

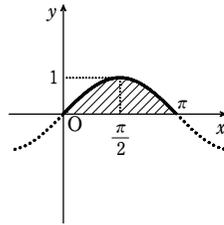
1

解答 2

解説

求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$



2

解答 $\sqrt{2}$

解説

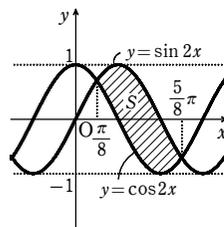
2つの曲線の共有点の x 座標は、方程式 $\sin 2x = \cos 2x$ の解である。

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で解くと $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$

$\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$ では、 $\sin 2x \geq \cos 2x$ であるから

$$S = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} (\sin 2x - \cos 2x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} = \sqrt{2}$$



3

解答 $\frac{4}{e^4}$

解説

$y = f(x)$ とおく。

$$f'(x) = (2x-6) \cdot e^{-x} + (x^2-6x+8) \cdot (-e^{-x}) = -(x^2-8x+14)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x^2 - 8x + 14 = 0 \quad \text{これを解いて } x = 4 \pm \sqrt{2}$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

$f(x) = 0$ とすると

$$(x^2 - 6x + 8)e^{-x} = 0$$

よって $(x-2)(x-4) = 0$

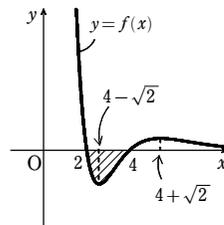
ゆえに $x = 2, 4$

したがって、 $y = f(x)$ のグラフの概形は、右の図のようになる。

求める面積を S とすると、 S は右の図の斜線部分の面積であるから

$$S = -\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)e^{-x} dx$$

$$= \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) \cdot (e^{-x})' dx$$



$$= \left[(x^2 - 6x + 8)e^{-x} \right]_2^4 - \int_2^4 (2x-6) \cdot e^{-x} dx$$

$$= \int_2^4 (2x-6) \cdot (e^{-x})' dx = \left[(2x-6)e^{-x} \right]_2^4 - \int_2^4 2 \cdot e^{-x} dx = 2e^{-4} + 2e^{-2} + \left[2e^{-x} \right]_2^4$$

$$= 4e^{-4} = \frac{4}{e^4}$$

4

解答 $\frac{e}{2} - 1$

解説

$ex = xe^x$ とすると $x(e - e^x) = 0$

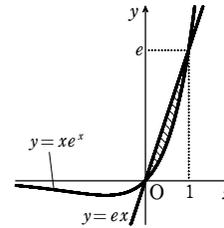
ゆえに $x = 0, 1$

$0 \leq x \leq 1$ の範囲で $ex \geq xe^x$

直線と曲線の概形は右のようになる。

$$S = \int_0^1 (ex - xe^x) dx = \int_0^1 \{ex - x(e^x)'\} dx$$

$$= \left[\frac{e}{2} x^2 \right]_0^1 - \left[xe^x \right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = \frac{e}{2} - 1$$



5

解答 $\frac{4}{3}$

解説

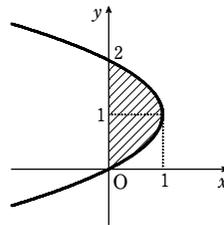
$x = 0$ とすると $y = 0, 2$

$0 \leq y \leq 2$ では $x = -y^2 + 2y \geq 0$

であるから、求める面積 S は

$$S = \int_0^2 x dy = \int_0^2 (-y^2 + 2y) dy$$

$$= \left[-\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$



6

解答 $a = \frac{3}{4}$

解説

$y = \sin x \ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \dots \dots \textcircled{1}$, $y = a \cos x \dots \dots \textcircled{2}$ とおく。

$a < 0$ のとき、 $\textcircled{2}$ は $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ で常に x 軸より下側にあるから、条件を満たさない。

よって $a \geq 0$

曲線 $\textcircled{2}$ が、曲線 $\textcircled{1}$ と x 軸と直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた

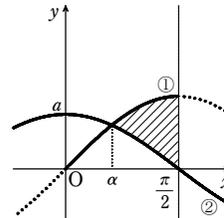
部分の面積を 2 等分するとき、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ の交点の x 座

標を $\alpha \ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ とすると

$$\sin \alpha = a \cos \alpha$$

これを $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ に代入して

$$(a^2 + 1) \cos^2 \alpha = 1$$



$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos \alpha > 0 \text{ であるから } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\text{よって } \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\text{条件から } 2 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$$\text{ここで } \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a \cos x) dx = [-\cos x - a \sin x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = -a + \cos \alpha + a \sin \alpha$$

$$= -a + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{a^2 + 1} - a$$

$$\text{一方 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{よって、}\textcircled{3} \text{ から } 2(\sqrt{a^2 + 1} - a) = 1 \quad \text{ゆえに } \sqrt{a^2 + 1} = a + \frac{1}{2}$$

$$\text{両辺を 2 乗して } a^2 + 1 = a^2 + a + \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって } a = \frac{3}{4} \quad (\text{これは } a \geq 0 \text{ を満たす})$$

7

解答 (1) $a = 2e$ (2) $\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}} - 2e$

解説

(1) $f(x) = x^2$, $g(x) = a \log x$ とすると

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = \frac{a}{x}$$

$x = t$ で $y = x^2$ と $y = a \log x$ のグラフが接するとすると

$$t^2 = a \log t \quad \dots \dots \textcircled{1}, \quad 2t = \frac{a}{t} \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } t^2 = \frac{a}{2} \quad \textcircled{1} \text{ から } \frac{a}{2} = a \log t$$

$$\text{よって、} a > 0 \text{ より } \log t = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \quad a = 2t^2 = 2e$$

(2) 求める面積を S とおくと

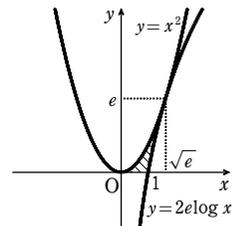
$$S = \int_0^e (e^{\frac{y}{2}} - \sqrt{y}) dy$$

$$= \left[2e \cdot e^{\frac{y}{2}} - \frac{2}{3} \sqrt{y^3} \right]_0^e$$

$$= 2e(e^{\frac{1}{2}} - 1) - \frac{2}{3} \sqrt{e^3}$$

$$= 2e^{\frac{3}{2}} - 2e - \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}} - 2e$$



第1講 例題演習

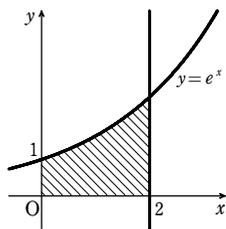
1

【解答】 (1) $e^2 - 1$ (2) $3 + 6\log 2$ (3) $\frac{45}{4}$ (4) $\log 2$

【解説】

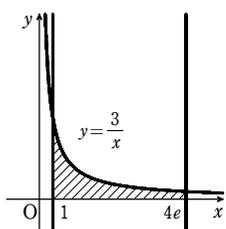
(1) $0 \leq x \leq 2$ では、 $e^x > 0$ であるから

$$S = \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1$$



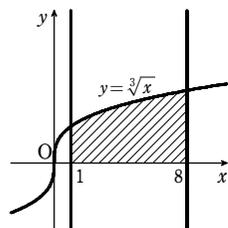
(2) $1 \leq x \leq 4e$ では、 $\frac{3}{x} > 0$ であるから

$$S = \int_1^{4e} \frac{3}{x} dx = [3\log|x|]_1^{4e} = 3\log 4e = 3 + 6\log 2$$



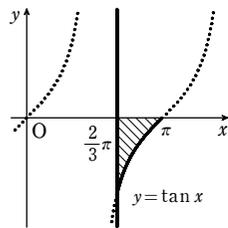
(3) $1 \leq x \leq 8$ では、 $\sqrt[3]{x} > 0$ であるから

$$S = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \left[\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \right]_1^8 = \frac{45}{4}$$



(4) $\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \pi$ では、 $\tan x < 0$ であるから

$$S = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (-\tan x) dx = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left(-\frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\cos x} dx = [\log|\cos x|]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} = \log 1 - \log \frac{1}{2} = \log 2$$



2

【解答】 (1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$

【解説】

(1) 方程式 $\sin x = \cos 2x$ を解くと $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$

よって $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ ゆえに $(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$0 \leq x \leq \pi$ から $\sin x = \frac{1}{2}$ これを解いて $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

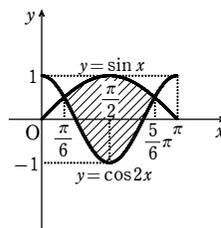
よって、2曲線の位置関係は、右図のようになり、

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ のとき

$$\sin x \geq \cos 2x$$

したがって、求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin x - \cos 2x) dx = \left[-\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



(2) $0 \leq x \leq \pi$ における2曲線の共有点の x 座標は

$$\sin x = \sin 2x$$
 を解くと

$$\sin x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ から } x = 0, \pi$$

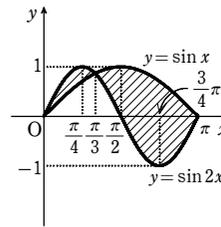
$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ から } x = \frac{\pi}{3}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ では } \sin x \leq \sin 2x$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \text{ では } \sin x \geq \sin 2x$$

であるから、求める面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{2}$$



3

【解答】 $e(7 - e\sqrt{e})$

【解説】

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x \text{ とおく。}$$

$$f'(x) = (4x - 7)e^x + (2x^2 - 7x + 5)e^x = (2x^2 - 3x - 2)e^x = (2x + 1)(x - 2)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -\frac{1}{2}, 2$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

$$f(x) = (x - 1)(2x - 5)e^x$$

x	...	$-\frac{1}{2}$...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		極大 $\frac{9}{\sqrt{e}}$		極小 $-e^2$	

$$f(x) = 0 \text{ とすると } x = 1, \frac{5}{2}$$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

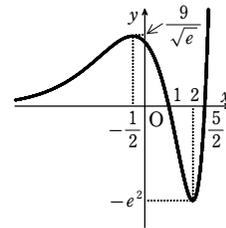
$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^t} \left(2 + \frac{7}{t} + \frac{5}{t^2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

以上から、グラフは右の図のようになる。

よって、求める面積は

$$\int_1^{\frac{5}{2}} \{ -(2x^2 - 7x + 5)e^x \} dx = - \left[(2x^2 - 7x + 5)e^x \right]_1^{\frac{5}{2}} + \int_1^{\frac{5}{2}} (4x - 7)e^x dx = -0 + \left[(4x - 7)e^x \right]_1^{\frac{5}{2}} - \int_1^{\frac{5}{2}} 4e^x dx = 3e^{\frac{5}{2}} - (-3e) - \left[4e^x \right]_1^{\frac{5}{2}} = 3e^{\frac{5}{2}} + 3e - 4e^{\frac{5}{2}} + 4e = 7e - e^{\frac{5}{2}} = e(7 - e\sqrt{e})$$



4

【解答】 (1) $e - \frac{5}{2}$ (2) $\frac{12\sqrt{3} - 18}{5}$ (3) $\log 2 - \frac{1}{3}$

【解説】

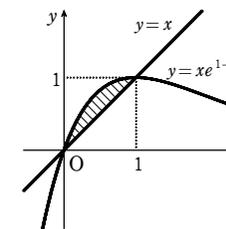
(1) 2曲線の交点の x 座標は、方程式 $xe^{1-x} = x$

すなわち $x(e^{1-x} - 1) = 0$ を解いて

$$x = 0, 1$$

$0 \leq x \leq 1$ では、 $xe^{1-x} \geq x$ であるから

$$S = \int_0^1 (xe^{1-x} - x) dx = \int_0^1 x(-e^{-x}) dx - \int_0^1 x dx = \left[x(-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -1 + \left[-e^{-x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2}$$



(2) 曲線と直線の交点の x 座標は、方程式 $x\sqrt{3-x} = x$ すなわち $x(\sqrt{3-x} - 1) = 0$ を解いて $x = 0, 2$

$0 \leq x \leq 2$ では、 $x\sqrt{3-x} \geq x$ であるから

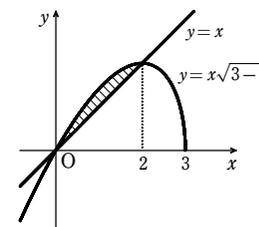
$$S = \int_0^2 (x\sqrt{3-x} - x) dx = \int_0^2 x\sqrt{3-x} dx - \int_0^2 x dx$$

$\sqrt{3-x} = t$ とおくと $x = 3 - t^2, dx = -2tdt$

x	0	→	2
t	$\sqrt{3}$	→	1

したがって

$$S = \int_{\sqrt{3}}^1 (3 - t^2)t \cdot (-2t) dt - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left[-\frac{2}{5}t^5 + 2t^3 \right]_{\sqrt{3}}^1 - 2 = \frac{12\sqrt{3} - 18}{5}$$



(3) 2曲線の共有点のx座標は、方程式 $x^2 = \frac{2x}{1+x^2}$

の解である。方程式を変形すると

$$x^2(1+x^2) = 2x$$

$$x(x^3+x-2) = 0$$

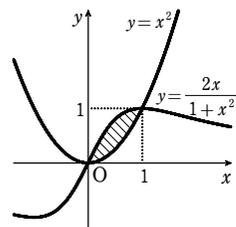
$$x(x-1)(x^2+x+2) = 0$$

よって $x=0, 1$

$0 \leq x \leq 1$ で $x^2 \leq \frac{2x}{1+x^2}$ であるから

$$S = \int_0^1 \left(\frac{2x}{1+x^2} - x^2 \right) dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \left[\log(1+x^2) \right]_0^1 - \frac{1}{3} = \log 2 - \frac{1}{3}$$



5

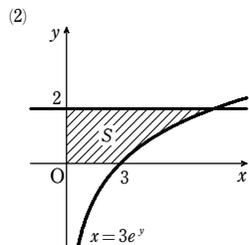
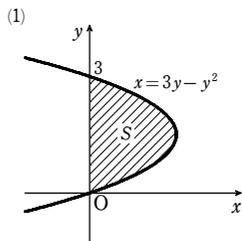
解答 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $3e^2 - 3$

解説

(1) $3y - y^2 = 0$ とすると $y=0, 3$

$0 \leq y \leq 3$ では、 $3y - y^2 \geq 0$ であるから $S = \int_0^3 (3y - y^2) dy = \left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9}{2}$

(2) $0 \leq y \leq 2$ では、 $3e^y > 0$ であるから $S = \int_0^2 3e^y dy = \left[3e^y \right]_0^2 = 3e^2 - 3$



6

解答 $a = 2 - \sqrt{2}$

解説

$y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) …… ①, $y = a \sin x$ …… ② とおく。

曲線②が、曲線①とx軸で囲まれた部分の面積を2等分するとき、①、②の原点以外の交点のx座標を α とすると $\sin 2\alpha = a \sin \alpha$ から

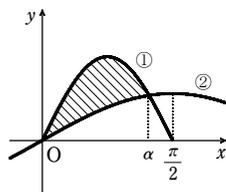
$$2 \sin \alpha \cos \alpha = a \sin \alpha$$

$\sin \alpha > 0$ であるから $\cos \alpha = \frac{a}{2}$

ここで、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから $0 < \frac{a}{2} < 1$

すなわち $0 < a < 2$ …… ③

題意から $\int_0^\alpha (\sin 2x - a \sin x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$



ここで $\int_0^\alpha (\sin 2x - a \sin x) dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2} + a \cos x \right]_0^\alpha$

$$= -\frac{\cos 2\alpha - 1}{2} + a(\cos \alpha - 1) = -\frac{(2\cos^2 \alpha - 1) - 1}{2} + a \cos \alpha - a$$

$$= \frac{a^2}{4} - a + 1 \quad \left(\cos \alpha = \frac{a}{2} \text{ から} \right)$$

一方 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

ゆえに $\frac{a^2}{4} - a + 1 = \frac{1}{2} \times 1$ よって $a^2 - 4a + 2 = 0$

これを解くと $a = 2 \pm \sqrt{2}$

③を満たすものは $a = 2 - \sqrt{2}$

7

解答 $a = \frac{e}{2}$, 面積は $\frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{2}e$

解説

$f(x) = \sqrt{x} - a \log x$ とおく. $x > 0$ で $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2a}{2x}$

$f(x)$ は $x < 4a^2$ で減少, $x > 4a^2$ で増加.

ゆえに、1点のみを共有するための条件は $f(4a^2) = 0$

$$\text{よって } 2a - a \log(4a^2) = 2a(1 - \log 2a) = 0$$

よって $a = \frac{e}{2}$ 圈

2曲線の共有点のx座標は $x = 4a^2 = e^2$

したがって、求める面積Sは

$$S = \int_0^{e^2} \sqrt{x} dx - \int_1^{e^2} \frac{e}{2} \log x dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{e^2} - \frac{e}{2} \left[x \log x - x \right]_1^{e^2}$$

$$= \frac{2}{3} e^3 - \frac{e}{2} (2e^2 - e^2 + 1) = \frac{1}{6} e^3 - \frac{1}{2} e$$
 圈

1

解答 (1) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$ (2) $20 \log 3 - 16$ (3) 3 (4) $\frac{9}{2}$

解説

(1) 定義域は $x-1 \geq 0$ から $x \geq 1$

$y=0$ とすると $(-2x+8)\sqrt{x-1} = 0$ よって $x=1, 4$

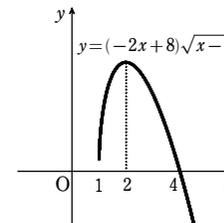
また $y' = -2\sqrt{x-1} + (-2x+8) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$$= \frac{-2(x-1) - x + 4}{\sqrt{x-1}} = \frac{-3(x-2)}{\sqrt{x-1}}$$

$y'=0$ とすると $x=2$

y の増減表は次のようになる。

x	1	...	2	...
y'		+	0	-
y	0	↗	極大	↘



したがって、グラフは右の図のようになる。

$\sqrt{x-1} = t$ とおくと

$$x = t^2 + 1, dx = 2t dt$$

求める面積Sは

$$S = -2 \int_1^4 (x-4)\sqrt{x-1} dx = -2 \int_0^{\sqrt{3}} (t^2-3)t \cdot 2t dt$$

$$= -4 \int_0^{\sqrt{3}} (t^4 - 3t^2) dt = -4 \left[\frac{t^5}{5} - t^3 \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{5}$$

x	1	→	4
t	0	→	$\sqrt{3}$

(2) $y=0$ とすると $10 - 9e^{-x} - e^x = 0$

$$10 - 9e^{-x} - e^x = 0 \iff (e^x)^2 - 10e^x + 9 = 0 \iff (e^x - 1)(e^x - 9) = 0$$

$$\iff e^x = 1, 9 \iff x = \log 1, \log 9$$

$$\iff x = 0, 2 \log 3$$

また $y' = 9e^{-x} - e^x = -e^{-x}(e^{2x} - 9)$

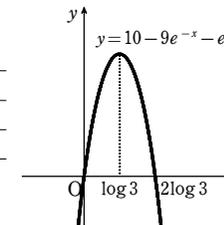
$$= -e^{-x}(e^x + 3)(e^x - 3)$$

$y'=0$ とすると $x = \log 3$

y の増減表は右のようになる。

よって、グラフは右の図のようになる。求める面積Sは

x	...	$\log 3$...
y'	+	0	-
y	↗	極大	↘



$$S = \int_0^{2 \log 3} (10 - 9e^{-x} - e^x) dx$$

$$= \left[10x + 9e^{-x} - e^x \right]_0^{2 \log 3} = 20 \log 3 - 16$$

(3) $y=0$ とすると $1 + \cos x = 0$ または $\sin 2x = 0$

$0 \leq x \leq \pi$ であるから $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$(1 + \cos x)^2 \geq 0$ に注意して、 $\sin 2x$ の符号を考えると

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } y \geq 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ のとき } y \leq 0$$

また $y = (1 + \cos x)^2 \cdot 2 \sin x \cos x$

$$= -2(\cos^3 x + 2 \cos^2 x + \cos x)(-\sin x)$$

第1講 レベルA

$\cos x = t$ とおくと $-\sin x dx = dt$

求める面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y dx$$

$$= -2 \int_1^0 (t^3 + 2t^2 + t) dt + 2 \int_0^{-1} (t^3 + 2t^2 + t) dt$$

$$= -2 \left[\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^2}{2} \right]_1^0 + 2 \left[\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^2}{2} \right]_0^{-1}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = 3$$

(4) 曲線 $x = y^2 - 1$ と直線 $x - y - 1 = 0$ すなわち $x = y + 1$ の交点の y 座標は、方程式 $y^2 - 1 = y + 1$ の解である。

よって $y^2 - y - 2 = 0$

これを解いて $y = -1, 2$

グラフは右図のようになり、 $-1 \leq y \leq 2$ のとき

$$y + 1 \geq y^2 - 1$$

ゆえに、求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^2 \{(y+1) - (y^2-1)\} dy$$

$$= \int_{-1}^2 (-y^2 + y + 2) dy$$

$$= \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-1}^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{9}{2}$$

別解 公式 $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いて

$$S = -\int_{-1}^2 (y+1)(y-2) dy = -\left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2}$$

2

解答 $\frac{32}{3}$

解説

求める面積を S とする。

(1) 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の共有点の x 座標は

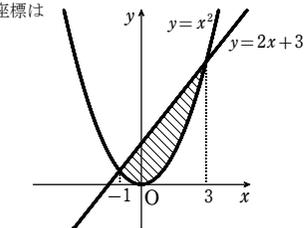
$$x^2 = 2x + 3 \text{ から } x = -1, 3$$

また、 $-1 \leq x \leq 3$ のとき $x^2 \leq 2x + 3$

$$\text{よって } S = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx$$

$$= \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3$$

$$= \frac{32}{3}$$



x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	x	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$
t	$1 \rightarrow 0$	t	$0 \rightarrow -1$

(2) $x = -1$ のとき $y = 1$,

$x = 3$ のとき $y = 9$

また、 $y = x^2$ から $x = \pm\sqrt{y}$

$$y = 2x + 3 \text{ から } x = \frac{y-3}{2}$$

よって、右の図から

$$S = \int_0^1 \{\sqrt{y} - (-\sqrt{y})\} dy + \int_1^9 \left\{ \sqrt{y} - \frac{y-3}{2} \right\} dy$$

$$= \int_0^1 2y^{\frac{1}{2}} dy + \int_1^9 \left(y^{\frac{1}{2}} - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right) dy$$

$$= \frac{4}{3} [y^{\frac{3}{2}}]_0^1 + \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{4} + \frac{3}{2} y \right]_1^9$$

$$= \frac{4}{3} + \left(18 - \frac{81}{4} + \frac{27}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{32}{3}$$

3

解答 (1) $(0, 0), (\log 2, \frac{1}{2} \log 2)$ (2) $\frac{1}{4} \log 2 - \frac{1}{8}$

解説

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は $xe^{-x} = 2xe^{-2x}$ の解。

両辺に e^{2x} を掛けて整理すると $x(e^x - 2) = 0$

よって、 $x = 0, \log 2$

これを $C_1: y = xe^{-x}$ に代入するとそれぞれ

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0 \cdot e^0 = 0$$

$$x = \log 2 \text{ のとき } y = \log 2 \cdot e^{-\log 2} = \log 2 \cdot \frac{1}{e^{\log 2}} = \frac{1}{2} \log 2$$

したがって、交点の座標は $(0, 0), (\log 2, \frac{1}{2} \log 2)$

(2) $0 \leq x \leq \log 2$ ($1 \leq e^x \leq 2$) のとき

$$2xe^{-2x} - xe^{-x} = xe^{-2x}(2 - e^x) \geq 0$$

よって、求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\log 2} (2xe^{-2x} - xe^{-x}) dx$$

$$= \left[2x \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} 2 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} dx - \left[x \cdot (-e^{-x}) \right]_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} (-e^{-x}) dx$$

$$= -\log 2 \cdot e^{-2 \log 2} + \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{\log 2} + \log 2 \cdot e^{-\log 2} + \left[e^{-x} \right]_0^{\log 2}$$

$$= -\frac{\log 2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) + \frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2} - 1$$

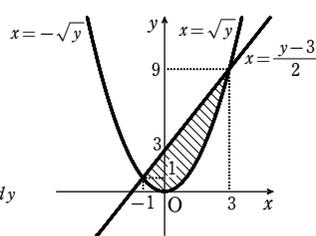
$$= \frac{1}{4} \log 2 - \frac{1}{8}$$

4

解答 $a = \frac{e}{2}$

解説

2 曲線の交点の x 座標は、方程式 $\tan x = a \sin 2x$ …… ① の解である。



$x = 0$ は ① の解であり、 $x = \frac{\pi}{2}$ は ① の解ではない。

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき、① から } \frac{\sin x}{\cos x} = 2a \sin x \cos x$$

$$\text{ゆえに } 2a \cos^2 x = 1 \text{ よって } \cos^2 x = \frac{1}{2a}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \cos x = \frac{1}{\sqrt{2a}} \text{ …… ②}$$

等式 ② を満たす x の値を α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とおく。

このとき、2 曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_0^{\alpha} \tan x dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a \sin 2x dx$$

$$= \left[-\log(\cos x) \right]_0^{\alpha} - \frac{a}{2} \left[\cos 2x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\log(\cos \alpha) - \frac{a}{2} \{-1 - (2\cos^2 \alpha - 1)\}$$

$$= -\log \frac{1}{\sqrt{2a}} + a \left(\frac{1}{\sqrt{2a}} \right)^2 = \frac{1}{2} \log 2a + \frac{1}{2}$$

$$S = 1 \text{ となるための条件は } \frac{1}{2} \log 2a + \frac{1}{2} = 1 \text{ 整理して } \log 2a = 1$$

$$\text{ゆえに } 2a = e \text{ したがって } a = \frac{e}{2}$$

5

解答 (1) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}, \sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ (2) $k = 2\sqrt{6}$

解説

(1) C_1, C_2 の 2 交点の x 座標は、方程式 $k \sin x = \cos x$ …… ① の解である。

$$\text{① から } k^2 \sin^2 x = \cos^2 x \text{ よって } k^2 \sin^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{ゆえに } \sin^2 x = \frac{1}{k^2+1} \text{ したがって } \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$

右の図から明らかに $\sin \alpha > 0, \sin \beta < 0$

したがって

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}, \sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$

(2) C_1, C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (k \sin x - \cos x) dx$$

$$= \left[-k \cos x - \sin x \right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= k(\cos \alpha - \cos \beta) + \sin \alpha - \sin \beta$$

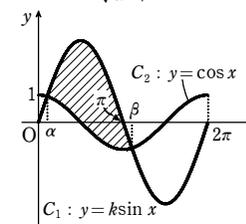
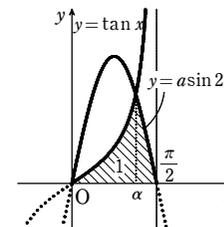
α, β は ① の解であるから $\cos \alpha = k \sin \alpha, \cos \beta = k \sin \beta$

$$\text{よって } S = k(k \sin \alpha - k \sin \beta) + (\sin \alpha - \sin \beta) = (k^2 + 1)(\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$= (k^2 + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \right) = 2\sqrt{k^2+1}$$

$$S = 10 \text{ から } \sqrt{k^2+1} = 5 \text{ ゆえに } k^2 = 24$$

$$k > 0 \text{ であるから } k = 2\sqrt{6}$$



6

解答 $a = \frac{1}{2e}$, 面積 $\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$

解説

$f(x) = \log x$, $g(x) = ax^2$ とすると $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = 2ax$

2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=c$ の点で接するための条件は

$\log c = ac^2 \dots\dots ①$, $\frac{1}{c} = 2ac \dots\dots ②$

② から $a = \frac{1}{2c^2} \dots\dots ③$ ③ を ① に代入して $\log c = \frac{1}{2}$

ゆえに $c = \sqrt{e}$ したがって $a = \frac{1}{2c^2} = \frac{1}{2e}$

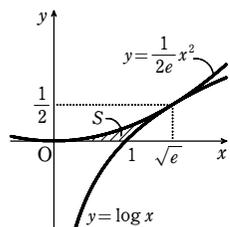
このとき、接点の座標は $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$

よって、求める面積 S は

$$S = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} x^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} \log x dx$$

$$= \frac{1}{2e} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{e}} - \left[x \log x - x \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{e} - \left(\frac{1}{2} \sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 \right) = \frac{2}{3} \sqrt{e} - 1$$



7

解答 $a = \frac{e-2}{2e}$

解説

$y = \log ax \dots\dots ①$ を微分すると $y' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$

接点の x 座標を t とすると、接線の方程式は

$y - \log at = \frac{1}{t}(x-t)$ すなわち $y = \frac{1}{t}x + \log at - 1 \dots\dots ②$

これが原点を通るから $0 = \log at - 1$

よって $at = e$ $a > 0$ から $t = \frac{e}{a}$

これを ② に代入して、接線の方程式は $y = \frac{a}{e}x \dots\dots ③$

また、接点の y 座標は $y = \log \left(a \cdot \frac{e}{a} \right) = 1$

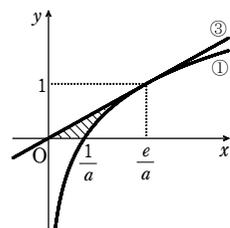
① から $x = \frac{1}{a}e^y$ ③ から $x = \frac{e}{a}y$

よって、曲線 ① と接線 ③ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{a}e^y - \frac{e}{a}y \right) dy = \frac{1}{a} \left[e^y - \frac{e}{2}y^2 \right]_0^1 = \frac{e-2}{2a}$$

この面積が e であるとき $\frac{e-2}{2a} = e$

したがって $a = \frac{e-2}{2e}$ (これは $a > 0$ を満たす)



1

解答 $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ で最小値 $\log \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 - \sqrt{5}$

解説

[1] $0 < t < 1$ のとき

$$S(t) = -\int_t^1 \log x dx + \int_1^{t+1} \log x dx = -\left[x \log x - x \right]_t^1 + \left[x \log x - x \right]_1^{t+1}$$

$$= (t+1) \log(t+1) + t \log t - 2t + 1$$

$S'(t) = \log(t+1) + 1 + \log t + 1 - 2 = \log t(t+1)$

$S'(t) = 0$ とすると $t(t+1) = 1$ よって $t^2 + t - 1 = 0$

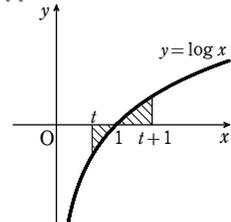
$0 < t < 1$ であるから $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

[2] $1 \leq t$ のとき

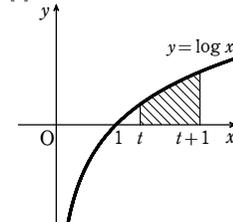
$$S(t) = \int_t^{t+1} \log x dx = \left[x \log x - x \right]_t^{t+1} = (t+1) \log(t+1) - t \log t - 1$$

$S'(t) = \log(t+1) + 1 - \log t - 1 = \log \frac{t+1}{t} = \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) > 0$

[1]



[2]



[1], [2] から、 $t > 0$ における $S(t)$ の増減表は右ようになる。

したがって、 $S(t)$ は $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ で最小

となり、最小値は

$$S\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \log \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \log \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2 - \sqrt{5}$$

ここで、 $\log \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \log \frac{2}{\sqrt{5}+1} = -\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ であるから

$$S\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \log \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \log \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 - \sqrt{5}$$

$$= \log \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 - \sqrt{5}$$

2

解答 $\frac{e^\pi}{2(e^\pi-1)}$

解説

t	0	...	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$...	1	...
$S'(t)$			-		0	+
$S(t)$			↘		極小	↗

