15}{4}$ より　$u=\dfrac{15+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{15\sqrt{2}+2}{8}$

点 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2},\ \dfrac{15\sqrt{2}+2}{8}\right)$ を通る傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線の式を求めればよい。

求める直線の式を $y=-\dfrac{1}{2}x+a$ とおくと　$\dfrac{15\sqrt{2}+2}{8}=\dfrac{3\sqrt{2}+2}{4}+a$

よって　$a=\dfrac{15\sqrt{2}+2}{8}-\dfrac{3\sqrt{2}+2}{4}=\dfrac{9\sqrt{2}-2}{8}$

したがって，求める直線の式は　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9\sqrt{2}-2}{8}$

$\boxed{10}$ [難]

解説

(1) 直線 AB の傾きは

$$\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2\right)\div(b-a)=\frac{1}{2}(b+a)(b-a)\div(b-a)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b)$$

直線 AB の式を $y=\frac{1}{2}(a+b)x+2$ とすると，点 A を通るから

$$\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}a(a+b)+2$$
$$ab=-4 \quad \cdots\cdots ①$$

点 C を通り，直線 AB に平行な直線と y 軸との交点の y 座標は 1 であるから，

$y=\frac{1}{2}(a+b)x+1$ とおける。

点 C を通るから

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(a+b)+1$$
$$b=-a+1 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より　$a(-a+1)=-4$

$$a^2-a-4=0$$

解の公式により

$$a=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$a<-1$ より　$a=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$，$b=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

(2) 直線 BC の傾きは

$$\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}\right)\div(b+1)=\frac{1}{2}(b+1)(b-1)\div(b+1)$$
$$=\frac{b-1}{2}$$

よって，直線 BC の式を $y=\frac{b-1}{2}x+c$ とすると，点 C を通るから

$$\frac{1}{2}=\frac{1-b}{2}+c$$
$$c=\frac{b}{2}$$

したがって　$\triangle\mathrm{COB}=\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times b$

$$=\frac{b}{4}\times(b+1)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1+\sqrt{17}}{2}\times\frac{3+\sqrt{17}}{2}$$
$$=\frac{20+4\sqrt{17}}{16}$$
$$=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$$

$\boxed{11}$ [難]

解説

(1) B，C の x 座標をそれぞれ b，c とおく。

このとき，3 点 A，B，C の座標は　A$(-a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$，C$(c,\ c^2)$　となる。

直線 AB の傾きは　$p=\frac{b^2-a^2}{b-(-a)}=\frac{(b+a)(b-a)}{b+a}=b-a$

直線 BC の傾きは　$q=\frac{c^2-b^2}{c-b}=\frac{(c+b)(c-b)}{c-b}=c+b$

直線 CA の傾きは　$r=\frac{c^2-a^2}{c-(-a)}=\frac{(c+a)(c-a)}{c+a}=c-a$

$p:q=1:6$　より　$(b-a):(c+b)=1:6$

$6(b-a)=c+b$　より　$6a-5b+c=0$　…… ①

$q:r=2:1$　より　$(c+b):(c-a)=2:1$

$c+b=2(c-a)$　より　$2a+b-c=0$　…… ②

①＋② より　$8a-4b=0$　すなわち　$b=2a$

これを ① に代入すると　$6a-10a+c=0$　すなわち　$c=4a$

したがって，B の x 座標は $2a$，C の x 座標は $4a$

(2) 3 点 A，B，C の座標は　A$(-a,\ a^2)$，B$(2a,\ 4a^2)$，C$(4a,\ 16a^2)$

直線 OC の式は　$y=4ax$，　直線 AB の式は　$y=ax+2a^2$

よって，点 D の x 座標は，方程式　$4ax=ax+2a^2$　の解で表される。

$3ax=2a^2$ を解いて　$x=\frac{2}{3}a$

したがって　$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\left\{\frac{2}{3}a-(-a)\right\}:\left(2a-\frac{2}{3}a\right)=\frac{5}{3}:\frac{4}{3}=5:4$

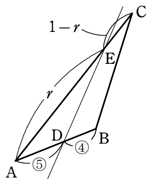
(3) (2) より　AD : DB＝5 : 4　である。

AE : EC＝$r:(1-r)$ とおく。

△ABC の面積を S とすると

$$\triangle\mathrm{ADE}=\frac{5}{5+4}\times\frac{r}{r+(1-r)}\times S=\frac{5}{9}rS$$

$\triangle\mathrm{ADE}=\frac{1}{2}S$ であるから　$\frac{5}{9}r=\frac{1}{2}$



よって　$r=\frac{9}{10}$

$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=\frac{9}{10}:\frac{1}{10}=9:1$　となる。

A$(-a,\ a^2)$，C$(4a,\ 16a^2)$　であるから

点 E の x 座標は　$4a-\frac{1}{10}\{4a-(-a)\}=4a-\frac{a}{2}=\frac{7}{2}a$

点 E の y 座標は　$16a^2-\frac{1}{10}(16a^2-a^2)=16a^2-\frac{3}{2}a^2=\frac{29}{2}a^2$

したがって，E の座標は　$\left(\frac{7}{2}a,\ \frac{29}{2}a^2\right)$

$\boxed{12}$ [慶應義塾女子]

解説

(1) 直線 LM の傾きは　$\frac{ap^2-aq^2}{p-q}=\frac{a(p+q)(p-q)}{p-q}=a(p+q)$

直線 LM の式を $y=a(p+q)x+b$ とおくと，点 L を通るから

$$ap^2=a(p+q)p+b$$
$$b=ap^2-ap^2-apq$$
$$b=-apq$$

(2) (ア) 点 C，D の座標はそれぞれ　$(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$

直線 BC の傾きは　$(0-1)\div\left(\frac{3}{2}-1\right)=-2$

直線 BC の式を $y=-2x+c$ とおくと，点 C を通るから

$$1=-2+c$$
$$c=3$$

よって，直線 BC の式は　$y=-2x+3$

点 L は直線 BC 上にあるから

$$ap^2=-2p+3$$

したがって

$$ap^2+2p=3 \quad \cdots\cdots ①$$

同様に，直線 AD の式を求めると　$y=x+2$

点 M は直線 AD 上にあるから

$$aq^2=q+2$$

したがって

$$aq^2-q=2 \quad \cdots\cdots ②$$

(イ) ① より

$$\frac{1}{2}p^2+2p=3$$
$$p^2+4p-6=0$$

解の公式により

$$p=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}$$
$$=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{2}$$
$$=-2\pm\sqrt{10}$$

$p>0$ より　$p=-2+\sqrt{10}$

② より

$$\frac{1}{2}q^2-q=2$$
$$q^2-2q-4=0$$

解の公式により

$$q=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{20}}{2}$$
$$=1\pm\sqrt{5}$$

$q<0$ より　$q=1-\sqrt{5}$

このとき

$$b=-\frac{1}{2}\times(-2+\sqrt{10})(1-\sqrt{5})$$
$$=-\frac{1}{2}(-2+2\sqrt{5}+\sqrt{10}-5\sqrt{2})$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times2\times aq^2+\frac{1}{2}\times b\times(-q)$$

$$=aq^2-\frac{1}{2}bq$$

$$=3-\sqrt{5}-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\sqrt{5}-3+\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{2}$$