$n=0, 1, 2, \dots$ とする。

曲線 $y=e^{-x} \sin x$ ($x \geq 0$) と x 軸の交点の x 座標

は、 $e^{-x} \sin x = 0$ から $\sin x = 0$

ゆえに $x = n\pi$

また、 $y \geq 0$ となるのは、 $e^{-x} > 0$ であるから、

$\sin x \geq 0$ のときである。

よって $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$

ゆえに $S_k = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$

$$= \left[-e^{-x} \cos x \right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \cos x dx$$

$$= \left[-e^{-x} \cos x \right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} - \left[e^{-x} \sin x \right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} + \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$$

すなわち $S_k = e^{-(2k+1)\pi} + e^{-2k\pi} - S_k$

したがって $S_k = \frac{1}{2} \{ e^{-(2k+1)\pi} + e^{-2k\pi} \}$

よって $\sum_{k=0}^n S_k = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^n e^{-(2k+1)\pi} + \sum_{k=0}^n e^{-2k\pi} \right\}$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{-\pi} (1 - e^{-2(n+1)\pi})}{1 - e^{-2\pi}} + \frac{1 - e^{-2(n+1)\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \right\}$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-\pi} + 1}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{e^\pi}{2(e^\pi - 1)}$

3

解答 (1) $y = 2x \log 2 - \frac{4}{e}$ (2) $\frac{2}{e^2} - \frac{1}{4}$

解説

(1) $y = x \log x$ について

$y' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$

$y'' = \frac{1}{x} > 0$

$y' = 0$ とすると $x = \frac{1}{e}$

$y = x \log x$ の増減表は右ようになる。

また

$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log x = \infty$

よって、2つの曲線 C_1, C_2 の概形は右図のようになる。

C_1 上の点 $(\alpha, \alpha \log \alpha)$ における接線の方程式は

$y - \alpha \log \alpha = (\log \alpha + 1)(x - \alpha)$

すなわち $y = (\log \alpha + 1)x - \alpha \dots\dots ①$

C_2 上の点 $(\beta, 2\beta \log \beta)$ における接線の方程式は

$y - 2\beta \log \beta = 2(\log \beta + 1)(x - \beta)$

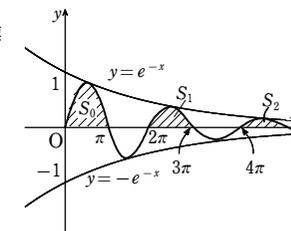
すなわち $y = 2(\log \beta + 1)x - 2\beta \dots\dots ②$

① と ② が一致するとき

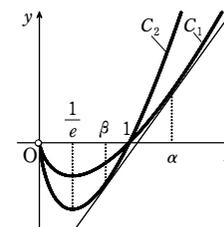
$\log \alpha + 1 = 2(\log \beta + 1) \dots\dots ③$

$-\alpha = -2\beta \dots\dots ④$

④ から $\alpha = 2\beta$



x	0	...	$\frac{1}{e}$...	
y'			-	0	+
y			↘	極小	↗



第1講 レベルB

これを③に代入して

$$\log 2\beta + 1 = 2\log \beta + 2$$

ゆえに $\log 2 + \log \beta = 2\log \beta + 1$

よって $\log \beta = \log 2 - 1 = \log \frac{2}{e}$

ゆえに $\beta = \frac{2}{e}$ よって $\alpha = \frac{4}{e}$

これを①に代入して ℓ の方程式は

$$y = \left(\log \frac{4}{e} + 1\right)x - \frac{4}{e}$$

すなわち $y = 2x\log 2 - \frac{4}{e}$

(2) (1)の図から

$$S = \int_{\beta}^1 \left(2x\log x - 2x\log 2 + \frac{4}{e}\right) dx + \int_1^{\alpha} \left(x\log x - 2x\log 2 + \frac{4}{e}\right) dx$$

$$= 2 \int_{\beta}^1 x\log x dx + \int_1^{\alpha} x\log x dx + \int_{\beta}^{\alpha} \left(\frac{4}{e} - 2x\log 2\right) dx$$

ここで

$$\int x\log x dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

よって、 $F(x) = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2$ とおくと

$$S = 2F(1) - 2F(\beta) + F(\alpha) - F(1) + \left[\frac{4}{e}x - x^2\log 2\right]_{\beta}^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^2\log \alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta^2\log \beta + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{4}$$

$$+ \frac{4}{e}\alpha - \alpha^2\log 2 - \frac{4}{e}\beta + \beta^2\log 2$$

$\alpha = \frac{4}{e}, \beta = \frac{2}{e}$ であるから

$$S = \frac{8}{e^2}\log \frac{4}{e} - \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2}\log \frac{2}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{4}$$

$$+ \frac{16}{e^2} - \frac{16}{e^2}\log 2 - \frac{8}{e^2} + \frac{4}{e^2}\log 2$$

$$= \frac{2}{e^2} - \frac{1}{4}$$

[4]

解答 (1) $\sin t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (2) $\sqrt{a^2+b^2} - b$

(3) $b = \frac{4}{3}a$

解説

(1) 条件から、 t は $0 < t < \frac{\pi}{2}$ で、 $a\cos t = b\sin t$ を満

たす。 $a > 0$ から $\cos t = \frac{b}{a}\sin t$ …… ①

①を $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ に代入すると

$$\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\sin^2 t = 1$$

よって $\frac{a^2+b^2}{a^2}\sin^2 t = 1$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin t > 0$ であるから $\sin t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ゆえに、①から $\cos t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) (1)の図から

$$S = \int_0^t (a\cos x - b\sin x) dx = [a\sin x + b\cos x]_0^t$$

$$= a\sin t + b\cos t - b = a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + b \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - b$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} - b$$

(3) (1)の図から

$$T = \int_t^{\frac{\pi}{2}} (b\sin x - a\cos x) dx = [-b\cos x - a\sin x]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -a + b\cos t + a\sin t = -a + b \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} - a$$

$T = 2S$ とすると $\sqrt{a^2+b^2} - a = 2(\sqrt{a^2+b^2} - b)$

よって $2b - a = \sqrt{a^2+b^2}$ …… ②

$\sqrt{a^2+b^2} > 0$ であるから $2b - a > 0$ ゆえに $b > \frac{1}{2}a$ …… ③

③のとき、②の両辺を平方すると $(2b - a)^2 = a^2 + b^2$

よって $3b^2 - 4ab = 0$ $b \neq 0$ であるから $b = \frac{4}{3}a$ …… ④

$a > 0$ より、④は③を満たすから、④が求める条件である。

[5]

解答 (1) $x = y^2$ (2) $\frac{9}{2}$

解説

(1) 曲線 A 上の点 (X, Y) を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ

回転した点の座標を (x, y) とする。

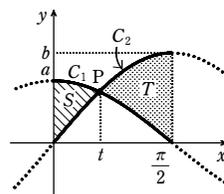
複素数平面上で、 $P(X+Yi), Q(x+yi)$ とすると、点

Q を原点を中心として $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点が P である

から $X+Yi = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} (x+yi)$

これから $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ …… ①, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$

これらを $\sqrt{2}(X-Y) = (X+Y)^2$ に代入すると $2x = (\sqrt{2}y)^2$



すなわち $x = y^2$ が求める曲線の方程式である。

(2) ①を $X = \sqrt{2}$ に代入して整理すると $x = -y + 2$ これは、直線 $x = \sqrt{2}$ を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した直線の方程式である。

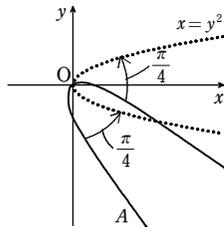
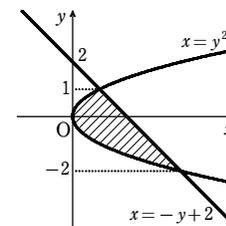
直線 $x = -y + 2$ と曲線 $x = y^2$ の交点の y 座標は、 $-y + 2 = y^2$ から $(y+2)(y-1) = 0$

ゆえに $y = -2, 1$

よって、求める面積は

$$\int_{-2}^1 (-y + 2 - y^2) dy = -\int_{-2}^1 (y + 2)(y - 1) dy$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)(1 - (-2))^3 = \frac{9}{2}$$



第2講 例題

1

【解答】 $\sqrt{6}\pi$

【解説】

この楕円は x 軸および y 軸に関して対称である。
よって、求める面積 S は第1象限にある部分の面積の4倍である。

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ から } y^2 = \frac{3}{2}(2-x^2)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ の曲線の方程式は } y = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2-x^2}$$

$$\text{また, } 2-x^2 \geq 0 \text{ であるから } 0 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$\text{よって } S = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{2-x^2} dx = 2\sqrt{6} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$$

$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$ は、半径 $\sqrt{2}$ の円の面積の $\frac{1}{4}$ を表すから

$$S = 2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{4} \pi (\sqrt{2})^2 = \sqrt{6}\pi$$

2

【解答】 $4\sqrt{3}$

【解説】

点 (x, y) がこの曲線上にあるとすると、点 $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ も曲線上にあるから、この曲線は x 軸, y 軸, 原点に関してそれぞれ対称である。

ゆえに、この曲線の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分を考える。

$$y^2 \geq 0 \text{ であるから } x^2(3-x^2) \geq 0$$

$$\text{よって } 0 \leq x^2 \leq 3 \text{ ゆえに } 0 \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$\text{このとき } y = x\sqrt{3-x^2}$$

$$f(x) = x\sqrt{3-x^2} \text{ とおくと } f'(x) = \sqrt{3-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}} = \frac{3-2x^2}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x^2 = \frac{3}{2} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3} \text{ であるから } x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$0 \leq x \leq \sqrt{3}$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$...	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0

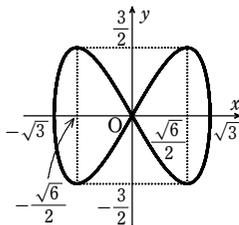
よって、対称性を考えると、曲線 $y^2 = x^2(3-x^2)$ の概形は右の図のようになる。

したがって、

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \quad -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$$

この曲線で囲まれた部分は x 軸, y 軸, 原点に関して対称であるから、求める面積を S とすると

$$S = 4 \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{3-x^2} dx = 4 \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{\sqrt{3}} (3-x^2)' \sqrt{3-x^2} dx$$



$$= -2 \left[\frac{2}{3} (3-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{3}} = -2 \left(-\frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \right) = 4\sqrt{3}$$

3

【解答】 (1) $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ (2) $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

【解説】

$$(1) \text{ ② から } y^2 = 4 - 3x^2 \dots\dots \text{③}$$

$$\text{③ を ① に代入して整理すると } x^2 = 1 \text{ よって } x = \pm 1$$

$$x = \pm 1 \text{ を ③ に代入して整理すると } y^2 = 1 \text{ ゆえに } y = \pm 1$$

よって、求める4つの交点の座標は $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$

(2) 楕円の内部が重なった部分の図形を D とすると、図形 D は x 軸, y 軸, および直線 $y = x$ に関して対称である。

よって、[図1]の斜線部分の面積を S とすると、求める面積は $8S$ である。

$$\text{① より } y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} \text{ であるから}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx - \frac{1}{2} \cdot 1^2$$

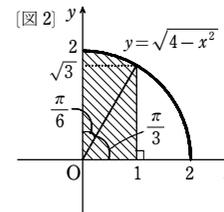
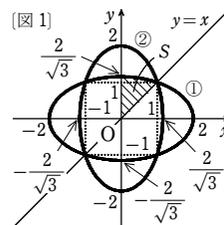
$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ は[図2]の斜線部分の面積に等しいから、これを求めると

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ゆえに } S = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

よって、求める面積は

$$8S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}\pi = \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$$



4

【解答】 8π

【解説】

$$5x^2 + 2xy + y^2 = 16 \text{ から } y^2 + 2xy + 5x^2 - 16 = 0$$

$$\text{これを } y \text{ について解くと } y = -x \pm 2\sqrt{4-x^2}$$

$4-x^2 \geq 0$ から、曲線は $-2 \leq x \leq 2$ の範囲にある。

$$f(x) = -x + 2\sqrt{4-x^2}$$

$$g(x) = -x - 2\sqrt{4-x^2}$$

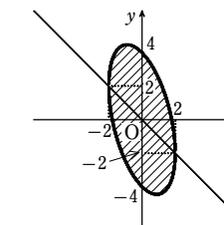
とすると、定義域内で $f(x) \geq g(x)$

よって

$$S = \int_{-2}^2 \{(-x + 2\sqrt{4-x^2}) - (-x - 2\sqrt{4-x^2})\} dx$$

$$= 4 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ は、半径2の円の面積の $\frac{1}{2}$ を表すから



$$S = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 8\pi$$

5

【解答】 $\frac{2}{3}$

【解説】

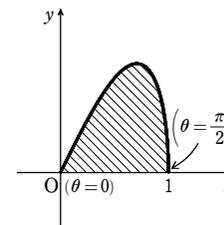
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $y=0$ とすると $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$

また、 $y \geq 0$ である。

x と θ の対応は右のようになる。

$$x = \sin \theta \text{ から } dx = \cos \theta d\theta$$

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{2}$



$$\text{よって } S = \int_0^1 y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \theta)' \cos^2 \theta d\theta = -2 \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

6

【解答】 3π

【解説】

図から、 $0 \leq t \leq \pi$ では常に $y \geq 0$

また、 $y = 2\sin t(1 - \cos t)$ であるから、 $y=0$ とすると

$$0 \leq t \leq \pi \text{ から } t = 0, \pi$$

$$\text{更に } \frac{dx}{dt} = -2\sin t + 2\sin 2t = 2\sin t(2\cos t - 1)$$

$$0 < t < \pi \text{ で } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ とすると、} \cos t = \frac{1}{2} \text{ から}$$

$$t = \frac{\pi}{3}$$

よって、 x の値の増減は右上の表のようになる。

ゆえに、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ における y を y_1 、 $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \pi$ にお

ける y を y_2 とすると

$$S = \int_{-3}^{\frac{3}{2}} y_2 dx - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{\pi}{3}} y_1 dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt - \int_0^{\frac{\pi}{3}} y \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t - \sin 2t)(-2\sin t + 2\sin 2t) dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\sin^2 t - 3\sin t \sin 2t + \sin^2 2t) dt$$

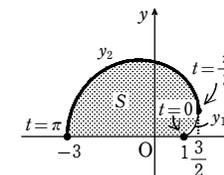
$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} - 3\sin t \cdot 2\sin t \cos t + \frac{1 - \cos 4t}{2} \right) dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 4t - 6\sin^2 t \cos t \right) dt$$

$$= 2 \left[\frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{8} \sin 4t - 2\sin^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3\pi$$

$$\sin t = 0 \text{ または } \cos t = 1$$

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	π
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-	
x	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3



第2講 例題演習

1

解答 (1) $\sqrt{6}\pi$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

解説

(1) $2x^2 + 3y^2 = 6$ より $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

この曲線は楕円で、 x 軸に関して対称であるから、求める面積 S は、図の斜線部分の面積を2倍したものに等しい。

$y \geq 0$ のとき、方程式を y について解くと

$$y = \sqrt{2 - \frac{2}{3}x^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3 - x^2} dx \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} dx \end{aligned}$$

ここで、 $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} dx$ は、半径 $\sqrt{3}$ の円の面積の半分で $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}\pi$

$$\text{したがって } S = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2}\pi = \sqrt{6}\pi$$

(2) この曲線は楕円で、 x 軸に関して対称であるから、求める面積 S は、図の斜線部分の面積を2倍したものに等しい。

$y \geq 0$ のとき、方程式を y について解くと

$$y = \sqrt{\frac{1 - 3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} - x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= 2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} - x^2} dx \\ &= \sqrt{3} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{1}{3} - x^2} dx \end{aligned}$$

ここで、 $\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{1}{3} - x^2} dx$ は、半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の円の面積の半分で

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{したがって } S = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

2

解答 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$

解説

(1) この曲線は、 x 軸および y 軸に関して対称であるから、求める面積 S は、図の斜線部分の面積を4倍したものに等しい。

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ のとき } y = x\sqrt{4 - x^2}$$

また、 $x \geq 0$ での曲線と x 軸の共有点の x 座標は $x = 0, 2$

$$\text{よって } S = 4 \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx$$

$$4 - x^2 = t \text{ とおくと } -2xdx = dt$$

x と t の対応は次のようになる。

x	0	→	2
t	4	→	0

$$\text{したがって } S = 4 \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx = 4 \int_4^0 \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = 2 \int_0^4 \sqrt{t} dt = 2 \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

(2) 曲線の存在範囲は、 $y^2 = (x+3)x^2 \geq 0$ から $x \geq -3$

このとき $y = \pm x\sqrt{x+3}$ …… ①

$f(x) = x\sqrt{x+3}$ とおくと

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	…	-2	…
$f'(x)$		+	0	+
$f(x)$	0	↘	-2	↗

$y = f(x)$ に $y = -f(x)$ をつけ加えて、曲線①の概形は右の図のようになる。

曲線で囲まれた部分は x 軸に関して対称である。

$$\text{よって、求める面積 } S \text{ は } S = 2 \int_{-3}^0 (-x\sqrt{x+3}) dx$$

$$\sqrt{x+3} = t \text{ とおくと } x = t^2 - 3, dx = 2t dt$$

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (3 - t^2)t \cdot 2t dt = 4 \left[t^3 - \frac{t^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{5}$$

3

解答 (1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

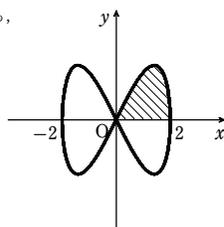
解説

(1) $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ から $y^2 = 3 - 3x^2$ …… ①

①を $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ に代入して $x^2 = \frac{3}{4}$

よって $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ それぞれ、①に代入して4つの交点は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



(2) 図の斜線部分の面積を S とすると、求める面積は $8S$

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} dx - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x dx$$

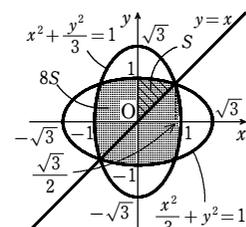
ここで $x = \sqrt{3} \sin \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos \theta \cdot \sqrt{3} \cos \theta d\theta \\ &= \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$\text{よって } S = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

$$\text{ゆえに } 8S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}\pi = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$



4

解答 π

解説

$2x^2 + 2xy + y^2 = 1$ から

$$y^2 + 2xy + 2x^2 - 1 = 0$$

これを y について解くと

$$y = -x \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$1 - x^2 \geq 0$ から、曲線は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲にある。

$f(x) = -x + \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = -x - \sqrt{1 - x^2}$ とすると、定義域内で $f(x) \geq g(x)$

よって

$$S = \int_{-1}^1 \{f(x) - g(x)\} dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ は、半径1の円の面積の $\frac{1}{2}$ を表すから

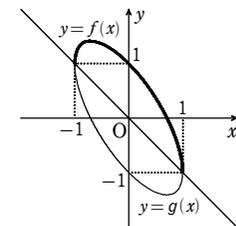
$$S = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

参考 $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ は $x = \sin \theta$ において置換積分で求めることもできる。

5

解答 $\frac{8}{3}$

解説



$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ……①の範囲で $y=0$ となる t の値は $t=0, \frac{\pi}{2}$

また、①の範囲においては、常に $y \geq 0$ である。

$x=4\cos t$ から $\frac{dx}{dt} = -4\sin t, dx = -4\sin t dt$

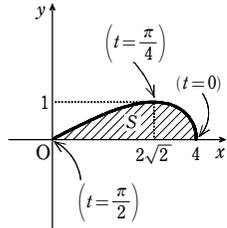
$y=\sin 2t$ から $\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$ であり、 $\frac{dy}{dt} = 0$

とすると $t = \frac{\pi}{4}$

ゆえに、右のような表が得られる(↘は減少、↗は増加を表す)。

t	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	-	-	-	-
x	4	↘	$2\sqrt{2}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	-	-
y	0	↗	1	↘	0

よって $S = \int_0^4 y dx$
 $= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2t \cdot (-4\sin t) dt$
 $= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin t dt$
 $= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt$
 $= 8 \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}$



6

解答 $\frac{3}{5}$

解説

θ を 0 から $\frac{\pi}{3}$ まで変化させると、

点 $(\sin 2\theta, \sin 3\theta)$ は C を、原点から出発して

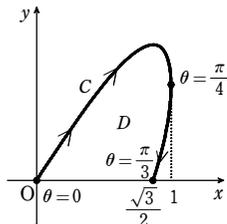
点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ を通り、点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ まで動く。

よって、求める面積は

$S = \int_0^1 y dx$ (y は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の部分)
 $- \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 y dx$ (y は $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ の部分)

$x = \sin 2\theta$ より $dx = 2\cos 2\theta d\theta$ であるから

$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3\theta \cdot 2\cos 2\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3\theta \cdot 2\cos 2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin 3\theta \cos 2\theta d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{\sin(3\theta + 2\theta) + \sin(3\theta - 2\theta)\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 5\theta + \sin \theta) d\theta$
 $= \left[-\frac{\cos 5\theta}{5} - \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{10} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 1 = \frac{3}{5}$



1

解答 6π

解説

(1) $\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$ から $(y-2)^2 = \frac{2^2}{3^2} [9 - (x-3)^2]$

よって $y = 2 \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - (x-3)^2}$

したがって $S = \int_0^6 (y_1 - y_2) dx = \int_0^6 \left[2 + \frac{2}{3} \sqrt{9 - (x-3)^2} - \left(2 - \frac{2}{3} \sqrt{9 - (x-3)^2} \right) \right] dx$
 $= \frac{4}{3} \int_0^6 \sqrt{9 - (x-3)^2} dx$

ここで、 $y = \sqrt{9 - (x-3)^2}$ は、点 $(3, 0)$ を中心とする半径 3 の円の右上部分であるから
 $S = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 = 6\pi$

別解 $x-3 = 3\sin t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = 3\cos t$

よって $S = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot 3\cos t dt$

$= \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t dt$

$= 12 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$

$= 12 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12 \cdot \frac{\pi}{2} = 6\pi$

(2) $S = \int_0^{2\pi} (2 + 2\sin \theta) \cdot 3\sin \theta d\theta = 6 \int_0^{2\pi} (\sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta$

$= 6 \int_0^{2\pi} \left(\sin \theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = 6 \left[-\cos \theta + \frac{1}{2} \theta - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi}$

$= 6(-1 + \pi - (-1)) = 6\pi$

2

解答 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$ (3) 4π

解説

(1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ から

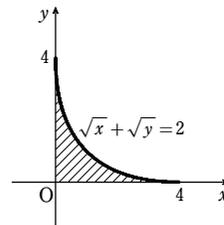
$y = (2 - \sqrt{x})^2 \geq 0$

また、 $\sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \geq 0$ から

$0 \leq x \leq 4$

曲線の概形は、右の図のようになるから

$S = \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 (4 - 4\sqrt{x} + x) dx$
 $= \left[4x - \frac{8}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{8}{3}$



(2) 曲線の式で (x, y) を $(x, -y)$ におき換えても $y^2 = (x+3)x^2$ は成り立つから、この曲線は x 軸に関して対称である。

$y^2 = (x+3)x^2 \geq 0$ から $x \geq -3$

このとき $y = \pm x\sqrt{x+3}$

$f(x) = x\sqrt{x+3}$ とおくと $f'(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	…	-2	…
$f'(x)$	↘	-	0	+
$f(x)$	0	↘	-2	↗

$y=f(x)$ に $y=-f(x)$ をつけ加えて、曲線 $y^2 = (x+3)x^2$ の概形は右の図のようになる。

よって、求める面積 S は $S = 2 \int_{-3}^0 (-x\sqrt{x+3}) dx$

$\sqrt{x+3} = t$ とおくと $x = t^2 - 3, dx = 2t dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	-3	→	0
t	0	→	$\sqrt{3}$

ゆえに $S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (3-t^2) \cdot 2t dt = 4 \int_0^{\sqrt{3}} (3t^2 - t^4) dt$
 $= 4 \left[t^3 - \frac{t^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{5}$

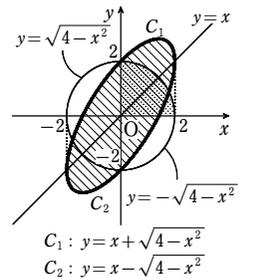
(3) $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$ から

$y^2 - 2xy + 2x^2 - 4 = 0$

ゆえに $y = x \pm \sqrt{4-x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$)

図から、面積は

$S = \int_{-2}^2 \{x + \sqrt{4-x^2} - (x - \sqrt{4-x^2})\} dx$
 $= 2 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$
 $= 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 4\pi$



3

解答 (1) 12π (2) $\pi - 2$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{4}{5}$ (5) $\frac{3}{8}\pi$

解説

(1) 与えられた曲線は楕円であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、第1象限にある。

$x = 4\cos \theta$ から $dx = -4\sin \theta d\theta$

よって、求める面積は

$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx$

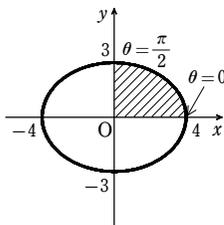
x	0	→	4
θ	$\frac{\pi}{2}$	→	0

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 3 \sin \theta \cdot (-4 \sin \theta) d\theta$$

$$= 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 24 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\pi$$



【参考】 曲線の概形は、図のようになる。

(2) $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ において、 $y=0$ とすると $\theta = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

また、 $y \geq 0$ である。

x と θ の対応は右のようになる。

$x = \tan \theta$ から $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

x	-1	→	1
θ	$-\frac{\pi}{4}$	→	$\frac{\pi}{4}$

よって、求める面積は $S = \int_{-1}^1 y dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta$$

$$= 2 \left[2\theta - \tan \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi - 2$$

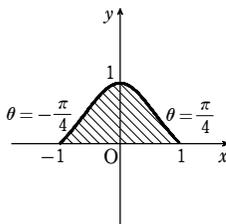
【参考】 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} - 1$ であるから

$$y = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$y' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$-1 \leq x \leq 1$ における増減表は

x	-1	...	0	...	1
y'	↘	+	0	-	↘
y	0	↗	1	↘	0



曲線の概形は、図のようになる。

(3) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $y=0$ とすると $\theta = 0$

また、 $y \geq 0$ である。

x と θ の対応は右のようになる。

$x = \cos^4 \theta$ から $dx = -4\cos^3 \theta \sin \theta d\theta$

x	0	→	1
θ	$\frac{\pi}{2}$	→	0

したがって、求める面積は

$$S = \int_0^1 y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \theta \cdot (-4\cos^3 \theta \sin \theta) d\theta = -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^5 \theta \cos^3 \theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \theta - \sin^7 \theta) \cos \theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \theta - \sin^7 \theta) (\sin \theta)' d\theta$$

$$= 4 \left[\frac{\sin^6 \theta}{6} - \frac{\sin^8 \theta}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

【参考】 曲線の概形は、図のようになる。

また、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より、

$$(\cos^4 \theta)^{\frac{1}{2}} + (\sin^4 \theta)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ であるから、}$$

$$\theta \text{ を消去すると } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

(4) $y=0$ とすると、 $1-t^2=0$ から $t = \pm 1$

また、 $-1 \leq t \leq 1$ で $y \geq 0$

$$t < -1, 1 < t \text{ で } y < 0$$

よって、曲線と x 軸で囲まれるのは $-1 \leq t \leq 1$ の部分である。

$x = t^3$ から $dx = 3t^2 dt$

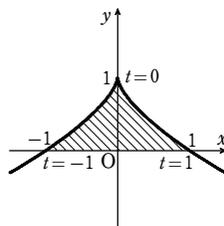
x	-1	→	1
t	-1	→	1

したがって $S = \int_{-1}^1 y dx$

$$= \int_{-1}^1 (1-t^2) \cdot 3t^2 dt$$

$$= 6 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt$$

$$= 6 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5}$$



【参考】 曲線の概形は、図のようになる。

(5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

この曲線は x 軸と y 軸に関して対称で、概形は右の図のようになる。

よって、求める面積 S は第1象限の部分の面積の4倍である。

$x \geq 0, y \geq 0$ のとき $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$x = \cos^3 \theta$ から

$dx = 3\cos^2 \theta \cdot (-\sin \theta) d\theta$

よって

x	0	→	1
θ	$\frac{\pi}{2}$	→	0

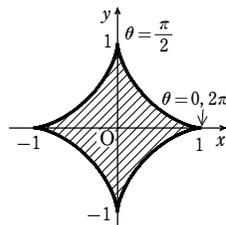
$$S = 4 \int_0^1 y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 \theta \cdot (-3\cos^2 \theta \sin \theta) d\theta$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \cdot \frac{1 - \cos^2 2\theta}{4} d\theta = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4\theta}{8} d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta - \cos 4\theta + \cos 2\theta \cos 4\theta) d\theta$$



$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 2\theta - \cos 4\theta + \frac{\cos 6\theta + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{2} - \cos 4\theta + \frac{\cos 6\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{\sin 6\theta}{12} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} \pi$$

【別解】 [積分の計算]

$$S = 4 \int_0^1 y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 \theta \cdot (-3\cos^2 \theta \sin \theta) d\theta = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 \theta - \sin^6 \theta) d\theta$$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ を用いると

$$S = 12(I_4 - I_0) = 12 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{8} \pi$$

4

【解答】 (1) $\frac{3}{2} \pi$ (2) $\frac{3}{8} \pi$

【解説】

(1) $0 \leq t \leq \pi$ …… ① の範囲で $y=0$ となる t の値は $t=0$

また、①の範囲においては、常に $y \geq 0$ である。

$x = t - \sin t$ から $dx = (1 - \cos t) dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	0	→	π
t	0	→	π

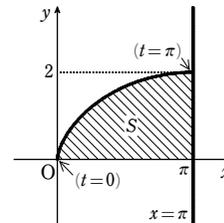
よって $S = \int_0^{\pi} y dx = \int_0^{\pi} y \frac{dx}{dt} dt$

$$= \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$

$$= \int_0^{\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt$$

$$= \left[\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi$$



(2) $\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = 6\sin^2 t \cos t$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6\sin^2 t \cos t}{-\sin t} = -3\sin 2t$

第2講 レベルA

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において $\frac{dy}{dx} \leq 0$

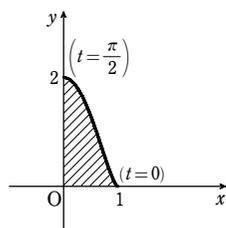
$t=0$ のとき $x=1, y=0$

$t=\frac{\pi}{2}$ のとき $x=0, y=2$

よって、曲線 C の概形は右の図のようになる。

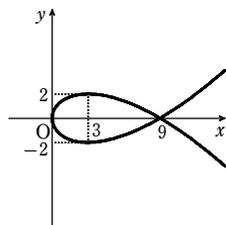
求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^3 t (-\sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^4 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4} - \cos 2t + \frac{1}{4} \cos 4t \right) dt \\ &= \left[\frac{3}{4}t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{16} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\pi \end{aligned}$$



5

【解答】 図, $\frac{72\sqrt{3}}{5}$



【解説】

$x=3t^2, y=3t-t^3$ から $\frac{dx}{dt}=6t, \frac{dy}{dt}=3-3t^2$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3-3t^2}{6t} = -\frac{(t+1)(t-1)}{2t}$

t と $-t$ のときでは y の符号だけが異なるから、曲線の $t \geq 0$ の部分と $t \leq 0$ の部分は x 軸に関して対称である。

そこで、 $t \geq 0$ の範囲で y の増減を調べると、右の表のようになる。

また $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} y = -\infty$

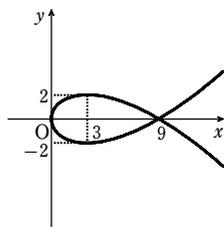
更に、 $y=0$ のとき $t=0, \pm\sqrt{3}$

このとき $x=0, 9$

曲線は右の図のようになる。

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^9 y dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (3t-t^3) \cdot 6t dt \\ &= 12 \int_0^{\sqrt{3}} (3t^2-t^4) dt = 12 \left[t^3 - \frac{t^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 36\sqrt{3} \left(1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{72\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$



6

【解答】 $\frac{3}{2}\pi + 4$

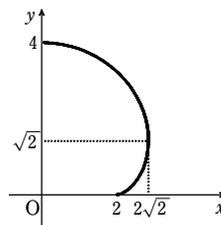
【解説】

曲線の極方程式は $r=2(1+\cos\theta)$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(1+2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+4\cos\theta + 2\cos^2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+4\cos\theta + 1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \left[3\theta + 4\sin\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi + 4 \end{aligned}$$

7

【解答】 (1) 図 (2) 3π



【解説】

(1) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3\sin t + 3\sin 3t = -3\sin t + 3(3\sin t - 4\sin^3 t) \\ &= 6\sin t(1-2\sin^2 t) \\ \frac{dy}{dt} &= 3\cos t - 3\cos 3t = 3\cos t - 3(4\cos^3 t - 3\cos t) \\ &= 12\cos t(1-\cos^2 t) = 12\cos t \sin^2 t \geq 0 \end{aligned}$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\frac{dx}{dt}=0$ となる t の値は $t=\frac{\pi}{4}$

ゆえに、増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-	
x	2	→	$2\sqrt{2}$	←	0
$\frac{dy}{dt}$		+	+	+	
y	0	↑	$\sqrt{2}$	↑	4

したがって、増減表から曲線 C の概形は右の図のようになる。

(2) 求める部分の面積を S とすると

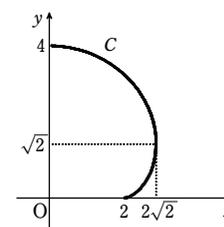
$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 x dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t) dt \\ &= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos 3t dt \\ &\quad + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 3t dt \end{aligned}$$

ここで $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos 3t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos 4t + \cos 2t) dt = \left[\frac{1}{8}\sin 4t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 3t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 6t}{2} dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{12}\sin 6t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

よって $S = 9 \cdot \frac{\pi}{4} - 12 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{\pi}{4} = 3\pi$



第2講 レベルB

1

【解答】 $S = ab\theta$

【解説】

2つの楕円A, Bは直線 $y=x$ に関して対称であるから、楕円Aと直線 $y=x$ の交点の座標と一致する。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \text{①}, \quad y=x \quad \cdots \text{②} \quad \text{とする。}$$

②を①に代入して整理すると $x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

よって、第1象限にある交点の x 座標は

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

楕円Aの $y \geq 0$ の部分は $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

ゆえに $S = \int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$= \frac{b}{a} \int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} \sqrt{a^2-x^2} dx - \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$$

ここで、 $x = a \sin t$ とおくと $dx = a \cos t dt$

x	$0 \rightarrow \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
t	$0 \rightarrow \theta$

よって $\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} \sqrt{a^2-x^2} dx = \int_0^\theta a \cos t \cdot a \cos t dt$

$$= a^2 \int_0^\theta \frac{1+\cos 2t}{2} dt = a^2 \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^\theta = \frac{1}{2}a^2\theta + \frac{1}{2}a^2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2\theta + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}a^2\theta + \frac{a^3b}{2(a^2+b^2)}$$

ゆえに $\frac{S}{2} = \frac{1}{2}ab\theta + \frac{a^3b}{2(a^2+b^2)} - \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$ したがって $S = ab\theta$

2

【解答】 (1) $y = x + 2 - \frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{-\pi^2 + 2\pi + 4}{8}$

【解説】

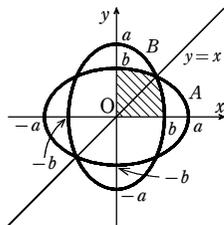
(1) $\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ よって、 $\cos\theta \neq 1$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

ここで、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $x = \frac{\pi}{2} - 1, y = 1$ となる。

このとき $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \frac{\pi}{2}} = 1$

よって、接線の傾きは1であるから、接線 ℓ の方程式は

$$y - 1 = x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \quad \text{すなわち} \quad y = x + 2 - \frac{\pi}{2}$$



(2) Cと ℓ のグラフは右図のようになる。

よって、求める面積Sは

$$S = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\pi}{2} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} y dx$$

$$= \frac{(\pi-2)(6-\pi)}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} y dx$$

$$x = \theta - \sin\theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta \quad \text{で、} \quad x \text{ と } \theta \text{ の対}$$

応は右のようになるから

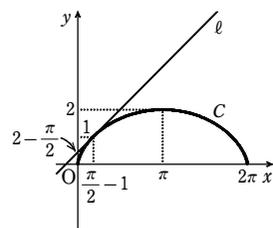
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-1} y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta) d\theta$$

ゆえに $S = \frac{-\pi^2 + 8\pi - 12}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1) d\theta$

$$= \frac{-\pi^2 + 8\pi - 12}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - 2\cos\theta + \frac{3}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{-\pi^2 + 8\pi - 12}{8} - \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta - 2\sin\theta + \frac{3}{2}\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-\pi^2 + 8\pi - 12}{8} - \left(-2 + \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{-\pi^2 + 2\pi + 4}{8}$$



x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2} - 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

3

【解答】 $\frac{1}{4}$

【解説】

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}t^{-3}(1-t)^3 + t^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4}(1-t)^{-\frac{1}{4}} \cdot (-1) = \frac{1}{4}t^{-3}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-4t)$$

$0 < t < 1$ において $\frac{dx}{dt} = 0$ とすると $t = \frac{1}{4}$

t	0	...	$\frac{1}{4}$...	1
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-	
x	0	↗	極大	↘	0

$x = t^{\frac{1}{4}}(1-t)^3$ の増減表は右のようになる。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^4 + t^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}(3-4t)$$

$0 < t < 1$ において $\frac{dy}{dt} = 0$ とすると $t = \frac{3}{4}$

t	0	...	$\frac{3}{4}$...	1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	0	↗	極大	↘	0

$y = t^{\frac{3}{4}}(1-t)^4$ の増減表は右のようになる。

また、 $y = x$ とすると $t^{\frac{3}{4}}(1-t)^4 = t^{\frac{1}{4}}(1-t)^3$

$0 < t < 1$ のとき、

$$t^{\frac{3}{4}} > 0, (1-t)^4 > 0 \quad \text{であるから} \quad t^{\frac{1}{2}} = (1-t)^{\frac{3}{2}}$$

ゆえに $t = \frac{1}{2}$

よって、曲線の概形は右の図のようになる。

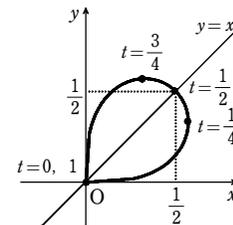
求める面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x dy - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} y dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}}(1-t)^3 \cdot \frac{dy}{dt} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{4}}(1-t)^4 \cdot \frac{dx}{dt} dt - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (3-4t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-4t) dt - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} [3t - 2t^2]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} [t - 2t^2]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



1

解答 $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$

解説

この容器の、底から $x \text{ cm}$ の高さにおける断面積は

$$\frac{1}{2}x^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

求める体積 V は $V = \int_0^3 \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^3\text{)}$

2

解答 $\frac{\pi}{2}$

解説

$P(x, \sin x)$ とすると

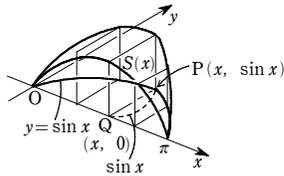
$$PQ = \sin x$$

正方形の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x) = PQ^2 = \sin^2 x$$

よって、求める体積 V は

$$V = \int_0^{\pi} S(x) dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$



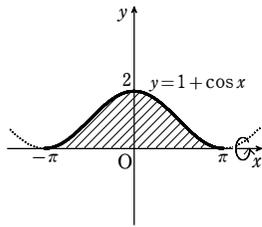
3

解答 (1) $3\pi^2$ (2) 24π

解説

(1) $1 + \cos x = 0$ とすると、 $-\pi \leq x \leq \pi$ では $x = \pm\pi$

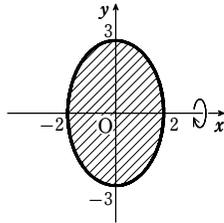
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x)^2 dx = 2\pi \int_0^{\pi} (1 + \cos x)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} (1 + 2\cos x + \cos^2 x) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = 2\pi \cdot \frac{3}{2}\pi = 3\pi^2 \end{aligned}$$



(2) $y=0$ のとき $x = \pm 2$

また $y^2 = \frac{36-9x^2}{4} = 9 - \frac{9}{4}x^2$

$$\begin{aligned} \text{よって } V &= \pi \int_{-2}^2 y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 \left(9 - \frac{9}{4}x^2 \right) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 \left(9 - \frac{9}{4}x^2 \right) dx \\ &= 2\pi \left[9x - \frac{3}{4}x^3 \right]_0^2 = 24\pi \end{aligned}$$



4

解答 $\frac{\pi(\pi+6)}{4}$

解説

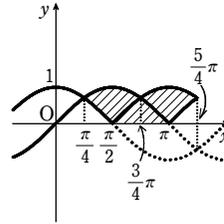
$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ の範囲で、 $\sin x = \cos x$ を解くと $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ の範囲で、 $\sin x = -\cos x$ を解くと $x = \frac{3\pi}{4}$

題意の回転体は、右の図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転すると得られる。

また、斜線部分は直線 $x = \frac{3\pi}{4}$ に関して対称であるから

$$\begin{aligned} V &= 2 \left(\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 x dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \right) \\ &= 2\pi \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \right) \\ &= \pi \left(\left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi(\pi+6)}{4} \end{aligned}$$



5

解答 $\pi^3 - 4\pi$

解説

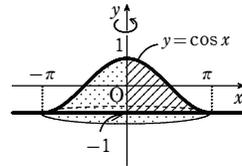
右図から、体積は $V = \pi \int_{-1}^1 x^2 dy$

$y = \cos x$ から $dy = -\sin x dx$

y と x の対応は次のようになる。

y	-1	1
x	π	0

$$\begin{aligned} \text{よって } V &= \pi \int_{\pi}^0 (-x^2 \sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \\ &= \pi \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x \cos x dx \\ &= \pi \left(\pi^2 + \left[2x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \sin x dx \right) \\ &= \pi \left(\pi^2 + \left[2 \cos x \right]_0^{\pi} \right) = \pi^3 - 4\pi \end{aligned}$$



6

解答 証明略、 $2\pi^2$

解説

求める体積は

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2\pi \left(\left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = 2\pi \left(\pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \right) = 2\pi^2$$

1

解答 $\frac{96}{5} \pi \text{ cm}^3$

解説

底からの高さが $x \text{ cm}$ の平面で切った切り口の面積は $\pi \sqrt[3]{x^2} \text{ cm}^2$

したがって $V = \int_0^8 \pi \sqrt[3]{x^2} dx = \pi \left[\frac{3}{5} x^{5/3} \right]_0^8 = \frac{96}{5} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$

2

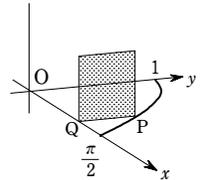
解答 $\frac{\pi}{4}$

解説

$PQ = \cos x$ であるから、線分 PQ を 1 辺とする正方形 L の面積は $PQ^2 = \cos^2 x$

よって $V = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$



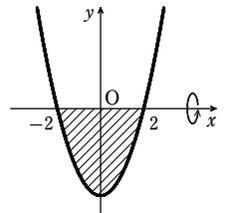
3

解答 (1) $\frac{512}{15} \pi$ (2) $\frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$ (3) 24π

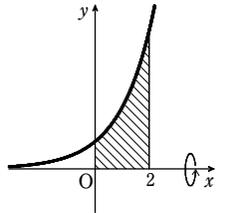
解説

(1) $x^2 - 4 = 0$ とすると $x = -2, 2$

$$\begin{aligned} \text{よって } V &= \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 4)^2 dx \\ &= \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8}{3}x^3 + 16x \right]_0^2 = \frac{512}{15} \pi \end{aligned}$$

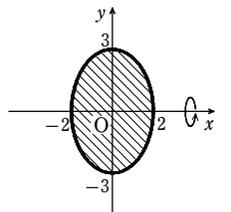


(2) $V = \pi \int_0^2 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$



(3) 曲線は楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ である。

$$\begin{aligned} \text{よって } V &= 2 \cdot \pi \int_0^2 y^2 dx = 2\pi \int_0^2 9 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= 18\pi \left[x - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = 24\pi \end{aligned}$$



4

解答 $\frac{(2\pi+3\sqrt{3})\pi}{8}$

解説

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ の範囲で $\sin x = \sin 2x$ とすると

$$\sin x(1-2\cos x) = 0$$

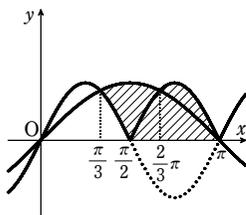
よって $x = \frac{\pi}{3}, \pi$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ の範囲で $\sin x = -\sin 2x$ とすると

$$\sin x(1+2\cos x) = 0$$

よって $x = \frac{2}{3}\pi, \pi$

題意の回転体は、図の斜線部分を x 軸の周りに1回転すると得られる。



したがって $V = \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \sin^2 x dx + \pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (-\sin 2x)^2 dx - \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 2x dx$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx + \pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 4x}{2} dx - \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1-\cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} + \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} - \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \right) = \frac{(2\pi+3\sqrt{3})\pi}{8}$$

5

解答 (1) $\frac{3(4\sqrt[3]{2}-1)\pi}{7}$ (2) $\frac{e^2-1}{2}\pi$

解説

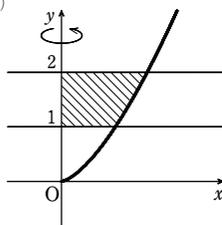
(1) $y = x\sqrt{x}$ から $x = y^{\frac{2}{3}}$

$$V = \pi \int_1^2 (y^{\frac{2}{3}})^2 dy = \pi \int_1^2 y^{\frac{4}{3}} dy = \pi \left[\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} \right]_1^2 = \frac{3(4\sqrt[3]{2}-1)\pi}{7}$$

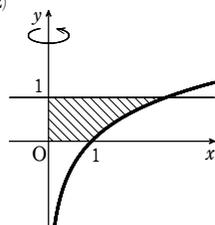
(2) $y = \log x$ から $x = e^y$

$$V = \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy = \pi \int_0^1 e^{2y} dy = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}\pi$$

(1)



(2)



6

解答 2π

解説

求める体積は

$$2\pi \int_0^1 x e^x dx = 2\pi \left(\left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = 2\pi \left(e - \left[e^x \right]_0^1 \right) = 2\pi(e - (e-1)) = 2\pi$$

1

解答 $\frac{203\sqrt{3}}{30}$

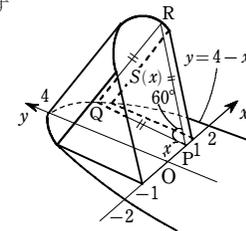
解説

点 $P(x, 0)$ に対する正三角形 PQR の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} PQ^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (4-x^2)^2$$

したがって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} (16-8x^2+x^4) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(16 - \frac{8}{3} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{203\sqrt{3}}{30} \end{aligned}$$



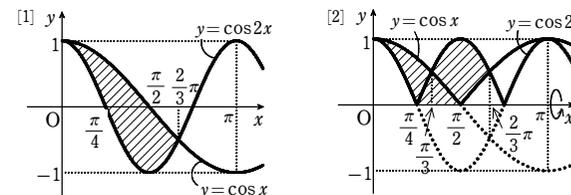
2

解答 $V = \frac{\pi(\pi+3\sqrt{3})}{8}$

解説

$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ の範囲で、曲線 $y = \cos x$ と曲線 $y = \cos 2x$ で囲まれた図形は、下の図[1]の斜線部分のようになる。

この2曲線の $y \leq 0$ の部分を x 軸に関して折り返すと、下の図[2]のようになる。



求める体積 V は、図[2]の斜線部分を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx + \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (-\cos 2x)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx - \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (-\cos x)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2x) dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (1+\cos 4x) dx \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x) dx - \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (1+\cos 2x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi(\pi+3\sqrt{3})}{8}$$

[3]

[解答] (1) $\pi \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$ (2) $\frac{\pi^2}{12}$ (3) $(1 - \log 2)\pi$ (4) $(e-2)\pi$ (5) 24π

(6) $\frac{3}{10}\pi$

[解説]

(1) 2曲線の交点の x 座標は $2\sin 2x = \tan x$ を解いて

$$4\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

よって $\sin x(4\cos^2 x - 1) = 0$

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ であるから $\sin x = 0, \cos x = \frac{1}{2}$

これを解いて $x = 0, \frac{\pi}{3}$

ゆえに、2曲線の位置関係は右図のようになり、

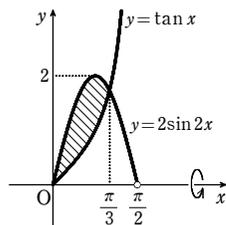
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき $2\sin 2x \geq \tan x$

よって $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} ((2\sin 2x)^2 - \tan^2 x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\sin^2 2x - \tan^2 x) dx$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2(1 - \cos 4x) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(3 - 2\cos 4x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \pi \left[3x - \frac{1}{2} \sin 4x - \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \pi \left(\pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \right) = \pi \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$



(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$\cos x \geq -\frac{2}{\pi}x + 1 \geq 0$$

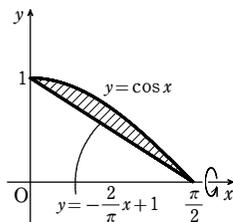
よって

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \left(-\frac{2}{\pi}x + 1 \right)^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x - 1 \right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{4}{3\pi^2}x^3 + \frac{2}{\pi}x^2 - \frac{1}{2}x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{12}$$



[別解] 曲線 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と x 軸および y 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに1回

転してできる立体の体積を V_1 とし、底面の半径が1、高さが $\frac{\pi}{2}$ の直円錐の体積を V_2 とすると

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx - \frac{\pi^2}{6}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

(3) $y = \log(x^2 + 1)$ から $x^2 + 1 = e^y$

すなわち $x^2 = e^y - 1$

$0 \leq x \leq 1$ では $0 \leq y \leq \log 2$ である。

よって $V = \pi \int_0^{\log 2} x^2 dy$

$$= \pi \int_0^{\log 2} (e^y - 1) dy$$

$$= \pi [e^y - y]_0^{\log 2} = \pi(2 - \log 2 - 1)$$

$$= (1 - \log 2)\pi$$

(4) $y = e^x$ から $x = \log y$

y 軸との交点の y 座標は $x = 0$ とすると

$0 = \log y$ から $y = 1$

よって $V = \pi \int_1^e (\log y)^2 dy$

$$= \pi \left[y(\log y)^2 \Big|_1^e - \int_1^e y \cdot (2 \log y \cdot \frac{1}{y}) dy \right]$$

$$= \pi(e - 2 \int_1^e \log y dy)$$

$$= \pi(e - 2[y \log y - y]_1^e)$$

$$= (e - 2)\pi$$

(5) $x = 0$ とすると $y = \pm 2$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ から } x^2 = 9 - \frac{9}{4}y^2$$

よって $V = \pi \int_{-2}^2 x^2 dy = 2\pi \int_0^2 \left(9 - \frac{9}{4}y^2 \right) dy$

$$= 2\pi \left[9y - \frac{3}{4}y^3 \right]_0^2 = 24\pi$$

(6) $y = \sqrt{x}$ から $x = y^2$

$y = x^2$ に代入して $y = y^4$

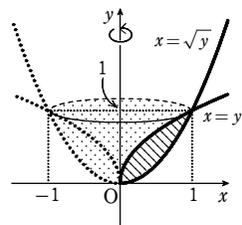
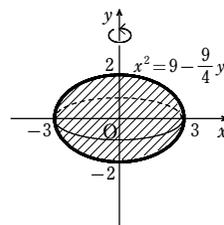
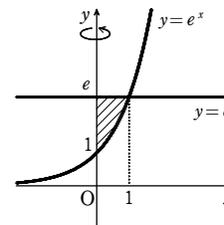
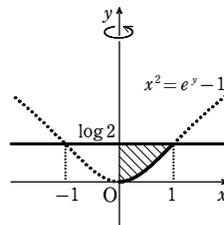
よって $y(y^3 - 1) = 0$

ゆえに $y = 0, 1$

よって $V = \pi \int_0^1 y dy - \pi \int_0^1 y^4 dy$

$$= \pi \int_0^1 (y - y^4) dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10}\pi$$



[4]

[解答] (1) $\frac{48\sqrt{3}}{5}\pi$ (2) $\frac{22+12\sqrt{3}}{3}\pi$

[解説]

(1) $y = -x^2 + 2x + 2$ から $y = -(x-1)^2 + 3$

$-(x-1)^2 + 3 = 0$ とすると $x = 1 \pm \sqrt{3}$

よって、 D は右の図の斜線部分であり、これは直線

$x = 1$ に関して対称である。

ゆえに、求める体積を V_1 とすると

$$V_1 = 2\pi \int_1^{1+\sqrt{3}} [-(x-1)^2 + 3]^2 dx$$

$$= 2\pi \int_1^{1+\sqrt{3}} \{(x-1)^4 - 6(x-1)^2 + 9\} dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{5}(x-1)^5 - 2(x-1)^3 + 9(x-1) \right]_1^{1+\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{5} \cdot 9\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} + 9 \cdot \sqrt{3} \right)$$

$$= \frac{48\sqrt{3}}{5}\pi$$

(2) $y = -(x-1)^2 + 3$ から $(x-1)^2 = 3 - y$

$x \geq 1$ のとき $x = 1 + \sqrt{3 - y}$

$x \leq 1$ のとき $x = 1 - \sqrt{3 - y}$

よって、求める体積を V_2 とすると

$$V_2 = \pi \int_0^3 (1 + \sqrt{3 - y})^2 dy - \pi \int_0^3 (1 - \sqrt{3 - y})^2 dy$$

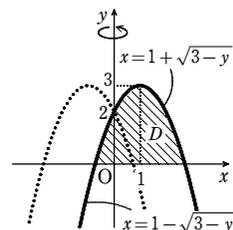
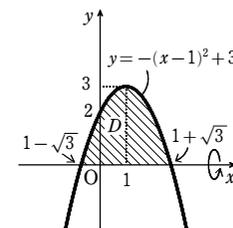
$$= \pi \int_0^3 (4 - y + 2\sqrt{3 - y}) dy$$

$$- \pi \int_0^3 (4 - y - 2\sqrt{3 - y}) dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} - \frac{4}{3}(3 - y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 - \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}(3 - y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 3\sqrt{3} + 4 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{4}{3} \right)$$

$$= \frac{22 + 12\sqrt{3}}{3}\pi$$



[参考] 一般に、 $a \leq x \leq b$ において $f(x) \geq 0$ であるとき、曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) と 2 直線 $x = a, x = b$ および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V_0 は

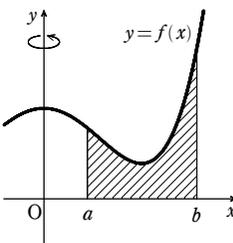
$$V_0 = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

で与えられる。

これを利用すると、求める体積 V_2 は

$$V_2 = 2\pi \int_0^{1+\sqrt{3}} x(-x^2 + 2x + 2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^{1+\sqrt{3}} (-x^3 + 2x^2 + 2x) dx$$



$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^{1+\sqrt{3}} \\
 &= 2\pi \left\{ -\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})^4 + \frac{2}{3}(1+\sqrt{3})^3 + (1+\sqrt{3})^2 \right\} \\
 &= \frac{22+12\sqrt{3}}{3}\pi
 \end{aligned}$$

5

【解答】 (1) $\frac{8}{5}\pi$ (2) $\pi(4-e)$ (3) $\pi \left\{ \frac{1}{27}\pi^2 + \frac{3-\sqrt{3}}{3}\pi - 1 \right\}$

【解説】

(1) $y = x^3 - 2x^2 + 3 = (x+1)(x^2 - 3x + 3)$

$$x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

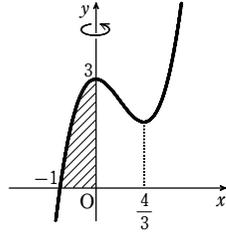
$$y' = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

よって、題意の部分は右図の斜線部分になる。

ゆえに $V = \pi \int_0^3 x^2 dy$

ここで、 $y' = 3x^2 - 4x$ から $dy = (3x^2 - 4x)dx$
 y と x の対応は右ようになるから

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^3 x^2 dy = \pi \int_{-1}^0 x^2(3x^2 - 4x)dx \\
 &= \pi \int_{-1}^0 (3x^4 - 4x^3)dx = \pi \left[\frac{3}{5}x^5 - x^4 \right]_{-1}^0 = \frac{8}{5}\pi
 \end{aligned}$$



y	0	→ 3
x	-1	→ 0

【別解】 (バウムクーヘン分割による計算)

$-1 \leq x \leq 0$ のとき $x \leq 0$, $f(x) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_{-1}^0 (-x)y dx = -2\pi \int_{-1}^0 x(x^3 - 2x^2 + 3)dx \\
 &= -2\pi \int_{-1}^0 (x^4 - 2x^3 + 3x)dx = -2\pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{8}{5}\pi
 \end{aligned}$$

(2) $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{e}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{2}e, f(0) = \frac{e}{2}$$

よって、題意の部分は右図の斜線部分になる。

$y = f(x)$ から $dy = f'(x)dx$

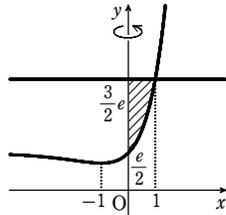
ゆえに $V = \pi \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3}{2}e} x^2 dy = \pi \int_0^1 x^2 f'(x) dx$

$$= \pi \left[x^2 f(x) \right]_0^1 - 2\pi \int_0^1 x f(x) dx$$

$$= \frac{3}{2}\pi e - 2\pi \int_0^1 \left(x^2 e^x + \frac{e}{2} x \right) dx$$

$$= \frac{3}{2}\pi e - 2\pi \int_0^1 x^2 e^x dx - \pi e \int_0^1 x dx$$

ここで $\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2 \left(\left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right)$
 $= e - 2 \left(e - \left[e^x \right]_0^1 \right) = e - 2(e - (e - 1)) = e - 2$



y	$\frac{e}{2}$	→ $\frac{3}{2}e$
x	0	→ 1

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

したがって $V = \frac{3}{2}\pi e - 2\pi(e - 2) - \frac{1}{2}\pi e = \pi(4 - e)$

【別解】 (バウムクーヘン分割による計算)

$0 \leq x \leq 1$ のとき $f(x) > 0$, $f(1) = \frac{3}{2}e$ であるから

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{3}{2}e - 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = \frac{3}{2}\pi e - 2\pi \int_0^1 x \left(x e^x + \frac{e}{2} \right) dx \\
 &= \frac{3}{2}\pi e - 2\pi \int_0^1 x^2 e^x dx - \pi e \int_0^1 x dx \quad \text{以下、解答と同様。}
 \end{aligned}$$

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における曲線 $y = \cos x$ と直線 $y = \frac{3}{2\pi}x$ の交点の x 座標は、

$$\cos x = \frac{3}{2\pi}x \text{ から } x = \frac{\pi}{3}$$

このとき、 $y = \frac{1}{2}$ よって交点は $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$

したがって

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 dy - \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

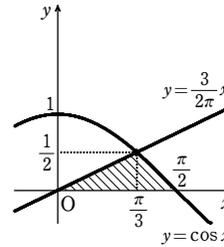
$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 (-\sin x) dx - \frac{\pi^3}{54}$$

$$= \pi \left[x^2 \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x \cos x dx - \frac{\pi^3}{54}$$

$$= \pi \left\{ \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left[2x \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}} 2 \sin x dx \right\} - \frac{\pi^3}{54}$$

$$= \pi \left\{ \frac{\pi^2}{18} - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi + \left[2(-\cos x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\} - \frac{\pi^3}{54}$$

$$= \pi \left\{ \frac{\pi^2}{18} - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \pi - 1 \right\} - \frac{\pi^3}{54} = \pi \left\{ \frac{1}{27}\pi^2 + \frac{3-\sqrt{3}}{3}\pi - 1 \right\}$$



1

【解答】 $h=1, \alpha = \frac{\pi}{6}$

【解説】

図のように、座標軸をとる。

流れ出た水の量は、右の図の網目の部分を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積に等しい。

その体積が全体の水の量の $\frac{11}{16}$ に等しいから

$$\pi \int_0^h (\sqrt{4-x^2})^2 dx = \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3$$

すなわち $\int_0^h (4-x^2) dx = \frac{11}{3}$

ここで $\int_0^h (4-x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^h = 4h - \frac{h^3}{3}$ したがって $4h - \frac{h^3}{3} = \frac{11}{3}$

整理して $h^3 - 12h + 11 = 0$ ゆえに $(h-1)(h^2 + h - 11) = 0$

よって $h=1, \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ $0 < h < 2$ であるから $h=1$

このとき $\alpha = \frac{\pi}{6}$

2

【解答】 (1) 順に $a = \frac{1}{2e}, y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}$ (2) $\left(2 - \frac{29}{24}\sqrt{e}\right)\pi$ (3) $\frac{e}{24}\pi$

【解説】

(1) $y = \log x$ から $y' = \frac{1}{x}$, $y = ax^2$ から $y' = 2ax$

共有点 T の x 座標を $t (t > 0)$ とすると、共有点 T で共通の接線をもつための条件は

$$\log t = at^2 \dots\dots \textcircled{1}, \frac{1}{t} = 2at \dots\dots \textcircled{2}$$

② から $2at^2 = 1$ このとき、①は $\log t = \frac{1}{2}$

よって $t = \sqrt{e}$ ゆえに $a = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2e}$

点 T の座標は $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$, 点 T における接線の傾きは $\frac{1}{\sqrt{e}}$ であるから、接線 l の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e}) \text{ すなわち } y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}$$

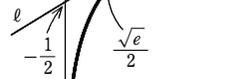
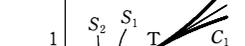
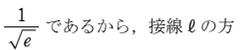
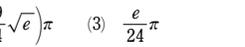
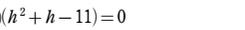
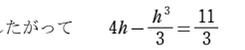
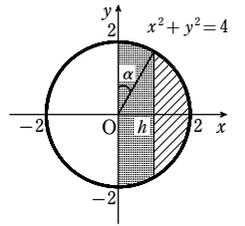
(2) l と x 軸との交点の x 座標は、 $\frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2} = 0$ から

$$x = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

l の $\frac{\sqrt{e}}{2} \leq x \leq \sqrt{e}$ の部分と x 軸、直線 $x = \sqrt{e}$ で

囲まれた図形を x 軸の周りに1回転させてできる立体は、底面が半径 $\frac{1}{2}$ の円、高さが $\sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$ の直円錐であるから、求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{e}}{2} - \pi \int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$$



$$= \frac{1}{24}\pi\sqrt{e} - \pi \left[x(\log x)^2 \Big|_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x \cdot (2\log x) \cdot \frac{1}{x} dx \right]$$

$$= \frac{1}{24}\pi\sqrt{e} - \frac{1}{4}\pi\sqrt{e} + 2\pi \left[x\log x - x \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= -\frac{5}{24}\pi\sqrt{e} + 2\pi \left(-\frac{1}{2}\sqrt{e} + 1 \right) = \left(2 - \frac{29}{24}\sqrt{e} \right)\pi$$

(3) $\ell: x = \sqrt{e}\left(y + \frac{1}{2}\right)$, $C_2: x = \sqrt{\frac{y}{a}} = \sqrt{2ey}$ であるから、求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{e}\left(y + \frac{1}{2}\right) \right\}^2 dy - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2ey})^2 dy = \pi e \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - 2y \right\} dy$$

$$= \pi e \left[\frac{1}{3}\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 - y^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \pi e \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) = \frac{e}{24}\pi$$

[3]

解答 $t = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$

解説

$0 < t < 3 < \pi$ であるから、与えられた連立不等式の表す領域は、右図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。

曲線 $y = \sin x$ と直線 $y = t - x$ の共有点の x 座標を α とすると $\sin \alpha = t - \alpha$ かつ $0 < \alpha < t$ …… ①

このとき $V(t) = \pi \int_0^\alpha \sin^2 x dx + \frac{1}{3}\pi \cdot \sin^2 \alpha \cdot (t - \alpha)$

① から $V(t) = \pi \int_0^\alpha \sin^2 x dx + \frac{1}{3}\pi \sin^3 \alpha$

両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{d\alpha} \left(\pi \int_0^\alpha \sin^2 x dx + \frac{1}{3}\pi \sin^3 \alpha \right) \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

$$= \left(\pi \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\pi \cdot 3\sin^2 \alpha \cos \alpha \right) \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

$$= \pi \sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{dt} \quad \dots\dots ②$$

ここで、① より $t = \alpha + \sin \alpha$ …… ③ よって $\frac{dt}{d\alpha} = 1 + \cos \alpha$

$0 < \alpha < \pi$ より、 $1 + \cos \alpha \neq 0$ であるから $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha}$

これを②に代入して $\frac{d}{dt}V(t) = \pi \sin^2 \alpha$

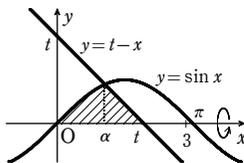
ゆえに、 $\frac{d}{dt}V(t) = \frac{\pi}{4}$ とすると $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$ よって $\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$

$0 < \alpha < \pi$ から $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき、③ から $t = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ これは $0 < t < 3$ を満たすから、適する。

$\alpha = \frac{5}{6}\pi$ のとき、③ から $t = \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}$ これは $0 < t < 3$ を満たさないから、不適。

したがって $t = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$



[4]

解答 $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$

解説

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を x について解くと

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

ここで、 $x_1 = -a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$, $x_2 = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$

とおく。

囲まれた図形は、 x 軸に関して対称であるから、

求める体積 V は

$$V = 2\pi \int_0^b \{ (2a - x_1)^2 - (2a - x_2)^2 \} dy$$

$$= 8a\pi \int_0^b (x_2 - x_1) dy = 16a^2\pi \int_0^b \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy$$

ここで、 $y = b \sin \theta$ とおくと $dy = b \cos \theta d\theta$

よって

$$V = 16a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot b \cos \theta d\theta = 16a^2b\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 8a^2b\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 8a^2b\pi \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2b\pi^2$$

また、 $a^2 + b^2 = 1$ から $a^2 = 1 - b^2$ …… ①

$a > 0$ であるから $1 - b^2 > 0$ これと $b > 0$ であるから $0 < b < 1$

V の式に①を代入すると $V = 4(1 - b^2)b\pi^2 = 4\pi^2(-b^3 + b)$

ゆえに $V' = 4\pi^2(-3b^2 + 1)$

$V' = 0$ とすると $-3b^2 + 1 = 0$

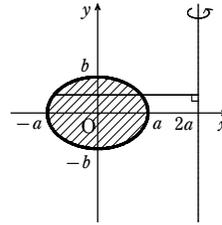
$0 < b < 1$ であるから $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$0 < b < 1$ における V の増減表は右のようになり、

$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、 V は極大かつ最大となる。

$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、①と $a > 0$ から $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$

したがって V の最大値は $4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \pi^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9} \pi^2$



θ	$0 \rightarrow b$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

b	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
V'		+	0	-	
V		↗	極大	↘	

[1]

解答 $\pi(4 - \pi)$

解説

$y = 0$ とすると $\cos 2\theta = 0$ ($-\pi < 2\theta < \pi$)

ゆえに $2\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$

このとき $x = \pm 1$ (複号同順)

θ の値に対応した x, y の値の変化は表のようになり、曲線と x 軸

で囲まれるのは $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

のときである。

$x = \tan \theta$ から $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

よって、求める体積は

$$V = \pi \int_{-1}^1 y^2 dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 \theta - 1)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4\cos^2 \theta - 4 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta$$

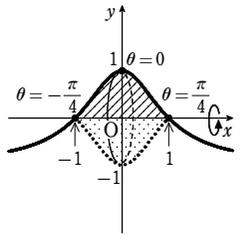
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cos 2\theta - 2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta$$

$$= 2\pi \left[\sin 2\theta - 2\theta + \tan \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{\pi}{2} + 1 \right) = \pi(4 - \pi)$$

θ	$-\frac{\pi}{2}$...	$-\frac{\pi}{4}$...	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{\pi}{2}$
x	↙		-1	↗	0	↖	1	↗	
y	↖		0	↗	1	↘	0	↖	

x	-1	→	1
θ	$-\frac{\pi}{4}$	→	$\frac{\pi}{4}$



[2]

解答 $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$

解説

曲線 $y = x^2 - x$ 上の点 $P(x, y)$ から直線 $y = x$ に垂線 PQ を下ろす。

$OQ = t$ とすると、点 Q の座標は

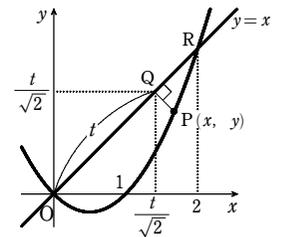
$$Q \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

よって $y - \frac{t}{\sqrt{2}} = -\left(x - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ から

$$x + y = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}t$$

したがって $t = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{x + (x^2 - x)}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots ①$$



第4講 例題

また、 $PQ = \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x^2-2x|}{\sqrt{2}}$

直線 $y=x$ と曲線 $y=x^2-x$ との交点 R の座標は

$x=x^2-x$ から $x=0, 2$ よって R(2, 2) ゆえに $OR=2\sqrt{2}$

① から $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{\sqrt{2}}x$

よって $V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} PQ^2 dt = \pi \int_0^2 \left(\frac{|x^2-2x|}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} x dx$
 $= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^2 (x^5 - 4x^4 + 4x^3) dx$
 $= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{4}{5}x^5 + x^4 \right]_0^2$
 $= \frac{8\sqrt{2}}{15} \pi$

t	0	→	2√2
x	0	→	2

3

解答 $6\sqrt{3}$

解説

$\frac{dx}{dt} = 6t, \frac{dy}{dt} = 3-3t^2$ であるから

$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = (6t)^2 + (3-3t^2)^2 = 3^2(4t^2 + (1-t^2)^2) = 3^2(1+2t^2+t^4) = 3^2(1+t^2)^2$

$L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_0^{\sqrt{3}} 3(1+t^2) dt = 3 \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

4

解答 $2\log 3 - 1$

解説

$y' = \frac{-2x}{1-x^2}$ であるから $1+y'^2 = 1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2} \right)^2 = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^2$

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0$ であるから

$L = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1-x^2} - 1 \right) dx$
 $= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 1 \right) dx = 2 \left[\log|1+x| - \log|1-x| - x \right]_0^{\frac{1}{2}}$
 $= 2 \left[\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - x \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\log 3 - 1$

5

解答 $\frac{61}{27}$

解説

第4講 例題演習

1

解答 $\frac{2}{21} \pi$

解説

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $y=0$ とすると $\theta=0, \frac{\pi}{2}$

また、 $y \geq 0$ である。

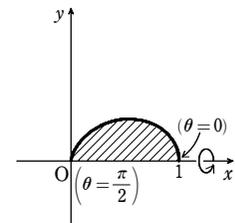
x と θ の対応は右ようになる。

$x = \cos^3 \theta$ から $dx = -3\cos^2 \theta \sin \theta d\theta$

したがって、求める体積は

$V = \pi \int_0^1 y^2 dx$
 $= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^4 \theta \sin^2 \theta (-3\cos^2 \theta \sin \theta) d\theta$
 $= 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta \sin^3 \theta d\theta$
 $= 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$
 $= 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-(\cos^6 \theta - \cos^8 \theta)(\cos \theta)'] d\theta = 3\pi \left[-\frac{\cos^7 \theta}{7} + \frac{\cos^9 \theta}{9} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{21} \pi$

x	0	→	1
θ	π/2	→	0



2

解答 $\frac{32}{15} \pi$

解説

$\frac{x^2}{\sqrt{2}} - x = x$ とすると $x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$

これを解いて $x=0, 2\sqrt{2}$

よって、放物線と直線の交点は

$(0, 0), (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

原点を O、点 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ を A とすると $OA=4$

$0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$ とし、放物線上の点 $P(x, \frac{x^2}{\sqrt{2}} - x)$ から

直線 $y=x$ に垂線 PH を下ろし、 $PH=h, OH=t$ とおく。

H を通り、直線 $y=x$ に垂直な平面による立体の切り口の面積を $S(t)$ とすると

$V = \int_0^4 S(t) dt = \pi \int_0^4 h^2 dt$

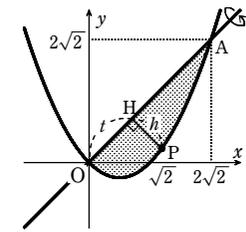
ここで $h = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[x - \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} - x \right) \right] = \frac{2\sqrt{2}x - x^2}{2}$

また $t = \sqrt{2}x - h = \frac{1}{2}x^2$

t	0	→	4
x	0	→	2√2

したがって $dt = x dx$

よって $V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{2}x - x^2}{2} \right)^2 x dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{2\sqrt{2}} (x^5 - 4\sqrt{2}x^4 + 8x^3) dx$
 $= \frac{\pi}{4} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{5}x^5 + 2x^4 \right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{32}{15} \pi$



3

解答 (1) 10 (2) $4\sqrt{3}$ (3) $2\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$

解説

$$(1) L = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{(-3)^2 + 4^2} dt = 5 \int_0^2 dt = 10$$

$$(2) L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2\sqrt{3}t)^2 + (3t^2-1)^2} dt \\ = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(3t^2+1)^2} dt = \int_0^{\sqrt{3}} (3t^2+1) dt = \left[t^3+t\right]_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2+2\cos 2t$$

$$\text{ゆえに} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (-2\sin 2t)^2 + (2+2\cos 2t)^2 = 8(1+\cos 2t) = 16\cos^2 t$$

$$\text{よって} \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos t dt = \left[4\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

$$(4) \frac{dx}{d\theta} = e^\theta \cos \theta - e^\theta \sin \theta = e^\theta(\cos \theta - \sin \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = e^\theta \sin \theta + e^\theta \cos \theta = e^\theta(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$\text{ゆえに} \quad \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2e^{2\theta}$$

$$\text{よって} \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^\theta d\theta = \sqrt{2} \left[e^\theta\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$$

4

解答 (1) $\frac{59}{24}$ (2) $\frac{\pi}{3}$

解説

$$(1) y' = x^2 - \frac{1}{4x^2} \text{ であるから} \quad 1+y'^2 = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{1}{4x^2} \geq 0 \text{ であるから} \quad L = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{59}{24}$$

$$(2) y' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \text{ であるから} \quad 1+y'^2 = 1 + \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ のとき, } \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0 \text{ であるから}$$

$$L = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$x = 2\sin \theta \text{ とおくと } dx = 2\cos \theta d\theta$$

x と θ の対応は右のようにとれる。

この範囲において $\cos \theta \geq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2 \theta)} = 2\sqrt{\cos^2 \theta} = 2\cos \theta$$

$$\text{よって} \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{2\cos \theta} \cdot 2\cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = 2 \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$$

5

解答 $\sqrt{2}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)$

解説

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{-2t}(1+2\cos t \sin t) + e^{-2t}(1-2\cos t \sin t) = 2e^{-2t} = (\sqrt{2}e^{-t})^2$$

$$\text{求める道のりは} \quad \int_1^2 \sqrt{2}e^{-t} dt = -\sqrt{2} \left[e^{-t}\right]_1^2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)$$

1

解答 (1) $\frac{3}{8}\pi$ (2) $\frac{4}{5}\pi$

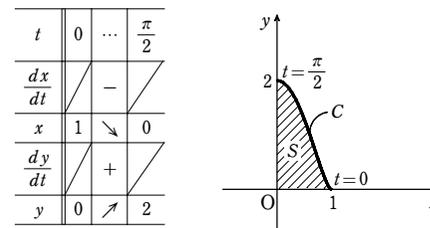
解説

$$(1) \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 6\sin^2 t \cos t$$

$$y=0 \text{ とすると } \sin^3 t = 0 \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

したがって $t=0$ のとき $x=1$

x, y の増減は左下の表のようになり、曲線 C の概形は右下の図のようになる。



ゆえに、求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin^3 t (-\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^4 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2t + \frac{1}{2}\cos^2 2t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4} - \cos 2t + \frac{1}{4}\cos 4t\right) dt$$

$$= \left[\frac{3}{4}t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{16}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\pi$$

(2) 求める体積を V とすると

$$V = \pi \int_0^2 x^2 dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot 6\sin^2 t \cos t dt$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t) \cdot \sin^2 t \cos t dt$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) \cos t dt$$

$\sin t = u$ とおくと $\cos t dt = du$

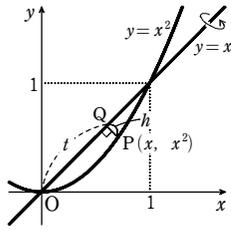
$$\text{よって} \quad V = 6\pi \int_0^1 (u^2 - u^4) du = 6\pi \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\pi$$

2

解答 (1) $\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$ (2) $\frac{\sqrt{2}(\pi^2-9)\pi^2}{12}$

解説

(1) 与えられた放物線と直線で囲まれた部分は右の図のようになる。放物線上の点 $P(x, x^2)$ ($0 \leq x \leq 1$) から直線 $y=x$ に垂線 PQ を引き、



$PQ=h, OQ=t$ ($0 \leq t \leq \sqrt{2}$) とする。

$$\text{このとき } h = \frac{|x-x^2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$

$$t = \sqrt{2}x - h = \sqrt{2}x - \frac{x-x^2}{\sqrt{2}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{2}}$$

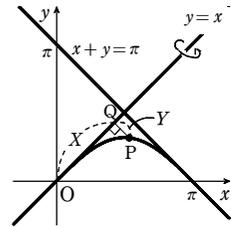
ゆえに $dt = \frac{2x+1}{\sqrt{2}} dx$

t と x の対応は表のようになるから

t	$0 \rightarrow \sqrt{2}$
x	$0 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} h^2 dt = \pi \int_0^1 \left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{2}} dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (2x^5 - 3x^4 + x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{2}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{30\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{60} \end{aligned}$$

(2) 曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 上の点 $P(x, \sin x)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を引き、 $OQ=X$ ($0 \leq X \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$), $PQ=Y$ とする。



$$\text{このとき } X = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = \frac{x + \sin x}{\sqrt{2}}$$

また、 $P(x, \sin x)$ と直線 $x-y=0$ の距離は Y であるから $Y = \frac{|x - \sin x|}{\sqrt{2}}$

求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} Y^2 dX$$

X	$0 \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
x	$0 \rightarrow \pi$

$$dX = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos x) dx$$

X と x の対応は右のようになる。したがって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \frac{(\sin x - x)^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos x) dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (\sin^2 x \cos x - 2x \sin x \cos x + x^2 \cos x + \sin^2 x - 2x \sin x + x^2) dx \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x (\sin x)' dx = \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 2x \sin x \cos x dx &= \int_0^{\pi} x \sin 2x dx = \int_0^{\pi} x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right)' dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} [\sin 2x]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = [x^2 \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x dx = -\int_0^{\pi} 2x \sin x dx,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi} 2x \sin x dx = [-2x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2 \cos x dx = 2\pi + 2[\sin x]_0^{\pi} = 2\pi,$$

$$\int_0^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$$

これらを①に代入して

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left\{ 0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + (-2\pi) + \frac{\pi}{2} - 2\pi + \frac{\pi^3}{3} \right\} = \frac{(\pi^2 - 9)\pi^2}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\pi^2 - 9)\pi^2}{12}$$

③

解答 16

解説

$$\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = 2 \sin t$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= 2^2 \{ (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \} \\ &= 4(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 8(1 - \cos t) = 16 \sin^2 \frac{t}{2} \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ のとき、 $0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi$ であるから $\sin \frac{t}{2} \geq 0$

よって、求める長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4 \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -8(-1-1) = 16 \end{aligned}$$

④

解答 略

解説

$f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ とおく。

$f(-x) = f(x)$ であるから、曲線 $y=f(x)$ は y 軸に関して対称であり、区間 $[0, p]$, $[-p, 0]$ における図形は y 軸に関して対称である。

よって、 $p > 0$ のとき $S = al$ が成り立てば、 $p < 0$ のときも $S = al$ が成り立つ。

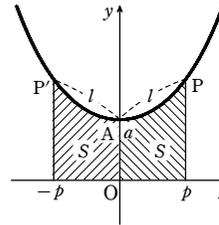
したがって、 $p > 0$ の場合を証明すればよい。

$p > 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$$

$$\text{よって } \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

$$\text{ゆえに } al = a \int_0^p \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = \int_0^p \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = S$$



①

解答 (1) $(3\cos \theta + \cos 3\theta, 3\sin \theta - \sin 3\theta)$ (2) 24

解説

(1) 円 C の中心を O' 、円 C と円 E の接点を Q とおくと、 $\widehat{PQ} = 4\theta$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'P} = (3\cos \theta, 3\sin \theta) + (\cos(\theta - 4\theta), \sin(\theta - 4\theta)) \\ &= (3\cos \theta + \cos 3\theta, 3\sin \theta - \sin 3\theta) \end{aligned}$$

よって $P(3\cos \theta + \cos 3\theta, 3\sin \theta - \sin 3\theta)$

(2) $x = 3\cos \theta + \cos 3\theta, y = 3\sin \theta - \sin 3\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = -3(\sin \theta + \sin 3\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = 3(\cos \theta - \cos 3\theta)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 &= 9\{(\sin \theta + \sin 3\theta)^2 + (\cos \theta - \cos 3\theta)^2\} \\ &= 9\{2(1 + \sin 3\theta \sin \theta - \cos 3\theta \cos \theta)\} \\ &= 18(1 - \cos 4\theta) = 36 \sin^2 2\theta \end{aligned}$$

したがって、点 P の軌跡の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{36 \sin^2 2\theta} d\theta = 6 \int_0^{2\pi} |\sin 2\theta| d\theta \\ &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = 24 \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 24 \end{aligned}$$

②

解答 (1) $y=x$ (2) $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$

解説

(1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \dots \dots \textcircled{1}$

①において、 x と y を入れかえても方程式は変わらないから、 C は直線 $y=x$ に関して対称である。

よって、 ℓ の方程式は $y=x$

(2) ①を y について解くと $y = 1 - 2\sqrt{x} + x$

ℓ より上側の C 上の点 $P(x, y)$ から ℓ に垂線

PH を下ろし、 $PH=h, OH=t$ とおくと、 ℓ の方程式は $x-y=0$ であるから

$$\begin{aligned} h &= \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-(1-2\sqrt{x}+x)|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|2\sqrt{x}-1|}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

C と ℓ の交点の x 座標は $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 1$ から

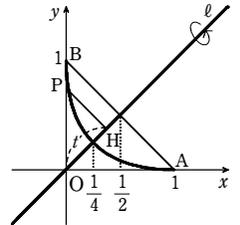
$$x = \frac{1}{4}$$

線分 AB と ℓ の交点は線分 AB の中点であるから、その x 座標は $\frac{1}{2}$

また、 $t^2 + h^2 = OP^2$ であるから $t^2 = (x^2 + y^2) - \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}$

$$t > 0 \text{ であるから } t = \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \frac{2x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ゆえに } dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \text{すなわち } dt = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}\sqrt{x}} dx$$



第4講 レベルB

求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} h^2 dt = \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{2} dt \\ &= \pi \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{2} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{2}\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 6 + 12\sqrt{x} - 8x \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[2\sqrt{x} - 6x + 8x\sqrt{x} - 4x^2 \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

t	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	\rightarrow	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
x	$\frac{1}{4}$	\rightarrow	0

3

【解答】 (1) $k'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$ (2) $L = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$

【解説】

(1) $k'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} \\ &= 2\sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

(2) 極方程式 $r = \theta$ で定義される曲線上の点を直交座標で表すと
 $x = r\cos\theta = \theta\cos\theta$, $y = r\sin\theta = \theta\sin\theta$

よって $\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta - \theta\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta + \theta\cos\theta$

したがって $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \theta\cos\theta)^2$

$$\begin{aligned} &= \cos^2\theta - 2\theta\cos\theta\sin\theta + \theta^2\sin^2\theta \\ &\quad + \sin^2\theta + 2\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\cos^2\theta \\ &= 1 + \theta^2 \end{aligned}$$

ゆえに $\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{1+\theta^2}$

ここで、(1)より、 $\sqrt{1+\theta^2} = \frac{1}{2}k'(\theta)$ であるから、求める曲線の長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} k'(\theta) d\theta = \frac{1}{2} [k(\theta)]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \{2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\} \\ &= \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) \end{aligned}$$

4

【解答】 (1) $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{g(h_0-ax)}}$

(2) $T_d = \frac{2}{a\sqrt{g}}(\sqrt{h_0} - \sqrt{d})$, $T = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}}$, 位置の座標は $\frac{3h_0}{4a}$

【解説】

(1) $\frac{dx}{dt} = \sqrt{gh(x)}$, $h(x) = h_0 - ax$ から $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{gh(x)}} = \frac{1}{\sqrt{g(h_0-ax)}}$

(2) $h = d$ となるのは、 $h_0 - ax = d$ から、 $x = \frac{h_0-d}{a}$ のときである。

ゆえに、 $t = T_d$ のとき $x = \frac{h_0-d}{a}$ である。

これと $t=0$ のとき $x=0$ であることから

$$\begin{aligned} T_d &= \int_0^{T_d} dt = \int_0^{\frac{h_0-d}{a}} \frac{dt}{dx} dx = \int_0^{\frac{h_0-d}{a}} \frac{1}{\sqrt{g(h_0-ax)}} dx = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[-\frac{2}{a}\sqrt{h_0-ax} \right]_0^{\frac{h_0-d}{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(-\frac{2}{a} \right) (\sqrt{d} - \sqrt{h_0}) = \frac{2}{a\sqrt{g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{d}) \end{aligned}$$

よって $T = \lim_{d \rightarrow 0} T_d = \frac{2}{a\sqrt{g}} \cdot \sqrt{h_0} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}}$ …… ①

また、時刻 $\frac{T}{2}$ での津波の位置の座標を X とすると、

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \int_0^{\frac{T}{2}} dt = \int_0^X \frac{dt}{dx} dx = \int_0^X \frac{1}{\sqrt{g(h_0-ax)}} dx = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[-\frac{2}{a}\sqrt{h_0-ax} \right]_0^X \\ &= \frac{2}{a\sqrt{g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0-aX}) \end{aligned}$$

①より $\frac{T}{2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}}$ であるから $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}} = \frac{2}{a\sqrt{g}}(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0-aX})$

両辺に $\frac{a\sqrt{g}}{2}$ を掛けて $\frac{\sqrt{h_0}}{2} = \sqrt{h_0} - \sqrt{h_0-aX}$

よって $\sqrt{h_0-aX} = \frac{\sqrt{h_0}}{2}$

両辺を2乗して $h_0 - aX = \frac{h_0}{4}$ よって $X = \frac{3h_0}{4a}$

第5講 例題

1

【解答】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

【解説】

底面の直径 AB を x 軸に、中心を原点 O とし、 $A(-a, 0)$ 、 $B(a, 0)$ とする。

座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で、直円柱の小さい方の立体を切ったとき、切り口は、右の図で $\angle PQR=90^\circ$ 、 $\angle RPQ=60^\circ$ であるから、 $QR=\sqrt{3}PQ$ の直角三角形で

$$PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

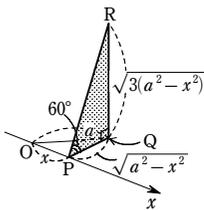
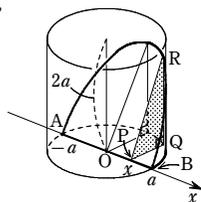
ゆえに、切り口の面積 $S(x)$ は

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}PQ \cdot QR = \frac{\sqrt{3}}{2}PQ^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - x^2) \end{aligned}$$

$$\text{よって } V = \int_{-a}^a \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \sqrt{3} \int_0^a (a^2 - x^2)dx$$

$$= \sqrt{3} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$$



2

【解答】 (1) $8\sqrt{1-t^2}\pi$ (2) $4\pi^2$

【解説】

(1) $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+t^2 \leq 1$ から

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 \leq 1-t^2$$

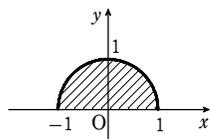
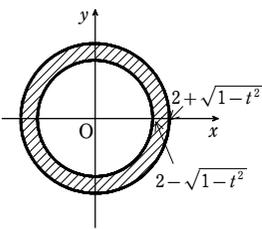
$$-\sqrt{1-t^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}-2 \leq \sqrt{1-t^2}$$

$$\text{よって } 2-\sqrt{1-t^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2+\sqrt{1-t^2}$$

ゆえに、 $S(t)$ は右の図の斜線部分 (境界線上の点を含む) の面積で

$$\begin{aligned} S(t) &= (2+\sqrt{1-t^2})^2\pi - (2-\sqrt{1-t^2})^2\pi \\ &= 8\sqrt{1-t^2}\pi \end{aligned}$$

(2) $\int_{-1}^1 8\pi\sqrt{1-t^2} dt = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = 8\pi \times \frac{\pi}{2} = 4\pi^2$



3

【解答】 $\frac{4}{3}\pi$

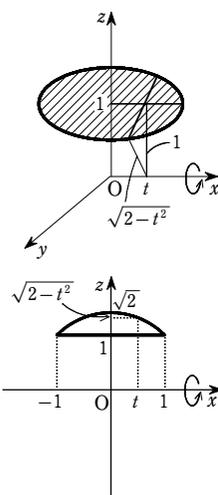
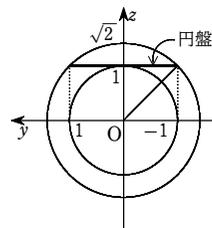
【解説】

平面 $x=t$ と、円盤 $x^2+y^2 \leq 1$ 、 $z=1$ との交線のうち、 x 軸に最も近い距離は 1

また、最も遠い距離は $\sqrt{2-t^2}$

$$\text{よって } V = \pi \int_{-1}^1 [(\sqrt{2-t^2})^2 - 1^2] dt = \pi \int_{-1}^1 (1-t^2) dt$$

$$= 2\pi \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi$$



4

【解答】 $V = \frac{4}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$

【解説】

平面 $x=t$ による K の切り口を表す領域は

$y^2 \leq 1-t^2$ 、 $z \leq 2t$ 、 $z \leq -2t+2$ 、 $t \geq 0$ 、 $z \geq 0$ と表せる。

$y^2 \leq 1-t^2$ から

$$-\sqrt{1-t^2} \leq y \leq \sqrt{1-t^2}$$

$1-t^2 \geq 0$ から $-1 \leq t \leq 1$

$t \geq 0$ とあわせて $0 \leq t \leq 1$

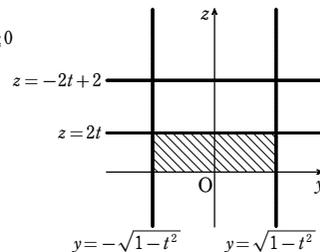
また、 $2t - (-2t+2) = 4(t - \frac{1}{2})$ から

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } 2t \leq -2t+2$$

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ のとき } 2t \geq -2t+2$$

よって、平面 $x=t$ での K の切り口の面積を $S(t)$ とすると、 $S(t)$ は次のようになる。

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}$$



$$S(t) = 2\sqrt{1-t^2} \times 2t$$

すなわち

$$S(t) = 4t\sqrt{1-t^2}$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき

$$S(t) = 2\sqrt{1-t^2} \times (-2t+2)$$

すなわち

$$S(t) = 4(1-t)\sqrt{1-t^2}$$

よって

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} S(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 S(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 4t\sqrt{1-t^2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 4(1-t)\sqrt{1-t^2} dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} t\sqrt{1-t^2} dt - 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 t\sqrt{1-t^2} dt + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$\sqrt{1-t^2} = u$ とおくと $1-t^2 = u^2$

よって $-2t dt = 2u du$ すなわち $t dt = -u du$

ゆえに

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t\sqrt{1-t^2} dt = - \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^2 du = - \left[\frac{1}{3}u^3 \right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t\sqrt{1-t^2} dt = - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 u^2 du = - \left[\frac{1}{3}u^3 \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

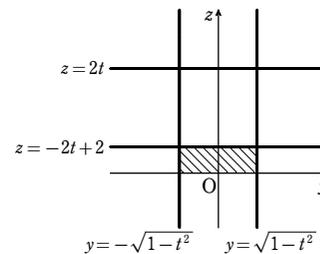
また、 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ は右の図の斜線部分の面積で

あるから

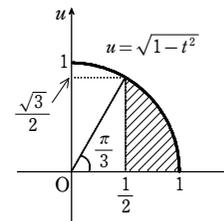
$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} V &= 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} + 4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$



t	$0 \rightarrow \frac{1}{2}$
u	$1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
t	$\frac{1}{2} \rightarrow 1$
u	$\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 0$



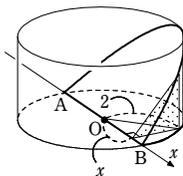
第5講 例題演習

1

解答 $\frac{16}{3}$

解説

底面の中心 O を原点に、 AB を x 軸にとる。
 x 軸に垂直で、 x 軸との交点の x 座標が x である平面で
 この立体を切ったときの断面は、底辺の長さ $\sqrt{4-x^2}$ 、
 高さ $\sqrt{4-x^2}$ の直角二等辺三角形である。



$$\begin{aligned} \text{よって } V &= \int_{-2}^2 \frac{1}{2}(4-x^2)dx = \int_0^2 (4-x^2)dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

2

解答 (1) $S(t) = \pi\{\log 2 - \log(1+t^2)\}$ (2) $\pi(4-\pi)$

解説

(1) 与えられた不等式から $x^2 + y^2 \leq \log 2 - \log(1+z^2) \dots\dots$ ①

$x^2 + y^2 \geq 0$ であるから $\log 2 - \log(1+z^2) \geq 0$

すなわち $\log(1+z^2) \leq \log 2$ 底 e は 1 より大きいから $1+z^2 \leq 2$

ゆえに $-1 \leq z \leq 1$

立体 A を平面 $z=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときの切り口は、①から、

円 $x^2 + y^2 = \log 2 - \log(1+t^2)$, $z=t$ の周および内部である。

よって、切り口の面積を $S(t)$ とすると $S(t) = \pi\{\log 2 - \log(1+t^2)\}$

(2) 立体 A は xy 平面に関して対称であるから

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^1 S(t) dt = 2\pi \int_0^1 \{\log 2 - \log(1+t^2)\} dt \\ &= 2\pi \left[t \log 2 \right]_0^1 - 2\pi \left[t \log(1+t^2) \right]_0^1 + 2\pi \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= 2\pi \log 2 - 2\pi \log 2 + 4\pi \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 4\pi \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1$$

t	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$t = \tan \theta \text{ とおくと } dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\text{よって } \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{したがって } \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{よって } V = 4\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi(4-\pi)$$

3

解答 $4\pi^2$

解説

方程式 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ は点 $(2, 0)$ を中心とする半径 1 の円を表すから、領域 D を xy 平面に図示すると、右の図の斜線部分のようになる。

ただし、境界線を含む。

$-1 \leq t \leq 1$ のとき、 xy 平面上において、直線 $y=t$ と円 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ との交点の x 座標は

$$(x-2)^2 + t^2 = 1 \text{ を解いて } x = 2 \pm \sqrt{1-t^2}$$

よって、平面 $y=t$ による立体 K の切り口の面積は、半径 $2 + \sqrt{1-t^2}$ の円の面積から半径

$2 - \sqrt{1-t^2}$ の円の面積を引いたものであるから

$$\pi(2 + \sqrt{1-t^2})^2 - \pi(2 - \sqrt{1-t^2})^2 = 8\pi\sqrt{1-t^2}$$

よって、求める体積は $V = \int_{-1}^1 8\pi\sqrt{1-t^2} dt$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt \text{ の値は半径 1 の円の面積の } \frac{1}{2} \text{ 倍なので}$$

$$V = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = 8\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi^2$$

4

解答 $\frac{1}{12}(4\pi + 64 - 15\sqrt{3})$

解説

平面 $z=u$ による K の切断面は $y^2 \leq 1-u^2$, $x^2 \leq 1-u^2$, $y \leq \frac{1}{2}$ で表される。

$x^2 \leq 1-u^2$, $y^2 \leq 1-u^2$ から

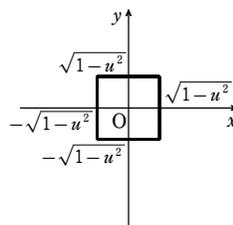
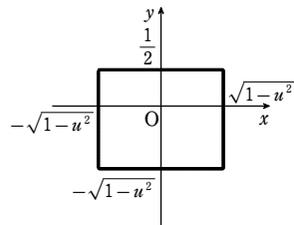
$$-\sqrt{1-u^2} \leq x \leq \sqrt{1-u^2}, \quad -\sqrt{1-u^2} \leq y \leq \sqrt{1-u^2}$$

$1-u^2 \geq 0$ から $-1 \leq u \leq 1$

また、 $\sqrt{1-u^2}$ と $\frac{1}{2}$ の大小関係によって、平面 $z=u$ による K の切断面は、次の図のようになる。

[1] $\sqrt{1-u^2} \geq \frac{1}{2}$ のとき

[2] $\sqrt{1-u^2} \leq \frac{1}{2}$ のとき

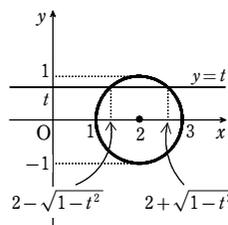
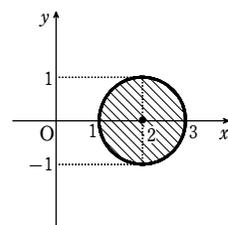


$$\sqrt{1-u^2} = \frac{1}{2} \text{ とすると } 1-u^2 = \frac{1}{4} \quad \text{これを解くと } u = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq u \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\sqrt{1-u^2} \geq \frac{1}{2}$

$-1 \leq u \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq u \leq 1$ のとき $\sqrt{1-u^2} \leq \frac{1}{2}$

よって、平面 $z=u$ での K の切り口の面積を $S(u)$ とすると、 $S(u)$ は次のようになる。



[1] $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq u \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$S(u) = 2\sqrt{1-u^2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1-u^2} \right) = \sqrt{1-u^2} + 2(1-u^2)$$

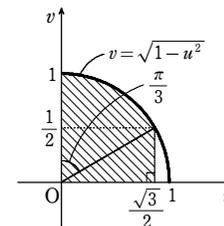
[2] $-1 \leq u \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq u \leq 1$ のとき

$$S(u) = (2\sqrt{1-u^2})^2 = 4(1-u^2)$$

以上より

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(u) du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \{\sqrt{1-u^2} + 2(1-u^2)\} du + 2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 4(1-u^2) du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-u^2} du + 4 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-u^2) du + 8 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1-u^2) du \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 8 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} + 8 \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{1}{12}(4\pi + 64 - 15\sqrt{3}) \end{aligned}$$

注意 定積分 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-u^2} du$ は、右の図の斜線部分の面積を表す。



第5講 レベルA

1

【解答】 (1) $\frac{100}{3}$ (2) 36π (3) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

【解説】

(1) 四角錐の頂点を原点 O とし、頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとる。

$0 \leq x \leq 4$ として、 x 軸上で座標が x である点を通り、 x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると

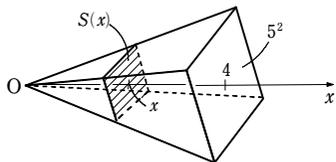
$$S(x) : 5^2 = x^2 : 4^2$$

が成り立つ。よって

$$S(x) = \frac{25}{16}x^2$$

したがって、求める体積を V とすると

$$V = \int_0^4 \frac{25}{16}x^2 dx = \frac{25}{16} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{100}{3}$$



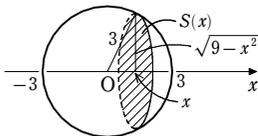
(2) 球の中心 O を通る直線を x 軸にとり、 O を原点とする。

$-3 \leq x \leq 3$ として、 x 軸上で座標が x である点を通り、 x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x) = \pi(\sqrt{9-x^2})^2 = \pi(9-x^2)$$

したがって、求める体積を V とすると

$$V = \int_{-3}^3 \pi(9-x^2) dx = 2\pi \int_0^3 (9-x^2) dx = 2\pi \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 36\pi$$



(3) 正四面体の頂点を原点 O とし、頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとる。

正四面体の高さを h とすると、右の下図から

$$h = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$0 \leq x \leq \frac{4\sqrt{6}}{3}$ として、 x 軸上で座標が x である点を通り、 x 軸に垂直な平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると、底面積は

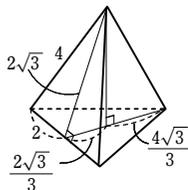
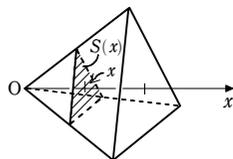
$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

であるから $S(x) : 4\sqrt{3} = x^2 : \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2$

ゆえに $S(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$

したがって、求める体積を V とすると

$$V = \int_0^{\frac{4\sqrt{6}}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2 dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{8}x^3 \right]_0^{\frac{4\sqrt{6}}{3}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$



2

【解答】 直径を 2:1 に内分する点を通り、その直径に垂直な平面で切ればよい

【解説】

半径 1 の球は、円 $x^2 + y^2 = 1$ の x 軸の周りの回転体と考えられる。

球を平面 $x = t$ ($0 < t < 1$) で切ったとき、小さい方の

$$\text{部分の体積は } \pi \int_t^1 (1-x^2) dx$$

これを V とおくと、条件から

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = 7 : (7+20)$$

すなわち $V = \frac{7}{27} \times \frac{4}{3}\pi$

$$V = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_t^1 = \pi \left(\frac{2}{3} - t + \frac{t^3}{3} \right) \text{ であるから } \frac{2}{3} - t + \frac{t^3}{3} = \frac{28}{81}$$

$$\text{よって } 27t^3 - 81t + 26 = 0 \quad \text{すなわち } (3t-1)(9t^2+3t-26) = 0$$

$$\text{したがって } t = \frac{1}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{105}}{6}$$

$0 < t < 1$ であるから $t = \frac{1}{3}$

よって 直径を 2:1 に内分する点を通り、その直径に垂直な平面で切ればよい。

3

【解答】 (1) $S(t) = (1 - \sqrt{1-t^2})^2$ (2) $\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$

【解説】

(1) $0 \leq z \leq 1$ であるから $0 \leq t \leq 1$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 1 \geq 0$ において、 $z = t$ とすると

$$x^2 + y^2 + t^2 - 2xy - 1 \geq 0$$

よって $(y-x)^2 \geq 1-t^2$

すなわち $y-x \leq -\sqrt{1-t^2}$

または $\sqrt{1-t^2} \leq y-x$

ゆえに $y \leq x - \sqrt{1-t^2}$

または $y \geq x + \sqrt{1-t^2}$

したがって、平面 $z = t$ で切ったときの断面は、右の図の斜線部分である。

$$\text{また } S(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1-t^2})^2$$

$$= (1 - \sqrt{1-t^2})^2$$

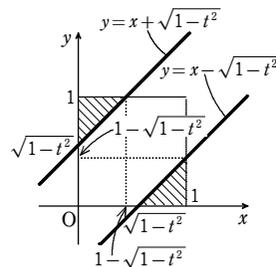
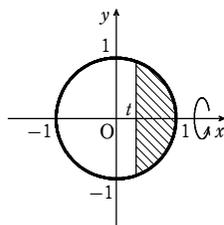
(2) 求める体積を V とすると

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 (1 - \sqrt{1-t^2})^2 dt = \int_0^1 (2-t^2 - 2\sqrt{1-t^2}) dt$$

$$= \left[2t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ は、半径が 1 の円の面積の $\frac{1}{4}$ を表すから

$$V = 2 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$$



図形 A を表す方程式は

$$x^2 + y^2 = 1, 1 \leq z \leq 2$$

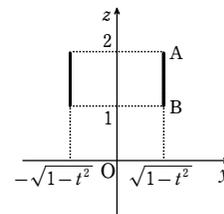
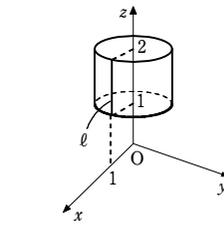
図形 A を平面 $x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときにできる断面は、右下の図の実線部分のようになる。

この断面を x 軸の周りに 1 回転したとき、通過する領域の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \pi OA^2 - \pi OB^2 \\ &= \pi((1-t^2)+4) - \pi((1-t^2)+1) \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

よって、求める立体の体積は

$$V = \int_{-1}^1 3\pi dt = 6\pi \int_0^1 dt = 6\pi [t]_0^1 = 6\pi$$



4

【解答】 6π

【解説】

1

【解答】 $3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$

【解説】

円柱 C を平面 H で分けた2つの部分のうち、小さい方が題意の立体である。

$x^2 + y^2 = 4$ において $y = 1$ とすると $x = \pm\sqrt{3}$
この立体を平面 $x = t (-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3})$ で切ったときの断面は、直角を挟む2辺の長さがともに $\sqrt{4-t^2} - 1$ の直角二等辺三角形である。

その面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2} - 1)^2$$

立体は平面 $x = 0$ に関して対称であるから、求める体積 V は

$$V = 2 \int_0^{\sqrt{3}} S(t) dt = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2} - 1)^2 dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} (5-t^2 - 2\sqrt{4-t^2}) dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} (5-t^2) dt - 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2} dt$$

ここで、 $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2} dt$ は右の図の斜線部分の面積を表すから

$$V = \left[5t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \right) = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$

2

【解答】 $\pi \left\{ \frac{1}{8} \left(a^2 - \frac{1}{a^2} \right) - \left(a - \frac{1}{a} \right) + \frac{3}{2} \log a \right\}$

【解説】

図形 D を y 軸に垂直な平面 $y = t (0 \leq t \leq \log a)$ で切断したときの切り口を考える。

また、 $A(0, t, 0)$ とする。

このとき ($y = t$ として)

$$z = t, |x| \leq \frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1$$

であるから、切り口は2点 $P \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1, t, t \right)$,

$Q \left(-\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \right), t, t \right)$ を結んだ線分 PQ になる。

ただし、 $t = 0$ のときは1点 A である。

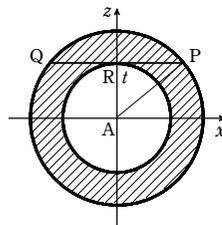
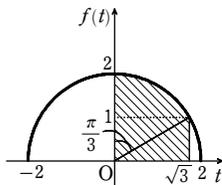
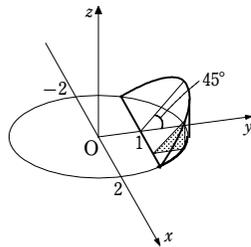
線分 PQ と z 軸との交点 $(0, t, t)$ を R とする。

この線分 PQ を y 軸の周りに1回転させてできる図形は右の図のようになる。

斜線部分の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \pi(AP^2 - AR^2) = \pi PR^2 = \pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \right)^2$$

よって、求める体積を $V(a)$ とすると



$$\begin{aligned} V(a) &= \int_0^{\log a} S(t) dt = \pi \int_0^{\log a} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - 1 \right)^2 dt \\ &= \pi \int_0^{\log a} \left\{ \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t}) - (e^t + e^{-t}) + \frac{3}{2} \right\} dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{8}(e^{2t} - e^{-2t}) - (e^t - e^{-t}) + \frac{3}{2}t \right]_0^{\log a} = \pi \left\{ \frac{1}{8} \left(a^2 - \frac{1}{a^2} \right) - \left(a - \frac{1}{a} \right) + \frac{3}{2} \log a \right\} \end{aligned}$$

3

【解答】 $\frac{5}{32}\pi$

【解説】

与えられた領域を平面 $x = t$ (ただし $t \geq 0$) で切る。

切り口上の点 (t, y, z) の満たす不等式は

$$t^2 + y^2 \leq 1, z + 2t^2 - t^4 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

これを満たす実数 y が存在すること、 $1 - t^2 \geq 0$ は同値で、 $t \geq 0$ であるから

$$0 \leq t \leq 1$$

このとき、 $\textcircled{1}$ から

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-t^2}, 0 \leq z \leq (1-t^2)^2$$

よって、平面 $x = t$ における切り口は右の図の斜線部分である。

この面積は $(1-t^2)^{\frac{5}{2}}$

求める体積を V とおくと $V = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt$

$t = \sin \theta$ とおくと $dt = \cos \theta d\theta$

よって $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \cdot \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta$

ここで $\cos^6 x = (\cos^3 x)^2 = \left[\frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x) \right]^2$

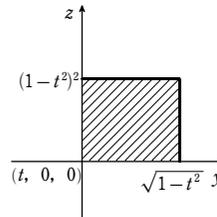
$$= \frac{1}{16}(9\cos^2 x + 6\cos x \cos 3x + \cos^2 3x)$$

$$= \frac{9}{32}(1 + \cos 2x) + \frac{3}{16}(\cos 4x + \cos 2x) + \frac{1}{32}(1 + \cos 6x) \text{ であるから}$$

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{32} \int (10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x) dx$$

$$= \frac{5}{16}x + \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x + C$$

よって $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta = \left[\frac{5}{16}\theta + \frac{15}{64}\sin 2\theta + \frac{3}{64}\sin 4\theta + \frac{1}{192}\sin 6\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{32}\pi$



t	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

1

【解答】 (1) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ (2) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

(3) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$

【解説】

(1) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

よって、 $y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$ と $y = \sin x$ の2式から y を消去して

$$\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) = \sin x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x - \cos x = 0$$

すなわち $\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ であるから $x - \frac{\pi}{4} = 0$ ゆえに $x = \frac{\pi}{4}$

したがって、 C_2 と C_3 の交点の座標は $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

(2) C_1 と C_3 の交点の x 座標が α であるから、 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ であり

$$\frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = \sin \alpha \quad \text{すなわち} \quad \cos \alpha = 3\sin \alpha$$

これと $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ から $10\sin^2 \alpha = 1$

$\sin \alpha \geq 0$ であるから $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ また $\cos \alpha = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

(3) $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$

求める面積を S とすると、 S は右の図の斜線部分の面積であり

$$S = \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\} dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \{g(x) - h(x)\} dx$$

$$= \int_0^{\alpha} \left\{ \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) \right\} dx$$

$$+ \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \sin x \right\} dx$$

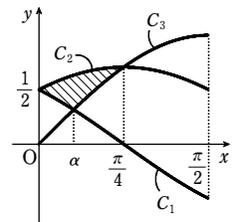
$$= \int_0^{\alpha} \sin x dx + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\alpha} + \frac{1}{2} [\sin x + \cos x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\cos \alpha + 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (\sin \alpha + \cos \alpha) \right]$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$$



2

【解答】 (1) $k = 6\log 3 - 1$ (2) $\frac{8}{9} + 2\log \frac{2}{3}$

第6講 総復習問題

【解説】

(1) 真数は正であるから $x+2 > 0$

よって $x > -2$

$6y - x^2 = k$ から $y = \frac{x^2}{6} + \frac{k}{6}$

ゆえに $y' = \frac{1}{3}x$

また、 $y = \log(x+2)$ から $y' = \frac{1}{x+2}$

C_1 と C_2 の共有点の x 座標を t とすると、この点における C_1, C_2 の接線が一致するから

$$\begin{cases} \frac{t^2}{6} + \frac{k}{6} = \log(t+2) & \dots\dots ① \\ \frac{1}{3}t = \frac{1}{t+2} & \dots\dots ② \end{cases}$$

② から $t(t+2) = 3$ よって $t^2 + 2t - 3 = 0$

ゆえに $(t-1)(t+3) = 0$ $t > -2$ であるから $t = 1$

① に代入して $\frac{1}{6} + \frac{k}{6} = \log 3$ ゆえに $k = 6\log 3 - 1$

(2) (1) の結果から、求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ \left(\frac{x^2}{6} + \log 3 - \frac{1}{6} \right) - \log(x+2) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{18}x^3 + \left(\log 3 - \frac{1}{6} \right)x - (x+2)\log(x+2) + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{18} + \log 3 - \frac{1}{6} - 3\log 3 + 1 + 2\log 2 = \frac{8}{9} + 2\log \frac{2}{3} \end{aligned}$$

【3】

【解答】 (1) 略 (2) $\frac{1}{e}$ (3) $e^2 - 2e$

【解説】

(1) 真数は正であるから $x > 0$

曲線 C_1 上の点 $(t, \frac{1}{a} \log t)$ ($t > 0$) を直線 $y = x$ に関して対称移動した点は

$$\left(\frac{1}{a} \log t, t \right)$$

$y = e^{ax}$ において、 $x = \frac{1}{a} \log t$ のとき $y = e^{\log t} = t$

よって、曲線 C_1 上の点を直線 $y = x$ に関して対称移動した点は曲線 C_2 上にある。

ゆえに、曲線 C_1 と曲線 C_2 は直線 $y = x$ に関して対称である。

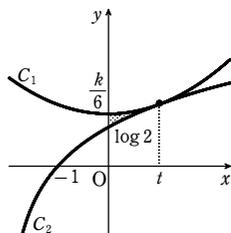
(2) $y = \frac{1}{a} \log x$ から $y' = \frac{1}{ax}$

よって、曲線 C_1 上の点 $(p, \frac{1}{a} \log p)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{a} \log p = \frac{1}{ap}(x - p)$$

すなわち $y = \frac{1}{ap}x + \frac{1}{a} \log p - \frac{1}{a}$

これが $y = x$ に一致するとき $\frac{1}{ap} = 1, \frac{1}{a} \log p - \frac{1}{a} = 0$



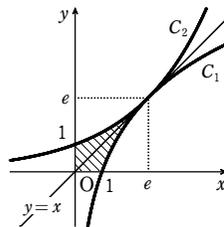
これを解いて $p = e, a = \frac{1}{e}$

ゆえに $a = \frac{1}{e}$

(3) 求める面積は、右の図の斜線部分の面積である。

$a = \frac{1}{e}$ のとき、曲線 C_1 の方程式は $y = e \log x$ であるから

$$\begin{aligned} e^2 - 2 \int_0^1 e \log x dx &= e^2 - 2e \left[x \log x - x \right]_1^e \\ &= e^2 - 2e \end{aligned}$$



【4】

【解答】 (1) $y = g(x) = \log \frac{x}{1-x}$ ($0 < x < 1$) (2) 略

【解説】

(1) $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ から $y = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$

$e^x + 1 > 1$ であるから $0 < \frac{1}{e^x + 1} < 1$ よって $0 < y < 1$

また、 $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ から $(e^x + 1)y = e^x$

ゆえに $e^x = \frac{y}{1-y}$

$$x = \log \frac{y}{1-y}$$

したがって、求める逆関数は $y = g(x) = \log \frac{x}{1-x}$ ($0 < x < 1$)

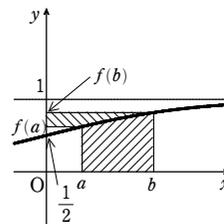
(2) $y = f(x)$ は単調に増加する関数であり、グラフは右の図のようになる。

ここで $g(y) = g(f(x)) = x$
 $dy = f'(x) dx$

であるから

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x f'(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \left[x f(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) dx = b f(b) - a f(a) \end{aligned}$$

【参考】 $0 < a < b$ のとき、(2) の関係式が成り立つことは、定積分が表す面積を考えると明らかである。



【5】

【解答】 (1) 1 (2) $\frac{\pi}{16}(2\pi + 3\sqrt{3})$

【解説】

(1) $\cos 2x - (-\sin x) = 1 - 2\sin^2 x + \sin x = (1 - \sin x)(1 + 2\sin x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)

よって、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $\cos 2x \geq -\sin x$

したがって、 K の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x + \sin x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$$

(2) $\cos 2x = \sin x$ とすると

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

よって $(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $x = \frac{\pi}{6}$

右の図から求める体積は

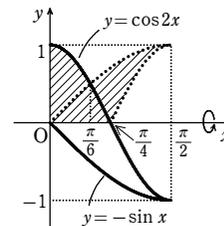
$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 4x) dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{16} (2\pi + 3\sqrt{3})$$



【6】

【解答】 (1) $t = \frac{1}{2}$ (2) $\pi \left\{ \frac{3}{2} (\log 2)^2 - 5 \log 2 + 3 \right\}$

【解説】

(1) $V(t) = \pi \int_t^{t+\frac{3}{2}} (\log x)^2 dx$ について、 $(\log x)^2$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると

$$F'(x) = (\log x)^2$$

よって $V(t) = \int_t^{t+\frac{3}{2}} F'(x) dx = [F(x)]_t^{t+\frac{3}{2}} = F\left(t + \frac{3}{2}\right) - F(t)$

ゆえに $\frac{dV(t)}{dt} = F'\left(t + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(t + \frac{3}{2}\right)' - F'(t) = \pi \left\{ \log\left(t + \frac{3}{2}\right) \right\}^2 - \pi (\log t)^2$

$$= \pi \left\{ \log\left(t + \frac{3}{2}\right) + \log t \right\} \left\{ \log\left(t + \frac{3}{2}\right) - \log t \right\}$$

$$= \pi \log\left(t^2 + \frac{3}{2}t\right) \times \log\left(1 + \frac{3}{2t}\right)$$

$t > 0$ のとき、 $1 + \frac{3}{2t} > 1$ から $\log\left(1 + \frac{3}{2t}\right) > 0$

よって、 $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ のとき $t^2 + \frac{3}{2}t = 1$

ゆえに $(2t-1)(t+2) = 0$ $t > 0$ から $t = \frac{1}{2}$

第6講 総復習問題

$t > 0$ における $V(t)$ の増減表は右ようになる。

したがって、 $V(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ のとき最小となる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$...
$V'(t)$			-	+
$V(t)$			極小	

(2) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を計算する。

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= \int (x)'(\log x)^2 dx \\ &= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} dx = x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

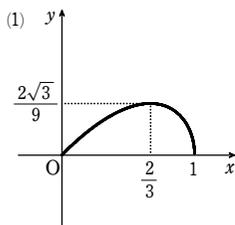
(1) より、求める最小値は

$$V\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (\log x)^2 dx = \pi \left[x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \pi \left[\frac{3}{2}(\log 2)^2 - 5 \log 2 + 3 \right]$$

7

解答 (1) 図

(2) $\frac{32}{105}\pi$



解説

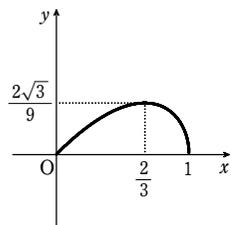
(1) $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ から $\frac{dx}{dt} = -2t, \frac{dy}{dt} = 1-3t^2$

$0 \leq t \leq 1$ のとき、 $\frac{dx}{dt} = 0$ とすると $t = 0$

$\frac{dy}{dt} = 0$ とすると $3t^2 = 1$ よって $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって、 t の値に対応する x, y の値の変化は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
$\frac{dx}{dt}$			-		-
x	1		$\frac{2}{3}$		0
$\frac{dy}{dt}$			+		-
y	0		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		0



よって、曲線 C の概形は右の図のようになる。

(2) $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ における x を $x_1, \frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ における x を x_2 とすると、求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}} x_1^2 dy - \pi \int_{\frac{2\sqrt{3}}{9}}^0 x_2^2 dy$$

ここで $dy = (1-3t^2)dt$

また、(1) の x, y の値の変化の表から

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-t^2)^2 (1-3t^2) dt - \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 (1-t^2)^2 (1-3t^2) dt \\ &= \pi \int_0^1 (1-t^2)^2 (1-3t^2) dt = \pi \int_0^1 (1-5t^2+7t^4-3t^6) dt \\ &= \pi \left[t - \frac{5}{3}t^3 + \frac{7}{5}t^5 - \frac{3}{7}t^7 \right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi \end{aligned}$$

参考 $0 \leq a < b, f(x) \geq 0$ のとき、曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a, x=b$ および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_0 は

$$\begin{aligned} V_0 &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx \\ \text{で与えられる。このことを用いると、求める体積は} \\ 2\pi \int_0^1 x y dx &= 2\pi \int_0^1 (1-t^2)(t-t^3)(-2t) dt \\ &= 4\pi \int_0^1 (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = 4\pi \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi \end{aligned}$$

8

解答 (1) $\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

解説

(1) 図のように、曲線 $y=x^n$ 上の点 $P(x, x^n)$ ($0 \leq x \leq 1$) から直線 $y=x$ に垂線 PH を引き、

$PH=h, OH=t$ ($0 \leq t \leq \sqrt{2}$) とする。このとき

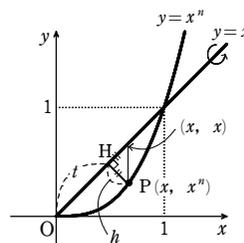
$$\begin{aligned} h &= \frac{|x-x^n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{x-x^n}{\sqrt{2}} \\ t &= \sqrt{2}x - h = \sqrt{2}x - \frac{x-x^n}{\sqrt{2}} = \frac{x+x^n}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ゆえに $dt = \frac{1+nx^{n-1}}{\sqrt{2}} dx$

t と x の対応は右のようになる。

よって、求める体積 V_n は

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} h^2 dt = \pi \int_0^1 \frac{(x-x^n)^2}{2} \cdot \frac{1+nx^{n-1}}{\sqrt{2}} dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (x^2 - 2x^{n+1} + x^{2n})(1+nx^{n-1}) dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \{x^2 + (n-2)x^{n+1} + (1-2n)x^{2n} + nx^{3n-1}\} dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{n-2}{n+2}x^{n+2} + \frac{1-2n}{2n+1}x^{2n+1} + \frac{x^{3n}}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{n-2}{n+2} + \frac{1-2n}{2n+1} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{6n}{(n+2)(2n+1)} \right\} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{4n^2 - 8n + 4}{3(n+2)(2n+1)} = \frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi \end{aligned}$$



t	0	$\rightarrow \sqrt{2}$
x	0	$\rightarrow 1$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^2}{(1+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})} = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi$

9

解答 (1) $\overrightarrow{BP} = \left(\frac{a}{4} \cos 3\theta, -\frac{a}{4} \sin 3\theta \right)$

(2) $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta), \frac{a}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \right)$ (3) $6a$

解説

(1) 2 つの円の接点を T とする。

$\widehat{AT} = \widehat{PT}$ であるから $a\theta = \frac{a}{4} \angle PBT$

よって $\angle PBT = 4\theta$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \left(\frac{a}{4} \cos(\theta - 4\theta), \frac{a}{4} \sin(\theta - 4\theta) \right) \\ &= \left(\frac{a}{4} \cos(-3\theta), \frac{a}{4} \sin(-3\theta) \right) \\ &= \left(\frac{a}{4} \cos 3\theta, -\frac{a}{4} \sin 3\theta \right) \end{aligned}$$

(2) 点 B の座標は $\left(\frac{3}{4} a \cos \theta, \frac{3}{4} a \sin \theta \right)$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \left(\frac{3}{4} a \cos \theta, \frac{3}{4} a \sin \theta \right) + \left(\frac{a}{4} \cos 3\theta, -\frac{a}{4} \sin 3\theta \right) \\ &= \left(\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta), \frac{a}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \right) \end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ とすると

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4} a(\sin\theta + \sin 3\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4} a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

であるから $\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 = \frac{9}{16} a^2 (\sin^2\theta + 2\sin\theta \sin 3\theta + \sin^2 3\theta)$

$$\left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = \frac{9}{16} a^2 (\cos^2\theta - 2\cos\theta \cos 3\theta + \cos^2 3\theta)$$

よって $\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = \frac{9}{16} a^2 (2 - 2\cos(\theta + 3\theta)) = \frac{9}{16} a^2 \cdot 2 \cdot 2\sin^2 2\theta = \frac{9}{4} a^2 \sin^2 2\theta$

したがって、動点 P が移動する距離は

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2} d\theta &= \frac{3}{2} a \int_0^{2\pi} |\sin 2\theta| d\theta = \frac{3}{2} a \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \\ &= 6a \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \end{aligned}$$

10

解答 $(8\sqrt{2} - \frac{32}{3})r^3$

解説

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ において考える。

平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq r$) による切り口は $\begin{cases} y^2 \leq r^2 - t^2 & \dots\dots ① \\ z^2 \leq r^2 - t^2 & \dots\dots ② \\ y^2 + z^2 \leq r^2 & \dots\dots ③ \end{cases}$ で表される。

①+②と③から $2r^2 - 2t^2 \geq r^2$

よって、切り口が存在するのは $0 \leq t \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$ のときである。

そのとき、切り口は右図の斜線部分になる。

この面積を $S(t)$ とする。

また、図のように θ をとる。

このとき

$$S(t) = (\sqrt{r^2 - t^2})^2 - \sqrt{r^2 - t^2} \cdot t - \pi r^2 \cdot \frac{\pi - 2\theta}{2\pi}$$

$$= r^2 - t^2 - t\sqrt{r^2 - t^2} + r^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

また、 $t = r \sin \theta$ であるから $dt = r \cos \theta d\theta$

よって、求める体積を V とすると

$$\frac{1}{8}V = \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} (r^2 - t^2 - t\sqrt{r^2 - t^2} + r^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)) dt + r^2 \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \theta dt$$

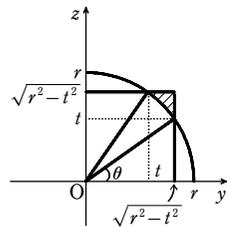
$$= \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \left(r^2 - \frac{\pi}{4}r^2 - t^2 - t\sqrt{r^2 - t^2} \right) dt + r^2 \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \theta dt$$

$$= \left[r^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}(r^2 - t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} + r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta r \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) r^3 - \frac{r^3}{6\sqrt{2}} + \frac{r^3}{6\sqrt{2}} - \frac{r^3}{3} + r^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sin \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left[\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = r^3 \left(\sqrt{2} - \frac{4}{3} \right)$$

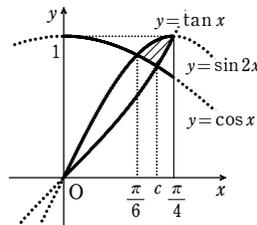
ゆえに $V = \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \right) r^3$



t	$0 \rightarrow \frac{r}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

1

- 【解答】 (1) $a = \frac{\pi}{6}$,
 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $d^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
 (2) 略
 (3) [図], $\frac{5 - 2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} \log(\sqrt{5} - 1)$



【解説】

- (1) $y = \cos x$ と $y = \sin 2x$ の交点を求める。
 $\cos x = \sin 2x$ より $\cos x(1 - 2\sin x) = 0$
 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ であるから $\sin x = \frac{1}{2}$
 よって $x = \frac{\pi}{6}$ ゆえに $a = \frac{\pi}{6}$

したがって $b = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

次に、 d^2 の値を求める。

$\cos x = \tan x$ とする。

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ より $\cos x > 0, \tan x \geq 0$ であるから $\cos^2 x = \tan^2 x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

$\cos^2 x > 0$ であるから $\cos^2 x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

ここで、 $\tan \frac{\pi}{4} = 1, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\tan \frac{\pi}{4} > \cos \frac{\pi}{4}$ であるから、 $y = \cos x$ と $y = \tan x$ のグラフは $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲に交点をもつ。

ゆえに $d^2 = \cos^2 c = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(2) $\sqrt{5} < 2.5$ より $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

ゆえに $\cos^2 c < \cos^2 a$ $\cos c > 0, \cos a > 0$ であるから $\cos c < \cos a$

$0 \leq a \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq c \leq \frac{\pi}{4}$ であるから $c > a$

(3) $x = \frac{\pi}{4}$ のとき $\tan x = 1, \sin 2x = 1$

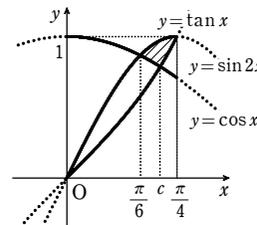
$y = \tan x$ と $y = \sin 2x$ のグラフは $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$

でただ1つの共有点を持ち、その共有点は

$$\left(\frac{\pi}{4}, 1 \right)$$

連立不等式の表す領域は右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

求める面積を S とおくと



$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^c (\sin 2x - \cos x) dx + \int_c^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \tan x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^c + \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \log |\cos x| \right]_c^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cos 2c - \sin c \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \right) + \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \log \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 2c + \log |\cos c| \right)$$

$$= -\sin c + \frac{3}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \log |\cos c|$$

ここで $d = \cos c$ より $\sin^2 c = 1 - d^2$

$\sin c > 0$ であるから $\sin c = \sqrt{1 - d^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

また $\log |\cos c| = \frac{1}{2} \log d^2 = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

よって

$$S = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} \log(\sqrt{5} - 1)$$

2

【解答】 (1) $b = -\frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2} e^{-\frac{1}{3}} - 1$

【解説】

(1) $f(x) = \frac{a}{2} x^2 + b - \log x$ とする。

真数は正であるから、この関数の定義域は $x > 0$ である。

$$f'(x) = ax - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - 1}{x}$$

$f'(x) = 0$ とすると $ax^2 - 1 = 0$

$a > 0$ より $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$x > 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{a}}$...
$f'(x)$	/	-	0	+
$f(x)$	/	↘	$\frac{1}{2} \log a + b + \frac{1}{2}$	↗

2つの曲線がただ1つの共有点をもつとき、方程式 $f(x) = 0$ はただ1つの実数解をもつ。

したがって $\frac{1}{2} \log a + b + \frac{1}{2} = 0$

すなわち $b = -\frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2}$

第6講 総復習問題 類題

(2) (1)より, 曲線Cは $y = -\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}$ である.

Cと $y = \log x$ の交点の x 座標は

$$-\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2} = \log x$$

すなわち $\log x = -\frac{1}{3}$

したがって $x = e^{-\frac{1}{3}}$

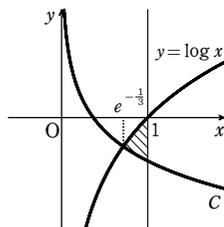
ゆえに, 求める面積Sは, 右の図の斜線部分の面積である.

$$\text{よって } S = \int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 \left\{ \log x - \left(-\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2} \right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{e^{-\frac{1}{3}}}^1 (3\log x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} [3x\log x - 2x]_{e^{-\frac{1}{3}}}^1$$

$$= \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}} - 1$$



3

【解答】 (1) $g(x) = 2 - e^{-x}$ (2) $x = \log(2 \pm \sqrt{3})$ (3) $8\log(2 + \sqrt{3}) - 4\sqrt{3}$

【解説】

(1) $g(x) = -f(-x) = -(e^{-x} - 2) = 2 - e^{-x}$

(2) $e^x - 2 = 2 - e^{-x}$ とおくと $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

よって $e^x = 2 \pm \sqrt{3}$

ゆえに $x = \log(2 \pm \sqrt{3})$

(3) 求める面積Sは, 右の図の斜線部分である.

よって

$$S = \int_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})} \{ (2 - e^{-x}) - (e^x - 2) \} dx$$

$$= [e^{-x} - e^x + 4x]_{\log(2-\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{3})}$$

ここで, $e^{\log(2+\sqrt{3})} = e^{-\log(2-\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$

$$e^{\log(2-\sqrt{3})} = e^{-\log(2+\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$$

であるから

$$S = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = -4\sqrt{3} + 4\log(2+\sqrt{3})^2$$

$$= 8\log(2+\sqrt{3}) - 4\sqrt{3}$$

4

【解答】 (1) e (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx + \int_0^1 f^{-1}(y) dy = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^1 f^{-1}(y) dy = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$

(3) e

【解説】

(1) $(\log y)^2 = x$ とおくと, $y = e^{\sqrt{x}}$ であるから $dy = (e^{\sqrt{x}})^{-1} dx$

$$\text{よって } \int_1^e (\log y)^2 dy = \int_0^1 x \cdot (e^{\sqrt{x}})^{-1} dx = [xe^{\sqrt{x}}]_0^1 - \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

y	$1 \rightarrow e$
x	$0 \rightarrow 1$

$$= e - \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

したがって $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx + \int_1^e (\log y)^2 dy = e$

(2) $f^{-1}(y) = x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) とおくと, $y = \tan x$ であるから $dy = (\tan x)' dx$

$$\text{よって } \int_0^1 f^{-1}(y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (\tan x)' dx = [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

y	$0 \rightarrow 1$
x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

ゆえに $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx + \int_0^1 f^{-1}(y) dy = \frac{\pi}{4}$

$$\text{また } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$= -[\log |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log 2$$

したがって $\int_0^1 f^{-1}(y) dy = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$

(3) $\sqrt{\log y} = x$ とおくと, $y = e^{x^2}$ であるから $dy = (e^{x^2})' dx$

$$\text{よって } \int_1^e \sqrt{\log y} dy = \int_0^1 x (e^{x^2})' dx = [xe^{x^2}]_0^1 - \int_0^1 e^{x^2} dx$$

y	$1 \rightarrow e$
x	$0 \rightarrow 1$

$$= e - \int_0^1 e^{x^2} dx$$

したがって $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\log y} dy = e$

【別解】 面積を用いても定積分の値を求めることができる.

(1) $y = e^{\sqrt{x}}$ ($0 \leq x \leq 1$) を x について解くと

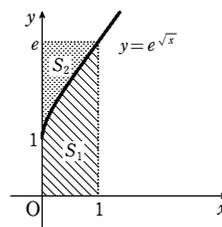
$$x = (\log y)^2 \quad (1 \leq y \leq e)$$

よって, $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$, $\int_1^e (\log y)^2 dy$ はそれぞれ図の

S_1 , S_2 の面積を表す.

$$\text{したがって } \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx + \int_1^e (\log y)^2 dy = 1 \cdot e = e$$

(2), (3) も同様にして求めることができる.



5

【解答】 $\frac{\pi}{16}$

【解説】

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sin 2x \text{ とすると } \sin 2x - \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\text{すなわち } 2\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{16}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{16}\right) = 0$$

$$\text{よって } \cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{16}\right) = 0 \text{ または } \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{16}\right) = 0$$

ここで, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ から

$$\frac{\pi}{16} \leq \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{16} \leq \frac{13}{16}\pi, \quad -\frac{\pi}{16} \leq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{16} \leq \frac{3}{16}\pi$$

ゆえに $\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{16} = 0$ すなわち $x = \frac{7}{24}\pi, \frac{\pi}{8}$

よって, 2つの関数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $y = \sin 2x$ の

グラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分は右の図のようになる.

したがって, 求める体積 V とすると

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}} \{ \sin^2 2x - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \} dx$$

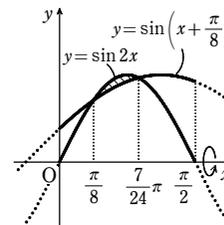
$$= \pi \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}} \left\{ \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} \right\} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}} \{ \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x \} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\sin \frac{5}{6}\pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{8} \left(\sin \frac{7}{6}\pi - \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{16}$$



6

【解答】 (1) $V(t) = \frac{\pi}{4\log 2} (2^{8t} - 2^{6t+1} + 2^{4t})$ (2) $t = -\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{\pi}{64\log 2}$

【解説】

$$(1) \quad y = 2^{2x+2t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = 2^{x+3t} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②の共有点の x 座標は, 次の方程式の実数解である.

$$2^{2x+2t} = 2^{x+3t}$$

ゆえに $2x + 2t = x + 3t$

よって $x = t$

$$2^{2x+2t} - 2^{x+3t} = 2^{x+3t}(2^{x-t} - 1)$$

$t \leq x \leq 0$ のとき $0 \leq x - t \leq -t$

ゆえに $2^{x-t} \geq 1$

よって, $t \leq x \leq 0$ において $2^{2x+2t} \geq 2^{x+3t}$

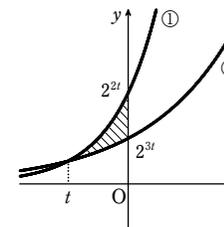
$$V(t) = \pi \int_t^0 (2^{2x+2t})^2 dx - \pi \int_t^0 (2^{x+3t})^2 dx$$

$$= \pi \int_t^0 (2^{4x+4t} - 2^{2x+6t}) dx$$

$$= \pi \left[\frac{2^{4x}}{4} \cdot \frac{2^{4t}}{\log 2} - \frac{2^{6t}}{2} \cdot \frac{2^{2x}}{\log 2} \right]_t^0 = \frac{\pi}{4\log 2} (2^{8t} - 2^{6t+1} + 2^{4t})$$

(2) $V(t) = \frac{\pi}{4\log 2} \{ (2^{2t})^4 - 2 \cdot (2^{2t})^3 + (2^{2t})^2 \}$

$2^{2t} = s$ とおくと $0 < s < 1$ で



第6講 総復習問題 類題

$$V(t) = \frac{\pi}{4 \log 2} (s^4 - 2s^3 + s^2) = \frac{\pi}{4 \log 2} s^2 (s^2 - 2s + 1)$$

$$= \frac{\pi}{4 \log 2} s^2 (s-1)^2 = \frac{\pi}{4 \log 2} [s(1-s)]^2$$

$$f(s) = s(1-s) \text{ とおくと } f(s) = -s^2 + s = -(s^2 - s) = -\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$0 < s < 1$ において、 $f(s)$ は $s = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

$f(s)$ が最大となると、 $V(t)$ も最大となるから、 $V(t)$ は $2^{2t} = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\text{すなわち } t = -\frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{\pi}{4 \log 2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{64 \log 2} \text{ をとる。}$$

[7]

【解答】 (1) $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{\pi^2}{4}$

【解説】

(1) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ であるから $0 \leq x \leq 1$

$$\text{また } \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{よって } y = \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(2) 曲線 $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) と x 軸の交点の x 座標は、 $y=0$ とすると $x=0, 1$ $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $y \geq 0$ であるから、求める面積 S は

$$S = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx = -\int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2} dx = -\left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

【別解】 $y = \sin 2t$ について、 $y=0$ とすると $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ では $t=0, \frac{\pi}{2}$

また、 $y \geq 0$ である。

$$x = \sin t \text{ から } dx = \cos t dt$$

x と t の対応は右のようになる。

よって、求める面積 S は

x	$0 \rightarrow 1$
t	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$S = \int_0^1 y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos t dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)' \cos^2 t dt = -2 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

(3) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ であるから $0 \leq y \leq 1$

$$y=1 \text{ とすると } t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{このとき } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

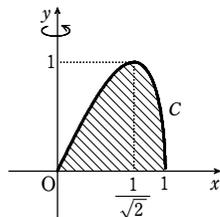
$$y = 2x\sqrt{1-x^2} \text{ から } y^2 = 4x^2 - 4x^4$$

$$\text{ゆえに } 4(x^2)^2 - 4x^2 + y^2 = 0$$

$$\text{よって } x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y^2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{2}$$

したがって、求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{2} \right) dy = \pi \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$$



$$\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy \text{ は、半径 } 1 \text{ の四分円の面積を表すから } V = \pi \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

【別解】 $y = \sin 2t$ から $dy = 2 \cos 2t dt$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ のとき $x = f(y)$, $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $x = g(y)$ とすると

$$V = \pi \int_0^1 (g(y))^2 dy - \pi \int_0^1 (f(y))^2 dy$$

y と t の対応は次のようになる。

y	$0 \rightarrow 1$	y	$1 \rightarrow 0$
t	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$	t	$\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

よって、求める体積 V は

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (2 \cos 2t) dt - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t (2 \cos 2t) dt$$

$$= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 t \cos 2t dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 t \cos 2t dt$$

$$= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 t \cos 2t dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \cos 2t dt$$

$$= -\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t dt \right) = -\pi \left(\left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t) dt \right)$$

$$= -\pi \left(\left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

【参考】 関数 $y = f(x)$ のグラフの $a \leq x \leq b$ の部分と x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに

1回転してできる立体の体積 V_0 は $V_0 = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$ で与えられる。

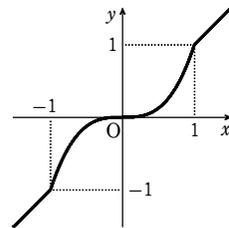
これを利用すると、求める体積 V は

$$V = 2\pi \int_0^1 x y dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin 2t \cos t dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi}{2} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

[8]

【解答】 (1) [図] (2) $\frac{8\sqrt{2}}{105} \pi$



【解説】

(1) $|x| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ であるから $f(x) = \frac{x^5 + x^3}{x^2 + 1} = \frac{x^3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x^3$

$$x=1 \text{ のとき } f(x) = \frac{1+1+1}{1+1+1} = 1$$

$$x=-1 \text{ のとき } f(x) = \frac{-1-1-1}{1+1+1} = -1$$

$|x| > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ であるから

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x^{2n-5}} + \frac{1}{x^{2n-3}}}{1 + \frac{1}{x^{2n-2}} + \frac{1}{x^{2n}}} = x$$

したがって、グラフは右図のようになる。

(2) 2点を結ぶ線分は $y=x$ ($-1 \leq x \leq 1$) である。

グラフの対称性から、求める体積は $0 \leq x \leq 1$ の部分の回転体の体積の2倍である。

$O(0,0)$, $A(1,1)$ とすると $OA = \sqrt{2}$

$0 \leq x \leq 1$ とし、 $y=f(x)$ 上の点 $P(x, x^3)$ から線分 OA に垂線 PH を下ろし、 $OH=t$ とおく。求める

体積を V とすると $V = 2\pi \int_0^1 PH^2 dt$ と表される。

$$\text{ここで } PH = \frac{|x-x^3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{x-x^3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{また } t = \sqrt{2} x - \frac{x-x^3}{\sqrt{2}} = \frac{x+x^3}{\sqrt{2}}$$

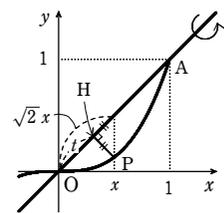
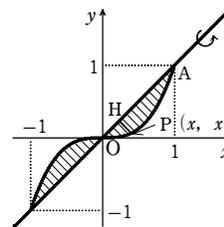
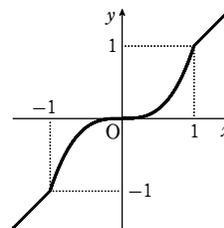
$$\text{ゆえに } dt = \frac{1+3x^2}{\sqrt{2}} dx$$

$$\text{よって } V = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{x-x^3}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{1+3x^2}{\sqrt{2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2)(3x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (3x^8 - 5x^6 + x^4 + x^2) dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{3x^9}{9} - \frac{5x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{16}{105} = \frac{8\sqrt{2}}{105} \pi$$



t	$0 \rightarrow \sqrt{2}$
x	$0 \rightarrow 1$

[9]

【解答】 (1) $(2 \cos t + \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$ (2) $\frac{16}{3}$

【解説】

(1) $A(3,0)$, $T(3 \cos t, 3 \sin t)$ とする。

D と C が T で接しているとき、 D の中心 Q の座標は $(2 \cos t, 2 \sin t)$ である。

また、 $\widehat{TP} = \widehat{TA} = 3t$ であるから、 x 軸の正の方向から半直線 QP への角は $t - 3t = -2t$

よって、 O を原点とすると

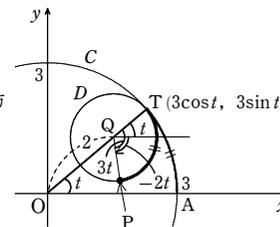
$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

$$= (2 \cos t, 2 \sin t) + (\cos(-2t), \sin(-2t))$$

$$= (2 \cos t + \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$$

(2) $x'(t) = -2 \sin t - 2 \sin 2t$, $y'(t) = 2 \cos t - 2 \cos 2t$ から

$$\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 = 4(\sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t)$$



$$+4(\cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos^2 2t)$$

$$=4(2-2\cos 3t)=8(1-\cos 3t)=16\sin^2 \frac{3}{2}t$$

$0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ であるから $\sin \frac{3}{2}t \geq 0$

よって、求める曲線の長さは

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{16\sin^2 \frac{3}{2}t} dt = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 4\sin \frac{3}{2}t dt = 4 \cdot \frac{2}{3} \left[-\cos \frac{3}{2}t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{16}{3}$$

10

【解答】 $6\pi - 8\sqrt{2}$

【解説】

A を平面 $z=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときの断面を A_t とする。

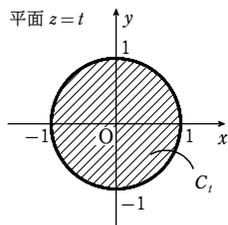
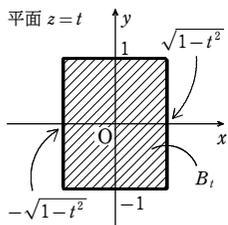
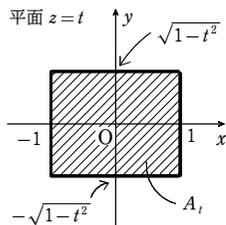
$y^2 + z^2 \leq 1$ に $z=t$ を代入して、変形すると

$$-\sqrt{1-t^2} \leq y \leq \sqrt{1-t^2}$$

よって、 A_t は右の図の斜線部分のようになる。

同様に、 B, C を平面 $z=t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときの断面をそれぞれ B_t, C_t とする。

B_t, C_t は、それぞれ左の図の斜線部分のようになる。



和集合 $A \cup B \cup C$ を平面 $z=t$ で切ったときの断面は、 $A_t \cup B_t \cup C_t$ である。

$A \cup B \cup C$ と平面 $z=t$ が共有点をもつとき

$$-1 \leq t \leq 1$$

また、 $A \cup B \cup C$ は、平面 $z=0$ に関して対称であるから、求める体積を V とすると、 V は $A \cup B \cup C$ の $z \geq 0$ の部分の体積の2倍である。

よって、 $A \cup B \cup C$ を平面 $z=t$ で切ったときの断面積を $S(t)$ とおくと

$$V = \int_{-1}^1 S(t) dt = 2 \int_0^1 S(t) dt \quad \dots \textcircled{1}$$

そこで、 $0 \leq t \leq 1$ において、 $S(t)$ を求める。

C_t が $A_t \cup B_t$ に含まれるとき、領域 $A_t \cap B_t$ の表す正方形の頂点 $(\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2})$ 、円 $x^2 + y^2 = 1$ の周または外部の点であるから

$$(\sqrt{1-t^2})^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 \geq 1$$

すなわち $2t^2 \leq 1$

$0 \leq t \leq 1$ において、これを解くと $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

[1] $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

このとき、 $A_t \cup B_t \cup C_t$ は右の図の斜線部分のようになる

$$S(t) = 2^2 - 4(1 - \sqrt{1-t^2})^2$$

$$= 8\sqrt{1-t^2} - 4(1-t^2)$$

[2] $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$ のとき

このとき、 $A_t \cup B_t \cup C_t$ は右の図の斜線部分のようになる。

ここで、角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) を図のようにとると

$$\cos \theta = t, \quad \sin \theta = \sqrt{1-t^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$A_t \cup B_t \cup C_t$ は、 x 軸、 y 軸、直線 $y=x$ に関して対称であるから、 $x \geq 0, y \geq 0, y \leq x$ の部分の面積を求めると

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) + \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sqrt{1-t^2} + (1-t) \cdot \sqrt{1-t^2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} + \sqrt{1-t^2} - \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2}$$

$$\text{よって } S(t) = 8 \left\{ \frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} + \sqrt{1-t^2} - \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} \right\}$$

$$= \pi - 4\theta + 8\sqrt{1-t^2} - 4t\sqrt{1-t^2}$$

[1], [2] から

$$\int_0^1 S(t) dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [8\sqrt{1-t^2} - 4(1-t^2)] dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (\pi - 4\theta + 8\sqrt{1-t^2} - 4t\sqrt{1-t^2}) dt$$

$$= 8 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt - 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-t^2) dt - 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t\sqrt{1-t^2} dt$$

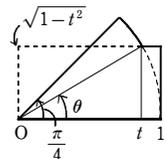
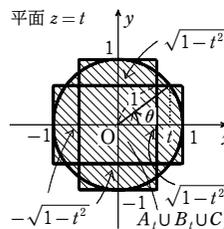
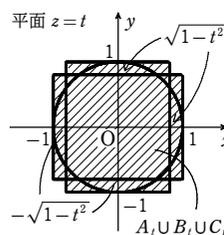
$$- 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \theta dt + \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで、 $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ の値は、半径1の円の面積の $\frac{1}{4}$ 倍と等しいから

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{また } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t\sqrt{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \sqrt{1-t^2} \cdot (1-t^2)' dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{\sqrt{2}}{12}$$



さらに、 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \theta dt$ について、②より、 $t = \cos \theta$ であるから

$$dt = -\sin \theta d\theta$$

$$\text{よって } \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \theta dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \theta \cdot (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \left[-\theta \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = -\frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ゆえに、③から

$$\int_0^1 S(t) dt = 8 \cdot \frac{\pi}{4} - 4 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{12} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} - 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 3\pi - 4\sqrt{2}$$

したがって、①から $V = 2 \int_0^1 S(t) dt = 6\pi - 8\sqrt{2}$

t	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\rightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow 0$

章末問題A

1

【解答】 $t=0$ のとき最大値 $\frac{\pi}{2}-1$, $t=\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$

【解説】

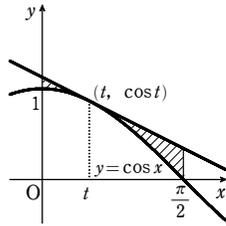
$y=\cos x$ から $y'=-\sin x$

点 $(t, \cos t)$ における接線の方程式は

$$y=(-\sin t)(x-t)+\cos t$$

すなわち $y=(-\sin t)x+t\sin t+\cos t$

$S(t)$ は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(-\sin t)x+t\sin t+\cos t-\cos x\}dx$$

$$=\left[-\frac{\sin t}{2}x^2+(t\sin t+\cos t)x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\sin t}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}+(t\sin t+\cos t)\cdot\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi}{2}\cos t+\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi^2}{8}\right)\sin t-1$$

$$S'(t)=-\frac{\pi}{2}\sin t+\frac{\pi}{2}\sin t+\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi^2}{8}\right)\cos t=\frac{\pi}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\cos t$$

よって, $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$	$\frac{\pi}{2}-1$	\searrow	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$	\nearrow	$\frac{\pi^2}{8}-1$

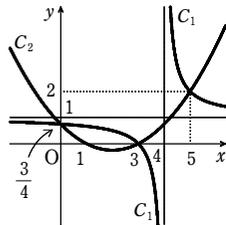
$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)=\frac{\pi}{8}(4-\pi)>0 \text{ であるから } \frac{\pi}{2}-1>\frac{\pi^2}{8}-1$$

よって, $S(t)$ は $t=0$ のとき最大値 $\frac{\pi}{2}-1$, $t=\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$ とする。

2

【解答】 (1) $(0, \frac{3}{4}), (3, 0), (5, 2)$

(2) 図, 面積は $3-2\log 2$



【解説】

(1) $y=\frac{x-3}{x-4}$ と $y=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)$ の2式から y を消去して

$$\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)$$

分母を払って $4(x-3)=(x-1)(x-3)(x-4)$

整理すると $(x-3)\{(x-1)(x-4)-4\}=0$ すなわち $x(x-3)(x-5)=0$

よって $x=0, 3, 5$

これらは, $x\neq 4$ を満たす。

$$x=0 \text{ のとき } y=\frac{3}{4}, \quad x=3 \text{ のとき } y=0,$$

$$x=5 \text{ のとき } y=2$$

したがって, 2曲線 C_1, C_2 の交点の座標は $(0, \frac{3}{4}), (3, 0), (5, 2)$

(2) $\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{x-4}+1$ であるから, 2曲線 C_1, C_2

の概形は, 右の図ようになる。

よって, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると

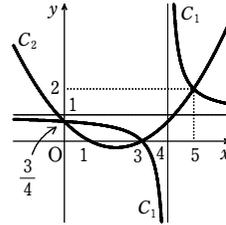
$$S=\int_0^3 \left\{ \left(\frac{1}{x-4} + 1 \right) - \frac{1}{4}(x-1)(x-3) \right\} dx$$

$$=\int_0^3 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} \right) dx$$

$$=\left[\log|x-4| - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_0^3$$

$$=-\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + \frac{3}{4} - \log 4$$

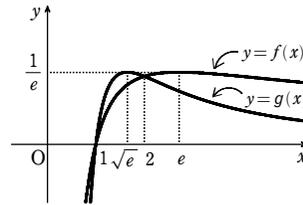
$$=3-2\log 2$$



3

【解答】 (1) $(1, 0), (2, \frac{1}{2}\log 2)$ (2) 図

(3) $-2\log 2 - (\log 2)^2 + \frac{4}{e} + \frac{1}{2}$



【解説】

(1) $f(x)=g(x)$ とすると $\frac{\log x}{x}=\frac{2\log x}{x^2}$

分母を払って整理すると $(x-2)\log x=0$

これを解くと $x=1, 2$ これらは, $x>0$ を満たす。

よって, 2曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標は $(1, 0), (2, \frac{1}{2}\log 2)$

(2) $f(x)=\frac{\log x}{x}$ から $f'(x)=\frac{1}{x}\cdot x - (\log x)\cdot 1 = \frac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると $x=e$

よって, $x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow

ゆえに, $f(x)$ は $x=e$ で極大値 $\frac{1}{e}$ とする。

また, $g(x)=\frac{2\log x}{x^2}$ から $g'(x)=\frac{2}{x}\cdot x^2 - (2\log x)\cdot 2x = \frac{2(1-2\log x)}{x^3}$

$g'(x)=0$ とすると $x=\sqrt{e}$

よって, $x>0$ における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	\sqrt{e}	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow

ゆえに, $g(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で極大値 $\frac{1}{e}$ とする。

ここで $\lim_{x\rightarrow+0} f(x)=-\infty, \lim_{x\rightarrow+0} g(x)=-\infty,$

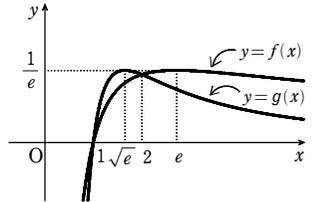
$$\lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=\lim_{x\rightarrow\infty} \frac{\log x}{x}=0,$$

$$\lim_{x\rightarrow\infty} g(x)=\lim_{x\rightarrow\infty} \frac{2\log x}{x^2}=\lim_{x\rightarrow\infty} \frac{\log x^2}{x^2}=0$$

また, $e=2.718\cdots$ であるから

$$1<\sqrt{e}<2<e$$

以上から, $y=f(x), y=g(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



(3) 求める面積を S とすると, S は右の図の斜線部分の面積である。

よって

$$S=\int_1^2 \{g(x)-f(x)\}dx+\int_2^e \{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_1^2 \left(\frac{2\log x}{x^2} - \frac{\log x}{x} \right) dx - \int_2^e \left(\frac{2\log x}{x^2} - \frac{\log x}{x} \right) dx$$

$$\text{ここで } \int \frac{2\log x}{x^2} dx = \int \left(-\frac{2}{x} \right)' \log x dx$$

$$=-\frac{2}{x}\log x - \int \left(-\frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$=-\frac{2(\log x+1)}{x} + C,$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int \log x \cdot (\log x)' dx$$

$$=\frac{(\log x)^2}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\text{よって } S=\left[-\frac{2(\log x+1)}{x} - \frac{(\log x)^2}{2} \right]_1^2 - \left[-\frac{2(\log x+1)}{x} - \frac{(\log x)^2}{2} \right]_2^e$$

$$=-2\left\{ (\log 2+1) + \frac{(\log 2)^2}{2} \right\} + 2 + \frac{2(\log e+1)}{e} + \frac{(\log e)^2}{2}$$

$$=-2\log 2 - (\log 2)^2 + \frac{4}{e} + \frac{1}{2}$$

4

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) $\frac{5}{4}e + \frac{1}{4e} - 2$

【解説】

(1) $f(x)-2e^x=(x+1)e^{2x-1}-2e^x=e^{2x-1}(x+1-2e^{-x+1})$

章末問題A

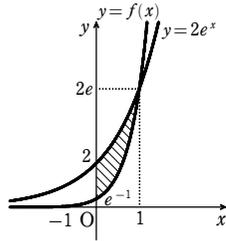
すべての実数 x で $e^{2x-1} > 0$ が成り立つことから $x+1-2e^{-x+1}$ のみを考える。

$g(x) = x+1-2e^{-x+1}$ とおくと $g'(x) = 1+2e^{-x+1} > 0$ より、 $g(x)$ は単調増加関数である。したがって、 $x > 1$ のとき $g(x) > g(1) = 0$ であるから $f(x) > 2e^x$ が成り立つ。

(2) (1) から $x < 1$ のとき $g(x) < g(1) = 0$ であるから $f(x) < 2e^x$ が成り立つ。

(3) 求める面積を S とすると、(1)、(2) より S は右図斜線部の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [2e^x - f(x)] dx = \int_0^1 [2e^x - (x+1)e^{2x-1}] dx \\ &= [2e^x]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \cdot \left(\frac{1}{2}e^{2x-1}\right) dx \\ &= 2(e-1) - \left[\frac{1}{2}(x+1)e^{2x-1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x-1} dx \\ &= 2(e-1) - \left(e - \frac{1}{2e}\right) + \left[\frac{1}{4}e^{2x-1}\right]_0^1 = \frac{5}{4}e + \frac{1}{4e} - 2 \end{aligned}$$



5

解答 (1) $S = 1 + a - 2\sin a$ (2) $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$

解説

$$(1) f(x) = \begin{cases} -(x-a)\sin x & (0 \leq x \leq a) \\ (x-a)\sin x & (a \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$S = -\int_0^a (x-a)\sin x dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} (x-a)\sin x dx$$

ここで $\int (x-a)\sin x dx$

$$\begin{aligned} &= -(x-a)\cos x + \int \cos x dx \\ &= -(x-a)\cos x + \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= \left[-(x-a)\cos x - \sin x \right]_0^a + \left[-(x-a)\cos x + \sin x \right]_a^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (-\sin a + a) + (1 - \sin a) = 1 + a - 2\sin a \end{aligned}$$

(2) $\frac{dS}{da} = -2\cos a + 1$

$$\frac{dS}{da} = 0 \text{ とすると } \cos a = \frac{1}{2} \quad (0 < a < \frac{\pi}{2})$$

よって $a = \frac{\pi}{3}$

増減表より、 $a = \frac{\pi}{3}$ のとき S は極小かつ最小で最小値は

$$S = 1 + \frac{\pi}{3} - 2\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$$

6

解答 $\frac{3}{16}e - \frac{1}{2}$

解説

a	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{da}$		-	0	+	
S			極小		

C_1, C_2 と ℓ との接点の座標を、それぞれ

$(s, e^s), (t, e^{2t})$ とする。

このとき、 ℓ の方程式は

$$C_1 \text{ について } y = e^s(x-s) + e^s$$

$$C_2 \text{ について } y = 2e^{2t}(x-t) + e^{2t}$$

この2つが同じ直線を表すから

$$e^s = 2e^{2t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$e^s(1-s) = e^{2t}(1-2t) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } s = \log 2 + 2t \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ を用いて } \textcircled{2} \text{ を変形すると } 2(1-s) = 1-2t \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ を解いて } s = 1 - \log 2 = \log \frac{e}{2}, \quad t = \frac{1}{2} - \log 2 = \log \frac{\sqrt{e}}{2}$$

よって、 ℓ の方程式は $y = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}\log 2$

求める面積は

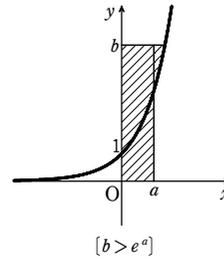
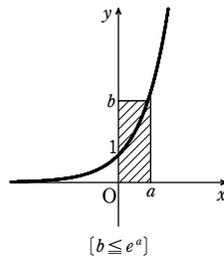
$$\begin{aligned} &\int_t^0 e^{2x} dx + \int_0^s e^x dx - \int_t^s \left(\frac{e}{2}x + \frac{e}{2}\log 2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_t^0 + \left[e^x\right]_0^s - \frac{e}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x\log 2\right]_t^s \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e}{4}\right) + \left(\frac{e}{2} - 1\right) - \frac{e}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{(\log 2)^2}{2} - \frac{1}{8} + \frac{(\log 2)^2}{2}\right] \\ &= \frac{3}{16}e - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7

解答 (1) $S = e^a + b \log b - b$ (2) $b \leq e^a$ のとき [図] $b = e^a$ のときは長方形、 $b > e^a$ のとき [図]

(3) $S \geq ab$, 等号は $b = e^a$ のとき

(2)



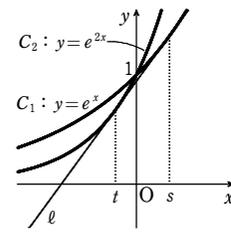
解説

$$(1) \int_0^a e^x dx = [e^x]_0^a = e^a - 1, \quad \int_1^b \log y dy = [y \log y - y]_1^b = b \log b - b + 1$$

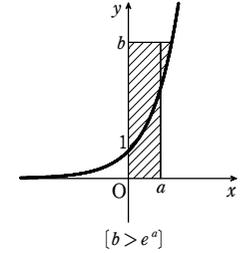
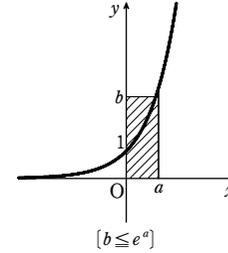
ゆえに $S = e^a + b \log b - b$ 〇

(2) $b \leq e^a$ のとき [図],

$b = e^a$ のときは点 $(\log b, b), (a, e^a)$ が一致し、斜線の部分は長方形になる。



$b > e^a$ のとき [図]



(3) (2) で求めたグラフから $S \geq ab$ 等号は $b = e^a$ のとき成り立つ。

8

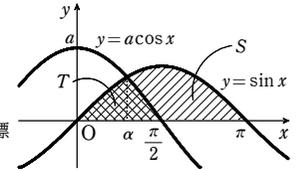
解答 $a = \frac{4}{3}$

解説

右の図から

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において、曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = a \cos x$ は1点で交わるから、その交点の x 座標



を α とすると $T = \int_0^\alpha \sin x dx + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} a \cos x dx$

$$\begin{aligned} &= [-\cos x]_0^\alpha + [a \sin x]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos \alpha + 1 + a - a \sin \alpha \end{aligned}$$

ここで、交点の y 座標について $\sin \alpha = a \cos \alpha$

すなわち $\tan \alpha = a$

$$\cos \alpha > 0, \sin \alpha > 0 \text{ であるから } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\text{よって } T = -\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + 1 + a - a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = a + 1 - \frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$= a + 1 - \sqrt{a^2+1}$$

$$S : T = 3 : 1 \text{ より, } T = \frac{1}{3}S = \frac{2}{3} \text{ であるから } a + 1 - \sqrt{a^2+1} = \frac{2}{3}$$

すなわち $a + \frac{1}{3} = \sqrt{a^2+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$a > 0$ より、 $a + \frac{1}{3} > 0$ であるから

$$\textcircled{1} \iff \left(a + \frac{1}{3}\right)^2 = a^2 + 1 \iff a = \frac{4}{3}$$

したがって、求める a の値は $a = \frac{4}{3}$

9

解答 $S(t) = \pi \sin^2 t + 2t \cos 2t - \sin 2t$

解説

章末問題A

$x^2 + \frac{y^2}{4} = \sin^2 t \dots\dots ①,$

$(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = \cos^2 t \dots\dots ②$ とおく。

①-② から $2x-1 = \sin^2 t - (1-\sin^2 t)$

ゆえに $x = \sin^2 t \dots\dots ③$

① から $y^2 = 4(\sin^2 t - x^2)$

これに ③ を代入して

$y^2 = 4(\sin^2 t - \sin^4 t) = 4\sin^2 t \cos^2 t = \sin^2 2t$

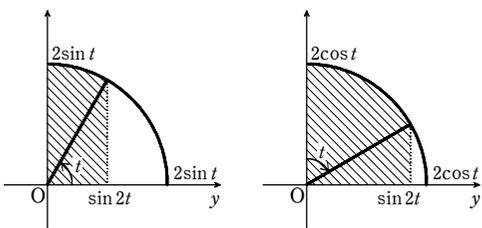
よって、楕円 ①, ② の交点の座標は $(\sin^2 t, \pm \sin 2t)$

また、① から $x^2 = \frac{1}{4}(4\sin^2 t - y^2)$ ゆえに $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2 t - y^2}$

② から $(x-1)^2 = \frac{1}{4}(4\cos^2 t - y^2)$ ゆえに $x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\cos^2 t - y^2}$

よって $S(t) = \int_{-\sin 2t}^{\sin 2t} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2 t - y^2} - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{4\cos^2 t - y^2}\right) \right\} dy$
 $= \int_0^{\sin 2t} \sqrt{4\sin^2 t - y^2} dy + \int_0^{\sin 2t} \sqrt{4\cos^2 t - y^2} dy - 2 \int_0^{\sin 2t} y dy$

$\int_0^{\sin 2t} \sqrt{4\sin^2 t - y^2} dy$ $\int_0^{\sin 2t} \sqrt{4\cos^2 t - y^2} dy$

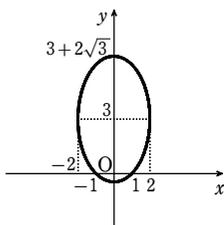


上の図から

$S(t) = \frac{1}{2}(2\sin t)^2 \left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \frac{1}{2}\sin 2t(2\sin^2 t) + \frac{1}{2}(2\cos t)^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t(2\cos^2 t) - 2\sin 2t$
 $= \pi \sin^2 t + 2t(\cos^2 t - \sin^2 t) + \sin 2t(\sin^2 t + \cos^2 t) - 2\sin 2t$
 $= \pi \sin^2 t + 2t \cos 2t - \sin 2t$

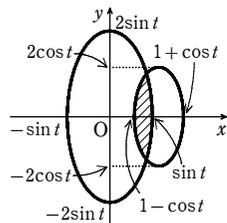
10

解答 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1$, [図] (2) $3 + \frac{10\sqrt{3}}{3}\pi$



解説

(1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと
 $r^2 = x^2 + y^2$



よって $2x^2 + (x^2 + y^2) - 6y = 3$

ゆえに $3x^2 + (y-3)^2 = 12 \dots\dots ①$

すなわち $\frac{x^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$

したがって、そのグラフは、楕円

$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$

を y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

よって、グラフは右図ようになる。

(2) ① において、 $y=0$ とすると

$x = \pm 1$

また、① から、 $y = 3 \pm \sqrt{12-3x^2}$

ゆえに、求める面積を S とすると

$S = 2 \left\{ \int_0^2 (3 + \sqrt{12-3x^2}) dx - \int_1^2 (3 - \sqrt{12-3x^2}) dx \right\}$
 $= 2 \left[3x \right]_0^2 + 2\sqrt{3} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx - 2 \left[3x \right]_1^2 + 2\sqrt{3} \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$

ここで $y = \sqrt{4-x^2}$ は原点 O を中心とする半径 2 の円周の上半分であるから

$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi \cdot 2^2 \times \frac{1}{4} = \pi$

$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって $S = 12 + 2\sqrt{3}\pi - 6 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi - 3 = 3 + \frac{10\sqrt{3}}{3}\pi$

別解 (2) 楕円 ① の面積は $2 \cdot 2\sqrt{3}\pi = 4\sqrt{3}\pi$

よって、求める面積 S は

$S = 4\sqrt{3}\pi - 2 \int_0^1 \{ -(3 - \sqrt{12-3x^2}) \} dx = 4\sqrt{3}\pi + 6 \left[x \right]_0^1 - 2\sqrt{3} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$
 $= 4\sqrt{3}\pi + 6 - 2\sqrt{3} \left\{ \pi - \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} = 3 + \frac{10\sqrt{3}}{3}\pi$

別解 (2) $x = 2\cos \theta$ とおいて、置換積分。

11

解答 証明略, $2\pi^2$

解説

$y = \sin x$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分を $x = g(y)$,

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ の部分を $x = h(y)$ とすると

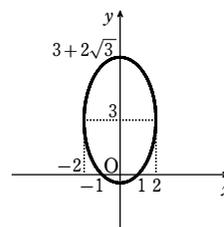
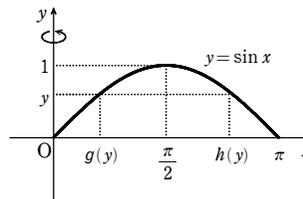
$V = \pi \int_0^1 \{ h(y) \}^2 dy - \pi \int_0^1 \{ g(y) \}^2 dy$

ここで、 $dy = \cos x dx$ であり、 $h(0) = \pi$,

$h(1) = \frac{\pi}{2}, g(0) = 0, g(1) = \frac{\pi}{2}$ であるから

$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = -\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

$= -\pi \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -\pi \left[x^2 \sin x \right]_0^{\pi} + \pi \int_0^{\pi} 2x \sin x dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx$



したがって、 $V = 2\pi \int_0^{\pi} x f(x) dx$ が成り立つ。

また $V = 2\pi \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + 2\pi \int_0^{\pi} \cos x dx = 2\pi(\pi - 0) + 2\pi \times 0 = 2\pi^2$

別解 $\Delta x > 0$ のとき、区間 $[x, x + \Delta x]$ の範囲で曲線 $y = f(x)$ と x 軸に挟まれた部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積を ΔV とする。

区間 $[x, x + \Delta x]$ における $f(x)$ の最大値を M 、最小値を m とすると

$\pi \{ (x + \Delta x)^2 - x^2 \} m \leq \Delta V \leq \pi \{ (x + \Delta x)^2 - x^2 \} M$

$\pi \{ 2x \Delta x + (\Delta x)^2 \} m \leq \Delta V \leq \pi \{ 2x \Delta x + (\Delta x)^2 \} M$

よって $\pi(2x + \Delta x)m \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq \pi(2x + \Delta x)M$

$\Delta x \rightarrow +0$ のとき $m \rightarrow f(x), M \rightarrow f(x)$ であるから $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi x f(x)$

$\Delta x < 0$ のときも同様で $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi x f(x)$

$\frac{dV}{dx} = 2\pi x f(x)$

$0 \leq x \leq \pi$ より $V = 2\pi \int_0^{\pi} x f(x) dx$

12

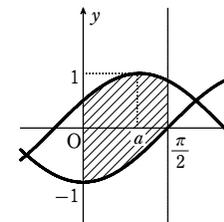
解答 (1) $S = \sin a + \cos a + 1$ (2) $a = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2} + 1$

(3) $V = \frac{\pi}{4}(2\sin a + \sin 2a + \pi)$

解説

(1) 2 曲線の概形は右の図のようになる。

よって $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \cos(x-a) - (-\cos x) \} dx$
 $= \left[\sin(x-a) + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
 $= \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + 1 - \sin(-a)$
 $= \sin a + \cos a + 1$



(2) (1) より $S = \sin a + \cos a + 1 = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

$0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ であるから $\frac{\pi}{4} \leq a + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$

したがって、S は $a + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $a = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2} + 1$ をとる。

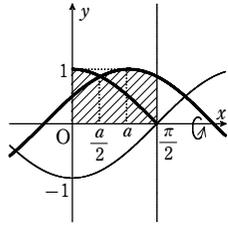
章末問題A

(3) 曲線 $y = -\cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を x 軸に関して折り返す

と、右の図ようになる。

曲線 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と曲線 $y = \cos(x-a)$ は

$x = \frac{a}{2}$ で交わる。



$$\begin{aligned} \text{したがって } V &= \pi \int_0^{\frac{a}{2}} \cos^2 x dx + \pi \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x-a) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx + \pi \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x-2a)}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{a}{2}} + \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin(2x-2a) \right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} (2\sin a + \sin 2a + \pi) \end{aligned}$$

13

解答 $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$

解説

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を x について解くと

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

ここで、 $x_1 = -a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$, $x_2 = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$

とおく。

囲まれた図形は、 x 軸に関して対称であるから、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^b \{(2a-x_1)^2 - (2a-x_2)^2\} dy \\ &= 8a\pi \int_0^b (x_2-x_1) dy = 16a^2\pi \int_0^b \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy \end{aligned}$$

ここで、 $y = b\sin \theta$ とおくと $dy = b\cos \theta d\theta$ となる。

$$\begin{aligned} V &= 16a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot b\cos \theta d\theta = 16a^2b\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 8a^2b\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 8a^2b\pi \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2b\pi^2 \end{aligned}$$

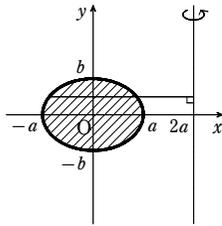
また、 $a^2 + b^2 = 1$ から $a^2 = 1 - b^2$ …… ①

$a > 0$ であるから $1 - b^2 > 0$ これと $b > 0$ であるから $0 < b < 1$

V の式に ① を代入すると $V = 4(1 - b^2)b\pi^2 = 4\pi^2(-b^3 + b)$

ゆえに $V' = 4\pi^2(-3b^2 + 1)$

$V' = 0$ とすると $-3b^2 + 1 = 0$



y	$0 \rightarrow b$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$0 < b < 1$ であるから $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$0 < b < 1$ における V の増減表は右のようになり、

$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、 V は極大かつ最大となる。

$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、①と $a > 0$ から $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$

したがって V の最大値は $4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \pi^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9} \pi^2$

14

解答 $\frac{13}{48}\pi^4 - \frac{1}{8}\pi^2$

解説

$f(x) = x\sin x$ から $f'(x) = \sin x + x\cos x$

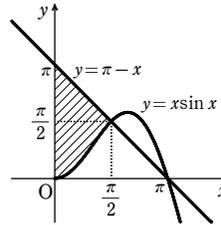
ゆえに $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$ よって、点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ における

$y = f(x)$ の法線の方程式は $y = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$

すなわち $y = \pi - x$

したがって、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot \pi^2 \cdot \pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx \\ &= \frac{7}{24}\pi^4 - \frac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{7}{24}\pi^4 - \frac{1}{2}\pi \left[x^2 \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) - 2x \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \cos 2x\right) + 2 \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8} \sin 2x\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{7}{24}\pi^4 - \frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{7}{24}\pi^4 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{24}\pi^3 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{13}{48}\pi^4 - \frac{1}{8}\pi^2 \end{aligned}$$



15

解答 $\frac{\pi}{12}(3e^2 - 19)$

解説

$xe^{1-x} = x$ とすると $x(e^{1-x} - 1) = 0$

ゆえに $x = 0$, $e^{1-x} - 1 = 0$ $e^{1-x} - 1 = 0$ から $x = 1$

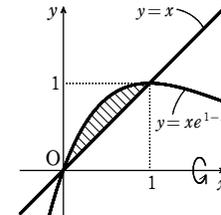
よって、曲線 $y = xe^{1-x}$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標は $x = 0, 1$

$0 \leq x \leq 1$ のとき $xe^{1-x} \geq x$

したがって、右の図から、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (xe^{1-x})^2 dx - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 \\ &= \pi e^2 \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ここで $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = \left[-\frac{x^2 e^{-2x}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x} dx$



b	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
V'			+	0	-
V			↗	極大	↘

$$\begin{aligned} &= -\frac{e^{-2}}{2} + \left[-\frac{x e^{-2x}}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^1 = -e^{-2} - \frac{1}{4}(e^{-2} - 1) = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2}) \end{aligned}$$

よって $V = \frac{\pi e^2}{4}(1 - 5e^{-2}) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}(3e^2 - 19)$

16

解答 (1) $p = -a$ (2) $\left(a + \frac{1 - e^a}{1 + e^a}\right)\pi$

解説

(1) $y = \frac{e^x}{1 + e^x} = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$ であるから $y' = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

よって、 C 上の点 P における接線と、点 A における接線が平行となるとき

$$\frac{e^p}{(1 + e^p)^2} = \frac{e^a}{(1 + e^a)^2}$$

分母を払って整理すると $e^p - e^a + e^{p+a}(e^a - e^p) = 0$

よって $(e^p - e^a)(1 - e^{p+a}) = 0$

点 P は点 A と異なるから、 $p \neq a$ であり $e^p \neq e^a$

したがって $e^{p+a} = 1$ ゆえに $p = -a$

(2) $a > 0$ であるから $p = -a < 0$

よって、求める体積を V とすると $V = \pi \int_{-a}^a \left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)^2 dx$

$1 + e^x = t$ とおくと $e^x dx = dt$

すなわち $dx = \frac{1}{t-1} dt$

$1 + e^{-a} = \alpha$, $1 + e^a = \beta$ とおくと

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{t-1} dt = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \frac{t-1}{t^2} dt = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \pi \left[\log |t| + \frac{1}{t} \right]_{\alpha}^{\beta} = \left(\log \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) \pi \end{aligned}$$

したがって $V = \left(\log \frac{1 + e^a}{1 + e^{-a}} + \frac{1}{1 + e^a} - \frac{1}{1 + e^{-a}} \right) \pi$

$$= \left\{ \log \frac{e^a(1 + e^a)}{e^a + 1} + \frac{1}{1 + e^a} - \frac{e^a}{e^a + 1} \right\} \pi$$

$$= \left(\log e^a + \frac{1 - e^a}{1 + e^a} \right) \pi = \left(a + \frac{1 - e^a}{1 + e^a} \right) \pi$$

17

解答 $\sqrt{2}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}})$

解説

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t}(-\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^{-t}(-\sin t + \cos t)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (e^{-t})^2((\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2) \\ &= (e^{-t})^2 \cdot 2(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2(e^{-t})^2 \end{aligned}$$

章末問題A

ゆえに $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(e^{-t})^2} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{2} \left[-e^{-t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
 $= \sqrt{2}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}})$

18

【解答】 $y = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{13}{8} \quad (x \geq 0)$

【解説】

[2] から $\int_0^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt = e^{2x} + f(x) - 2$

両辺を x で微分すると $\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = 2e^{2x} + f'(x)$

両辺を平方すると $1 + \{f'(x)\}^2 = 4e^{4x} + 4e^{2x}f'(x) + \{f'(x)\}^2$

よって $f'(x) = -e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}$

ゆえに $f(x) = \int \left(-e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right) dx = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} + C$ (C は積分定数)

また, [1] から $f(0) = 1$

よって $1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + C$ ゆえに $C = \frac{13}{8}$

したがって, 求める方程式 $y = f(x)$ は $y = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{13}{8} \quad (x \geq 0)$

19

【解答】 (1) $-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$ (2) $\frac{2}{3}\pi$

【解説】

(1) 水の深さが h であるときの水の体積を $V(h)$ とす

ると $V(h) = \pi \int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h y dy$

ゆえに $\frac{dV}{dh} = \pi h$

よって $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \pi h \frac{dh}{dt}$

題意から $\pi h \frac{dh}{dt} = -\sqrt{h}$

したがって $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$

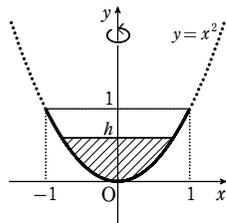
(2) (1) より $\frac{dt}{dh} = -\pi\sqrt{h}$ であるから

$T = \int_1^0 (-\pi\sqrt{h}) dh = \pi \int_0^1 \sqrt{h} dh = \pi \left[\frac{2}{3}h\sqrt{h}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi$

20

【解答】 (1) $\frac{2}{3}\tan\alpha$ (2) $\frac{\pi}{2\cos\alpha}$

【解説】



(1) 右の図のように, 底面の中心を O とし, 直径 MN を含み底面と角 α をなす平面で円柱を切るとする。

$0 \leq x \leq 1$ として, 線分 ON 上に $OP = x$ を満たす点 P をとる。

点 P を通り, 線分 MN に垂直な平面で小さい方の立体を切った切り口は直角三角形であるから, 右の図のように, それを $\triangle PQR$ とする。

$PR = \sqrt{OR^2 - OP^2} = \sqrt{1 - x^2}$

$QR = PR \tan \alpha = \sqrt{1 - x^2} \tan \alpha$

であるから, $\triangle PQR$ の面積は $\frac{1}{2}(\sqrt{1 - x^2})^2 \tan \alpha = \frac{1}{2}(1 - x^2) \tan \alpha$

よって, 求める体積 V は, 対称性を考えて

$V = 2 \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x^2) \tan \alpha dx = \tan \alpha \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} \tan \alpha$

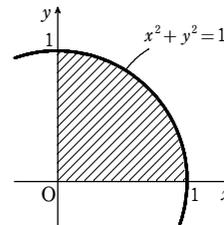
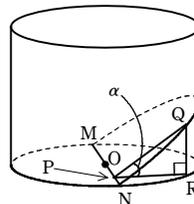
(2) $PQ = \frac{PR}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos \alpha}$ であるから, 求める

面積 A は対称性を考えて

$A = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos \alpha} dx = \frac{2}{\cos \alpha} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

ここで, $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ は右の図の斜線部分の面積を表すから $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

よって $A = \frac{2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\cos \alpha}$



【参考】 水平面と角 α をなす平面上に図形 F があり, その面積を S とする。

図形 F 上の点から水平面に下ろした垂線の足が水平面上に描く図形 F' を, 図形 F の水平面への正射影といい, F' の面積 S' について $S' = S \cos \alpha$ が成り立つ。このことを利用すると, A は次のように求められる。

切り口の底面への正射影は, 底面の半分の半円であるから

$A \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2$ よって $A = \frac{\pi}{2\cos \alpha}$

21

【解答】 (1) $S(t) = \begin{cases} -\pi \log t & \left(\frac{1}{e} \leq t \leq 1\right) \\ \pi & \left(0 \leq t < \frac{1}{e}\right) \end{cases}$ (2) $\pi \left(1 - \frac{1}{e}\right)$

【解説】

(1) $e^{-(x^2+y^2)} \geq t > 0 \iff x^2 + y^2 \leq \log \frac{1}{t}$ であるから

[1] $\sqrt{\log \frac{1}{t}} \leq 1$ すなわち $\frac{1}{e} \leq t \leq 1$ のとき

M の切り口は半径 $\sqrt{\log \frac{1}{t}}$ の円であるから

$S(t) = \pi \left(\sqrt{\log \frac{1}{t}}\right)^2 = -\pi \log t$

[2] $\sqrt{\log \frac{1}{t}} > 1$ すなわち $0 < t < \frac{1}{e}$ のとき, および $t = 0$ のとき

M の切り口は半径 1 の円であるから $S(t) = \pi$

[1], [2] から

$S(t) = \begin{cases} -\pi \log t & \left(\frac{1}{e} \leq t \leq 1\right) \\ \pi & \left(0 \leq t < \frac{1}{e}\right) \end{cases}$

(2) M の体積を V とすると

$V = \int_0^{\frac{1}{e}} \pi dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\pi \log t) dt$
 $= \frac{\pi}{e} - \pi \left[t \log t - t \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{e}\right)$

章末問題B

1

【解答】(1) 略

$$(2) S_1 = \left(\frac{t}{2} + 1\right) \log(t+1) - t$$

$$S_2 = \left(\frac{a}{2} + 1\right) \log(a+1) - \left(\frac{t}{2} + 1\right) \log(t+1) - a + t - \frac{a}{2} \log(t+1) + \frac{t}{2} \log(a+1)$$

$$(3) t = \frac{a}{\log(a+1)} - 1$$

【解説】

(1) $f(x) = \log(x+1) - \frac{x}{x+1}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ であるから、 $x > 0$ において $f(x)$ は単調に増加する。

また、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ であるから、 $x > 0$ のとき $f(x) > 0$

よって $\frac{x}{x+1} < \log(x+1)$ ……①

$g(x) = x - \log(x+1)$ とおくと $g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

$x > 0$ のとき $g'(x) > 0$ であるから、 $x > 0$ において $g(x)$ は単調に増加する。

また、 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ であるから、 $x > 0$ のとき $g(x) > 0$

よって $\log(x+1) < x$ ……②

①, ② から、 $x > 0$ のとき $\frac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$

(2) $\{\log(x+1)\}' = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ であるから、曲線 C

は上に凸である。

よって、曲線 C は $0 \leq x \leq t$ の範囲で線分 OP の上側にあり、 $t \leq x \leq a$ の範囲で線分 PA の上側にある。

ゆえに

$$S_1 = \int_0^t \log(x+1) dx - \frac{1}{2} \cdot t \cdot \log(t+1)$$

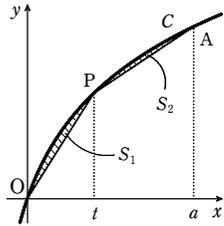
$$= \left[(x+1) \log(x+1) \right]_0^t - \frac{1}{2} t \log(t+1) - \int_0^t (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx - \frac{t}{2} \log(t+1) = (t+1) \log(t+1) - t - \frac{t}{2} \log(t+1) = \left(\frac{t}{2} + 1\right) \log(t+1) - t$$

$$S_2 = \int_t^a \log(x+1) dx - \frac{1}{2} [\log(a+1) + \log(t+1)](a-t)$$

$$= \left[(x+1) \log(x+1) \right]_t^a - \int_t^a (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} [\log(a+1) + \log(t+1)](a-t) = (a+1) \log(a+1) - (t+1) \log(t+1) - (a-t) - \frac{1}{2} [\log(a+1) + \log(t+1)](a-t)$$

$$= \left(\frac{a}{2} + 1\right) \log(a+1) - \left(\frac{t}{2} + 1\right) \log(t+1) - a + t - \frac{a}{2} \log(t+1) + \frac{t}{2} \log(a+1)$$

(3) (2) から $S_1 + S_2 = \left(\frac{a}{2} + 1\right) \log(a+1) - a - \frac{a}{2} \log(t+1) + \frac{t}{2} \log(a+1)$



これを $h(t)$ とおくと

$$h'(t) = -\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \log(a+1) = \frac{1}{2} \left[\log(a+1) - \frac{a}{t+1} \right]$$

$$h'(t) = 0 \text{ とすると } \log(a+1) = \frac{a}{t+1}$$

$$\text{よって } t = \frac{a}{\log(a+1)} - 1$$

この値を t_0 とおく。

$a > 0$ であるから、(1) により $\frac{a}{a+1} < \log(a+1) < a$

この不等式の各辺は正であるから、逆数をとると $\frac{1}{a} < \frac{1}{\log(a+1)} < \frac{a+1}{a}$

よって $0 < \frac{a}{\log(a+1)} - 1 < a$ すなわち $0 < t_0 < a$

また、 t の関数 $\frac{a}{t+1}$ は単調減少であるから、

$$t > t_0 \text{ のとき } \log(a+1) - \frac{a}{t+1} > 0$$

$$t < t_0 \text{ のとき } \log(a+1) - \frac{a}{t+1} < 0$$

すなわち、 $t > t_0$ のとき $h'(t) > 0$ 、 $t < t_0$ のとき $h'(t) < 0$ である。

ゆえに、 $0 < t < a$ における $h(t)$ の増減表は右のようになる。

したがって、 $h(t)$ を最小にする t は

$$t = \frac{a}{\log(a+1)} - 1$$

t	0	...	t_0	...	a
$h'(t)$		-	0	+	
$h(t)$		↘	極小	↗	

2

【解答】(1) $-1 \leq t \leq \frac{1}{e}$ のとき $S(t) = -2t + e - \frac{1}{e}$

$$\frac{1}{e} \leq t \leq e \text{ のとき } S(t) = 2t \log t - 2t + e + \frac{1}{e}$$

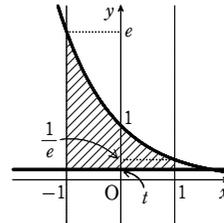
(2) $t = -1$ のとき最大値 $2 + e - \frac{1}{e}$ 、 $t = 1$ のとき最小値 $e + \frac{1}{e} - 2$

【解説】

(1) $-1 \leq x \leq 1$ において、 $y = e^{-x}$ の値域は $\frac{1}{e} \leq y \leq e$

[1] $-1 \leq t \leq \frac{1}{e}$ のとき

$$S(t) = \int_{-1}^1 (e^{-x} - t) dx = \left[-e^{-x} - tx \right]_{-1}^1 = -e^{-1} - t + e - t = -2t + e - \frac{1}{e}$$

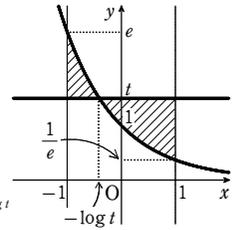


[2] $\frac{1}{e} \leq t \leq e$ のとき

$$e^{-x} = t \text{ とすると } x = -\log t$$

ゆえに

$$S(t) = \int_{-1}^{-\log t} (e^{-x} - t) dx + \int_{-\log t}^1 (t - e^{-x}) dx = \left[-e^{-x} - tx \right]_{-1}^{-\log t} + \left[tx + e^{-x} \right]_{-\log t}^1 = -e^{-\log t} + t \log t + e - t + t + e^{-1} + t \log t - e^{-\log t} = 2t \log t - 2t + e + \frac{1}{e}$$



(2) $-1 < t < \frac{1}{e}$ のとき $S'(t) = -2 < 0$

よって、 $S(t)$ は単調に減少する。

$\frac{1}{e} < t < e$ のとき $S'(t) = 2 \log t$

$S'(t) = 0$ とすると $t = 1$

$-1 \leq t \leq e$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	...	$\frac{1}{e}$...	1	...	e
$S'(t)$			-		0		+
$S(t)$	$2 + e - \frac{1}{e}$	↘	$e - \frac{3}{e}$	↘	$e + \frac{1}{e} - 2$	↗	$e + \frac{1}{e}$

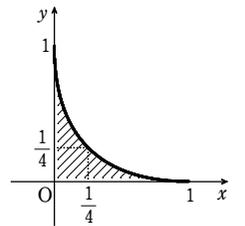
ここで $S(-1) - S(e) = 2 + e - \frac{1}{e} - \left(e + \frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{2}{e} > 0$

したがって、最大値は $S(-1) = 2 + e - \frac{1}{e}$ 、最小値は $S(1) = e + \frac{1}{e} - 2$

3

【解答】(図) ただし、境界線は座標軸を含まない；

面積 $\frac{1}{6}$



【解説】

l_t の方程式から $(1-t)y = t(1-x-t)$

$0 < t < 1$ 、 $y > 0$ から $1-x-t > 0$

ゆえに $0 < x < 1-t < 1$

また $0 < t < 1-x$

l_t 上の点 (x, y) について $y = \frac{t}{1-t}x + t$ ($0 < x < 1$)

この右辺を t の関数と考えて $g(t)$ とおくと

章末問題B

$$g'(t) = \frac{(t-1)-t}{(t-1)^2}x+1 = \frac{\{t-(1+\sqrt{x})\}\{t-(1-\sqrt{x})\}}{(t-1)^2}$$

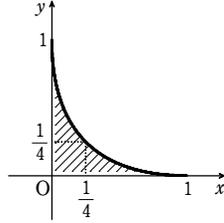
0 < t < 1-x における増減表は

t	0	...	1-√x	...	1-x
g'(t)		+	0	-	
g(t)	(0)	↗	(√x-1) ² 極大	↘	(0)

ゆえに 0 < g(t) = y ≤ (√x-1)²
よって、求める領域は、区間(0, 1)においてx軸と
曲線 y = (√x-1)² とに挟まれる部分である。

【図】ただし、境界線は座標軸を含まない。
したがって、その面積は

$$\int_0^1 (\sqrt{x}-1)^2 dx = \int_0^1 (x-2\sqrt{x}+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$



【注意】面積については、求める部分が境界線を含むものとして計算した。

4

【解答】 $\frac{2e-5}{2a^2}$

【解説】

$$f(x) = \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right) \frac{\log x}{x} = \frac{(e-x^\alpha)\log x}{x^{\alpha+1}}$$

α > 0, x > 0 であるから、f(x) = 0 とすると x = 1, e^{1/α}

このとき 1 < e^{1/α}

また、0 < x < 1 のとき f(x) < 0

1 ≤ x ≤ e^{1/α} のとき f(x) ≥ 0

e^{1/α} < x のとき f(x) < 0

よって、求める面積 S は $S = \int_1^{e^{1/\alpha}} \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right) \frac{\log x}{x} dx$

log x = t とおくと x = e^t, $\frac{1}{x} dx = dt$

よって $S = \int_0^{1/\alpha} (e^{1-\alpha t} - 1) t dt$

$$= \left[-\frac{1}{\alpha} e^{1-\alpha t} t \right]_0^{1/\alpha} + \int_0^{1/\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} e^{1-\alpha t} + t \right) dt$$

$$= \left(-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{1}{\alpha} + \left[-\frac{1}{\alpha^2} e^{1-\alpha t} + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{1/\alpha}$$

$$= -\frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^2} = \frac{2e-5}{2\alpha^2}$$

x	1 → e ^{1/α}
t	0 → 1/α

5

【解答】 (1) 略 (2) (4α-π)ab (3) $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

【解説】

(1) 領域 A は、右の図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ から } y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

この楕円は x 軸、y 軸に関して対称であるから、
A の面積は

$$4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

ここで、 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ の値は、半径 a の円の面積

の 1/4 倍と等しい。

よって、A の面積は $\frac{4b}{a} \cdot \frac{1}{4} \pi a^2 = \pi ab$

(2) 求める面積は、右の図の斜線部分の面積である。

ここで、領域 B の面積は、領域 A の面積と等しく、
πab である。

よって、求める面積は

$$(B \text{ の面積}) - (A \cap B \text{ の面積}) = \pi ab - S \dots\dots \textcircled{1}$$

そこで、S の値を求める。

図形の対称性から、x ≥ 0, y ≥ 0, y ≤ x の部分の面積
を求めて、8倍すればよい。

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y = x から y を消去して、x について

$$\text{解くと } x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$x_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ とおく。}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ から } y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \frac{S}{8} &= \int_{x_0}^b \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2} dx + \frac{1}{2} x_0^2 \\ &= \frac{a}{b} \int_{x_0}^b \sqrt{b^2 - x^2} dx + \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

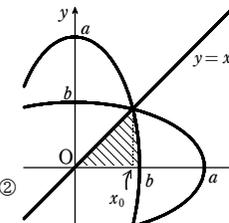
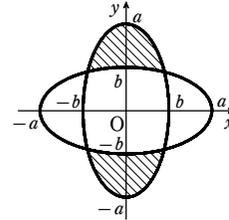
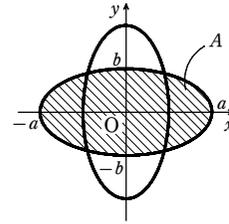
$$x = b \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおくと } dx = b \cos \theta d\theta$$

ここで、x = x₀ のとき $\sin \theta = \frac{x_0}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

一方、 $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 0 < α < π/2 であるから、

x = x₀ のとき θ = α

$$\text{ゆえに } \frac{a}{b} \int_{x_0}^b \sqrt{b^2 - x^2} dx = \frac{a}{b} \int_{\alpha}^{\pi/2} b \cos \theta \cdot b \cos \theta d\theta$$



x	x ₀ → b
θ	α → π/2

$$\begin{aligned} &= ab \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = ab \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= ab \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\alpha}^{\pi/2} = ab \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \end{aligned}$$

sin α = $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 0 < α < π/2 であるから

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{よって } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$\text{ゆえに、}\textcircled{2} \text{ から } S = 8 \left\{ ab \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} \right) + \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \right\} = 2(\pi - 2\alpha)ab$$

したがって、 $\textcircled{1}$ より、求める面積は

$$\pi ab - S = \pi ab - 2(\pi - 2\alpha)ab = (4\alpha - \pi)ab$$

(3) 和集合 A ∪ B の面積 T は、共通部分 A ∩ B の面積 S を用いて、 $T = 2\pi ab - S$ と表される。

よって、 $\textcircled{2}$ より $T = 2\pi ab - S = 2\pi ab - 2(\pi - 2\alpha)ab = 4\alpha ab$

ゆえに、T = 2S のとき $4\alpha ab = 2 \cdot 2(\pi - 2\alpha)ab$

a > b > 0 であるから、α について解くと $\alpha = \frac{\pi}{3}$

これは、0 < α < π/2 を満たす。

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ から } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{両辺を 2 乗して整理すると } a^2 = 3b^2 \text{ すなわち } \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

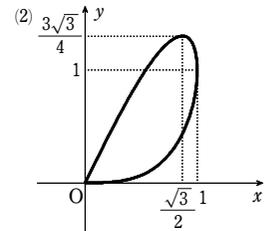
a > b > 0 より、0 < $\frac{b}{a} < 1$ であるから $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6

【解答】 (1) $\frac{dy}{dx} = 2 \cos t + 1 - \frac{1}{\cos t}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\tan t (\tan^2 t + 3)$$

(2) 【図】 (3) $\frac{2}{3}$



【解説】

(1) $\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = (-\sin t) \sin t + (1 + \cos t) \cos t = 2 \cos^2 t + \cos t - 1$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cos^2 t + \cos t - 1}{\cos t} = 2 \cos t + 1 - \frac{1}{\cos t}$$

章末問題B

また $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{dt}{dx}$

よって $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\sin t - \frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\cos t} = -2\tan t - \tan t(\tan^2 t + 1) = -\tan t(\tan^2 t + 3)$

(2) (1)より, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\tan t(\tan^2 t + 3)$ であるから

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ のとき $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

よって, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において, 曲線 C は上に凸, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ において曲線 C は下に凸の曲線である。

また, $\frac{dx}{dt} = \cos t$ より, $0 < t < \pi$ の範囲

で $\frac{dx}{dt} = 0$ となるのは $t = \frac{\pi}{2}$

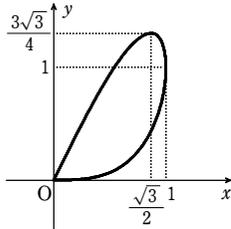
$\frac{dy}{dt} = 2\cos^2 t + \cos t - 1 = (2\cos t - 1)(\cos t + 1)$

よって, $0 < t < \pi$ の範囲で $\frac{dy}{dt} = 0$ となる

のは $t = \frac{\pi}{3}$

ゆえに, $0 \leq t \leq \pi$ における増減表は右のようになる。
したがって, 曲線 C の概形は右の図のようになる。

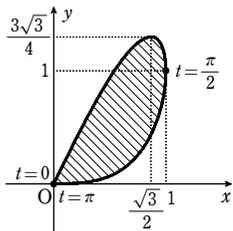
t	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{2}$...	π
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	0	-	
x	0	→	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	→	1	←	0
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	-	-	
y	0	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↓	1	↓	0



(3) (2)より, 求める面積 S は右の図の斜線部分の面積である。

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における y を y_1 , $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ における y を y_2 とすると

$$S = \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_1 \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y_2 \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t) \sin t \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos t) \sin t \cos t dt = \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \sin t \cos t dt = \int_0^{\pi} (\cos t + \cos^2 t) \sin t dt$$



$= \left[-\frac{1}{2} \cos^2 t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$

[7]

解答 (1) $T(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \cos 2\theta) + \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解説

(1) 点 A から点 Q までに点 P が動いた距離を L とすると

$$L = \int_0^{\theta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\theta} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt = \int_0^{\theta} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \int_0^{\theta} 3\cos t \sin t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\theta} \sin 2t dt$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から, $0 \leq t \leq \theta$ のとき $0 \leq 2t \leq 2\theta < \pi$

よって, $\sin 2t \geq 0$ であるから

$L = \frac{3}{2} \int_0^{\theta} \sin 2t dt = \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\theta} = \frac{3}{4}(1 - \cos 2\theta)$

また $QO = \sqrt{(\cos^3 \theta)^2 + (\sin^3 \theta)^2} = \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}$

よって $T(\theta) = \frac{L}{\sqrt{3}} + \frac{QO}{1} = \frac{3}{4} \frac{(1 - \cos 2\theta)}{\sqrt{3}} + \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \cos 2\theta) + \sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta}$

(2) $\sqrt{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} = \sqrt{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^3 - 3\cos^2 \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$

$$= \sqrt{1 - 3\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2\theta)} = \frac{1}{2} \sqrt{3\cos^2 2\theta + 1}$$

$\sqrt{3} \cos 2\theta = u$ とおくと, $0 < 2\theta < \pi$ から $-\sqrt{3} < u < \sqrt{3}$ ①

また $T(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{u}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + 1}$

これを $f(u)$ とすると

$f'(u) = -\frac{1}{4} + \frac{2u}{4\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{2u - \sqrt{u^2 + 1}}{4\sqrt{u^2 + 1}}$

$f'(u) = 0$ とすると $2u = \sqrt{u^2 + 1}$ ②

この右辺は正であるから $u > 0$

②の両辺を2乗して整理すると $3u^2 = 1$ よって $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$

①における $f(u)$ の増減表は, 右のようになる。

よって, $f(u)$ すなわち $T(\theta)$ は $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$

で最小になり, その最小値は

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

u	$-\sqrt{3}$...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	$\sqrt{3}$
$f'(u)$			-	0	+
$f(u)$			↘	極小	↗

[8]

解答 (1) $x(\theta) = 2\cos \theta - \cos 2\theta$, $y(\theta) = 2\sin \theta - \sin 2\theta$ (2) 略 (3) 5π

解説

(1) $OA = 2$ であるから $\vec{OA} = (2\cos \theta, 2\sin \theta)$

S_1 と S_2 の接点を Q とする。

\vec{AQ} と x 軸の正の向きとのなす角が $\theta + \pi$ であるから,

\vec{AP} と x 軸の正の向きとのなす角は

$(\theta + \pi) + \theta = 2\theta + \pi$

よって $\vec{AP} = (\cos(2\theta + \pi), \sin(2\theta + \pi))$

$= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$

ゆえに $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$

$= (2\cos \theta - \cos 2\theta, 2\sin \theta - \sin 2\theta)$

したがって $x(\theta) = 2\cos \theta - \cos 2\theta$, $y(\theta) = 2\sin \theta - \sin 2\theta$

(2) $x(2\pi - \theta) = 2\cos(2\pi - \theta) - \cos 2(2\pi - \theta) = 2\cos \theta - \cos(4\pi - 2\theta)$

$= 2\cos \theta - \cos 2\theta$

$= x(\theta)$

$y(2\pi - \theta) = 2\sin(2\pi - \theta) - \sin 2(2\pi - \theta) = -2\sin \theta - \sin(4\pi - 2\theta)$

$= -2\sin \theta + \sin 2\theta$

$= -y(\theta)$

よって, 曲線 C は x 軸に関して対称である。

(3) $\frac{dx(\theta)}{d\theta} = -2\sin \theta + 2\sin 2\theta$

$= 2\sin \theta(2\cos \theta - 1)$

$0 < \theta < \pi$ において $\frac{dx(\theta)}{d\theta} = 0$ とすると $\theta = \frac{\pi}{3}$

また $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$, $x(\pi) = -3$

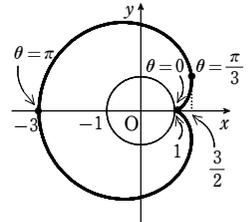
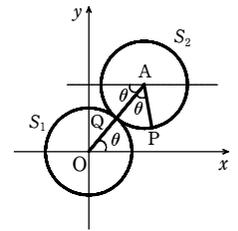
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ における y を y_1 , $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ における y

を y_2 とすると, 曲線 C で囲まれてできる図形の,

x 軸の上側の部分の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_{-3}^{\frac{3}{2}} y_2 dx - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} y_1 dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} y(\theta) \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} y(\theta) \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} y(\theta) \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (2\sin \theta - \sin 2\theta)(-2\sin \theta + 2\sin 2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} (2\sin^2 \theta - 3\sin \theta \sin 2\theta + \sin^2 2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \left(2 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 6\sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = 2 \left[\frac{3}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta - 2\sin^3 \theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi} = 3\pi$$

よって, 求める面積 S は $S = 2S_1 - \pi \cdot 1^2 = 6\pi - \pi = 5\pi$



章末問題B

9

【解答】(1) $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ (2) $\frac{\pi^3 a^2}{48}$

【解説】

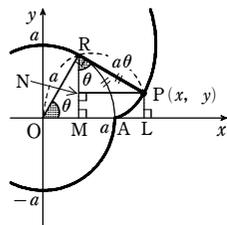
(1) 図から

$\angle PRM = \angle AOR = \theta$, $PR = \widehat{AR} = a\theta$

ゆえに $x = OL = OM + PN = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$

$y = PL = RM - RN = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ のときも、同じ式が得られる(略).



$$\begin{aligned} (2) \int_0^a x dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(\cos\theta + \theta\sin\theta) \cdot a\theta\sin\theta d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\theta}{2} \sin 2\theta + \frac{\theta^2}{2} (1 - \cos 2\theta) \right\} d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 2\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos 2\theta d\theta \right) \end{aligned}$$

ここで

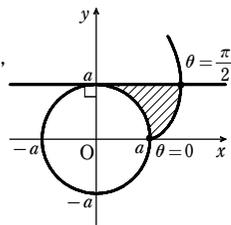
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 2\theta d\theta = \left[-\frac{1}{2} \theta \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 d\theta = \left[\frac{1}{3} \theta^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos 2\theta d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 2\theta d\theta = -\frac{\pi}{4}$$

ゆえに $\int_0^a x dy = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^3 a^2}{48} + \frac{\pi a^2}{4}$

よって、求める面積は $\int_0^a x dy - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi^3 a^2}{48}$



10

【解答】(1) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $r = \frac{\sqrt{6}}{4}$ (2) $\frac{38 - 15\sqrt{6}}{240} \pi$

【解説】

(1) 点(a, b)は放物線 $y = \sqrt{2}(x-1)^2$ 上にあるから $b = \sqrt{2}(a-1)^2$

また、 $y' = 2\sqrt{2}(x-1)$ であるから、点(a, b)における接線の傾きは

$$2\sqrt{2}(a-1) \dots \dots \textcircled{1}$$

点(a, b)は円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上にあるから、この点における法線は原点を通る。

よって、法線の傾きは $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}(a-1)^2}{a} \dots \dots \textcircled{2}$

ある点における接線と法線は直交するから、①、②より

$$2\sqrt{2}(a-1) \cdot \frac{\sqrt{2}(a-1)^2}{a} = -1$$

$$4(a-1)^3 = -a$$

$$4a^3 - 12a^2 + 13a - 4 = 0$$

$$(2a-1)(2a^2 - 5a + 4) = 0$$

$2a^2 - 5a + 4 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -7 < 0$$

であるから、方程式 $2a^2 - 5a + 4 = 0$ は実数解をもたない。

よって $a = \frac{1}{2}$

したがって $b = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

(2) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $r = \frac{\sqrt{6}}{4}$ のとき、連立不等式

が表す領域は右の図の斜線部分ようになる。

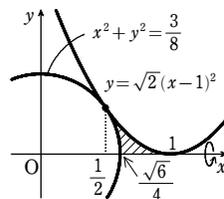
円 $x^2 + y^2 = \frac{3}{8}$ の $y \geq 0$ の部分は $y = \sqrt{\frac{3}{8} - x^2}$ で

あるから、求める体積は

$$\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \{ \sqrt{2}(x-1)^2 dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\sqrt{\frac{3}{8} - x^2} \right)^2 dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{5}(x-1)^5 \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \pi \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 2\pi \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{16} - \frac{7}{48} \right)$$

$$= \frac{38 - 15\sqrt{6}}{240} \pi$$



11

【解答】(1) $(t+1)\log(t+1) - t\log t - 1$ (2) $\pi(t^2-1)\log(t+1) - \pi t^2 \log t + \pi t - \frac{\pi}{2}$

(3) 2π

【解説】

(1) $S(t)$ は右の図の斜線部分の面積である。

よって $S(t) = \int_0^t \log(x+1) dx - \int_1^t \log x dx$

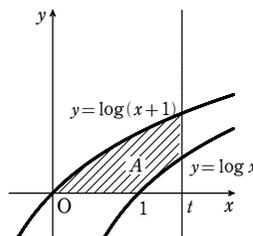
$$= \int_1^{t+1} \log x dx - \int_1^t \log x dx$$

$$= \int_t^{t+1} \log x dx$$

ここで $\int \log x dx = x \log x - \int dx$

$$= x \log x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから $S(t) = [x \log x - x]_t^{t+1} = (t+1)\log(t+1) - t\log t - 1$



(2) 求める体積は、底面の円の半径が t 、高さが $\log(t+1)$ である円柱の体積から、

直線 $y = \log(t+1)$ 、曲線 $y = \log(x+1)$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転して

できる立体の体積と、直線 $x=t$ 、曲線 $y = \log x$

および x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転して

できる立体の体積を引いたものである。

また、

$$y = \log(x+1) \text{ のとき } x = e^y - 1$$

$$y = \log x \text{ のとき } x = e^y$$

であるから、求める体積 $W(t)$ は

$$W(t) = \pi t^2 \log(t+1) - \pi \int_0^{\log(t+1)} (e^y - 1)^2 dy - \left\{ \pi t^2 \log t - \pi \int_0^{\log t} (e^y)^2 dy \right\}$$

ここで $\pi \int_0^{\log(t+1)} (e^y - 1)^2 dy = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} - 2e^y + y \right]_0^{\log(t+1)}$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2} e^{2\log(t+1)} - 2e^{\log(t+1)} + \log(t+1) + \frac{3}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} t^2 - t + \log(t+1) \right\} \pi$$

$$\pi \int_0^{\log t} (e^y)^2 dy = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^{\log t} = \frac{\pi}{2} (t^2 - 1)$$

よって $W(t) = \pi t^2 \log(t+1) - \frac{\pi}{2} t^2 + \pi t - \pi \log(t+1) - \pi t^2 \log t + \frac{\pi}{2} (t^2 - 1)$

$$= \pi(t^2 - 1)\log(t+1) - \pi t^2 \log t + \pi t - \frac{\pi}{2}$$

(3) $\frac{dW}{dt} = 2\pi t \log(t+1) + \pi(t^2 - 1) \cdot \frac{1}{t+1} - 2\pi t \log t - \pi t^2 \cdot \frac{1}{t} + \pi$

$$= 2\pi t \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) = 2\pi \log \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

よって $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dW}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi \log \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = 2\pi \log e = 2\pi$

12

【解答】(1) $V_1 = \frac{11}{480} \pi$, $V_2 = \frac{8\sqrt{2} - 7}{192} \pi$ (2) $\frac{V_2}{V_1} < 1$

【解説】

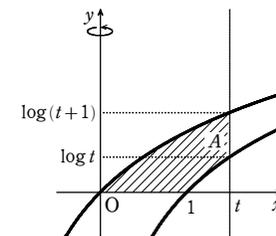
(1) $y = \frac{1}{2} x^2 \dots \dots \textcircled{1}$, $\frac{x^2}{4} + 4y^2 = \frac{1}{8} \dots \dots \textcircled{2}$ とする。

①を②に代入して $\frac{x^2}{4} + x^4 = \frac{1}{8}$

よって $8x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ ゆえに $(2x^2 + 1)(4x^2 - 1) = 0$

よって $x = \pm \frac{1}{2}$ ①から、 $x = \pm \frac{1}{2}$ のとき $y = \frac{1}{8}$

ゆえに、2曲線①、②の交点の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right)$



章末問題B

よって、領域Sは、右の図の斜線部分のようになり、領域Sはy軸に関して対称な図形である。

ここで、②から $y^2 = \frac{1}{32} - \frac{x^2}{16}$

ゆえに $V_1 = 2 \times \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\left(\frac{1}{32} - \frac{x^2}{16} \right) - \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \right) dx$
 $= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{16} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{2} \right) dx$
 $= \pi \left[\frac{x}{16} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^5}{10} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{11}{480} \pi$

また、①から $x^2 = 2y$ ②から $x^2 = \frac{1}{2} - 16y^2$

よって $V_2 = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{8}} 2y dy + \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{8}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - 16y^2 \right) dy = \pi \left[y^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{8}} + \pi \left[\frac{y}{2} - \frac{16}{3} y^3 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{8}}^{\frac{1}{2}}$
 $= \frac{\pi}{64} + \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{24} - \frac{5}{96} \right) = \frac{8\sqrt{2}-7}{192} \pi$

(2) $V_1 - V_2 = \frac{11}{480} \pi - \frac{8\sqrt{2}-7}{192} \pi = \frac{22 - (40\sqrt{2} - 35)}{960} \pi = \frac{57 - 40\sqrt{2}}{960} \pi$

ここで $57^2 = 3249$, $(40\sqrt{2})^2 = 3200$

よって、 $57^2 > (40\sqrt{2})^2$ から $57 > 40\sqrt{2}$ すなわち $57 - 40\sqrt{2} > 0$

よって $V_1 - V_2 > 0$ ゆえに $V_1 > V_2$

$V_1 > 0$ であるから $\frac{V_2}{V_1} < 1$

13

【解答】 (1) $a = \frac{1}{ep}$, 点Qのx座標は $e^{\frac{1}{p}}$ (2) $2\pi \left(1 - \frac{2p-1}{2p+1} e^{\frac{1}{p}} \right)$ (3) $p = \frac{1}{2}$

【解説】

(1) 2つの曲線 $y = ax^p (x > 0)$, $y = \log x (x > 0)$ の共有点が1点のみであるための条件は、方程式 $ax^p = \log x (x > 0)$ の実数解がただ1つであることである。

$f(x) = ax^p - \log x$ とおくと $f'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{apx^p - 1}{x}$

$a > 0$, $p > 0$ であるから、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

また $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^p \left(a - \frac{1}{x^p \log x} \right) = \infty$

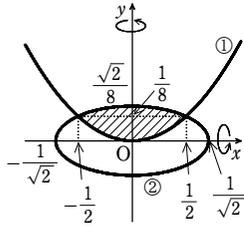
x	0	...	$\left(\frac{1}{ap} \right)^{\frac{1}{p}}$...
$f'(x)$	/	-	0	+
$f(x)$	/	↘	極小	↗

よって、方程式 $ax^p = \log x$ の実数解がただ1つであるための条件は

$f\left(\left(\frac{1}{ap} \right)^{\frac{1}{p}} \right) = 0$

$f\left(\left(\frac{1}{ap} \right)^{\frac{1}{p}} \right) = a \cdot \frac{1}{ap} - \frac{1}{p} \log \frac{1}{ap} = \frac{1 + \log ap}{p}$ であるから

$\log ap + 1 = 0$ すなわち $a = \frac{1}{ep}$



このときの点Qのx座標は、方程式 $ax^p = \log x$ の実数解と等しいから $\left(\frac{1}{ap} \right)^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{1}{p}}$

(2) (1)より、 $a = \frac{1}{ep}$ のとき、 $x > 0$ において $ax^p \geq \log x$ であり、等号は $x = e^{\frac{1}{p}}$ のとき成り立つ。

よって、2つの曲線とx軸で囲まれる図形は、右の図の斜線部分のようになり、求める体積をVとすると

$V = \pi \int_0^{e^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{ep} x^p \right)^2 dx - \pi \int_1^{e^{\frac{1}{p}}} (\log x)^2 dx$

ここで $\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx = x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C$ (Cは積分定数)

よって $V = \frac{\pi}{e^2 p^2} \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^{e^{\frac{1}{p}}} - \pi \left[x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_1^{e^{\frac{1}{p}}}$

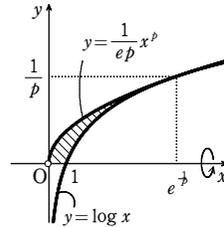
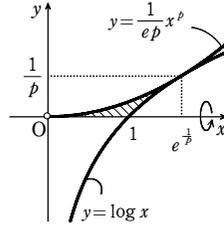
$= \pi \left\{ \frac{e^{\frac{2}{p}}}{p^2(2p+1)} - \left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2 \right) e^{\frac{1}{p}} + 2 \right\}$

$= \pi \left\{ \frac{1 - (2p+1)(1-2p+2p^2)e^{\frac{1}{p}} + 2}{p^2(2p+1)} \right\} = 2\pi \left(1 - \frac{2p-1}{2p+1} e^{\frac{1}{p}} \right)$

(3) $V = 2\pi$ から $2\pi \left(1 - \frac{2p-1}{2p+1} e^{\frac{1}{p}} \right) = 2\pi$

よって、 $\frac{2p-1}{2p+1} e^{\frac{1}{p}} = 0$ であるから $p = \frac{1}{2}$

【参考】 $0 < p < 1$ のとき、曲線 $y = ax^p (x > 0)$ は上に凸であり、右の図のように、曲線 $y = \log x$ と接する。



14

【解答】 (1) $\frac{t^2+1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{10} \pi$

【解説】

(1) 点Pを通り、傾きが-1である直線の方程式は $y - (t^2 - t + 1) = -(x - t)$

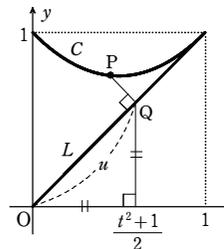
すなわち $y = -x + t^2 + 1$

この直線と直線 $y = x$ との交点が点Qであるから、Qのx座標は、方程式 $x = -x + t^2 + 1$ を解いて

$x = \frac{t^2 + 1}{2}$

したがって $u = \sqrt{2} \cdot \frac{t^2 + 1}{2} = \frac{t^2 + 1}{\sqrt{2}}$

(2) 線分PQの長さは、点Pと直線 $y = x$ との距離に



等しいから

$PQ = \frac{|t - (t^2 - t + 1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-t^2 + 2t - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-(t-1)^2|}{\sqrt{2}} = \frac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}$

(3) 右の図のように、図形Dを直線 $y = -x + 1$ で2つの図形 D_1, D_2 に分ける。

D_1, D_2 を直線 $y = x$ の周りに1回転してできる立体の体積を、それぞれ V_1, V_2 とすると

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi$

$V_2 = \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} PQ^2 du = \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{(t-1)^4}{2} du$

ここで、 $u = \frac{t^2 + 1}{\sqrt{2}}$ より $du = \sqrt{2} t dt$

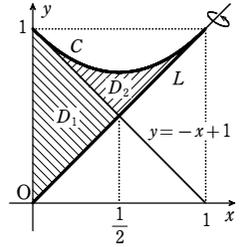
よって $V_2 = \pi \int_0^1 \frac{(t-1)^4}{2} \cdot \sqrt{2} t dt$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^1 (t-1)^4 (t-1) + 1 dt$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^1 ((t-1)^5 + (t-1)^4) dt$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \left[\frac{(t-1)^6}{6} + \frac{(t-1)^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{60} \pi$

したがって $V = V_1 + V_2 = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi + \frac{\sqrt{2}}{60} \pi = \frac{\sqrt{2}}{10} \pi$



u	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	\rightarrow	$\sqrt{2}$
t	0	\rightarrow	1

15

【解答】 (1) $y = -\frac{1}{2}x + a^2 + \frac{1}{2}a$ (2) $\frac{2a^2 + a}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2a - a^2}{\sqrt{5}}$

(4) $\frac{-3a^4 + 7a^3 + 3a^2}{15}$ (5) $\frac{\sqrt{5}\pi}{75} (2a^6 - 9a^5 + 9a^4 + 4a^3)$

【解説】

(1) 直線 l は点 $P(a, a^2)$ を通り、傾きが $-\frac{1}{2}$ の直線であるから、直線 l の方程式は $y - a^2 = -\frac{1}{2}(x - a)$

すなわち $y = -\frac{1}{2}x + a^2 + \frac{1}{2}a$ ①

(2) 原点Oを通り、直線 l に垂直な直線は $y = 2x$ であるから、原点Oと点Qの距離は原点Oと直線 l の距離と一致する。

①を変形して $x + 2y - 2a^2 - a = 0$

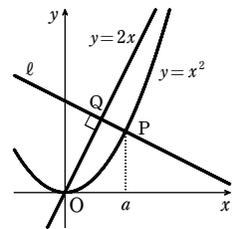
よって、求める距離を d とすると $d = \frac{|0 + 2 \cdot 0 - 2a^2 - a|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-2a^2 - a|}{\sqrt{5}}$

$0 < a < 2$ であるから $|-2a^2 - a| = 2a^2 + a$

したがって $d = \frac{2a^2 + a}{\sqrt{5}}$

(3) $OP^2 = a^2 + (a^2)^2 = a^2 + a^4$

$\triangle OPQ$ は直角三角形であるから、三平方の定理より



$$PQ^2 = OP^2 - d^2 = a^2 + a^4 - \left(\frac{2a^2+a}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{a^4 - 4a^3 + 4a^2}{5} = \frac{(a^2-2a)^2}{5}$$

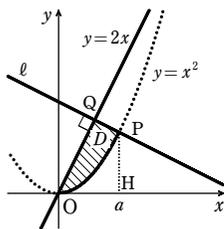
$0 < a < 2$ であるから $a^2 - 2a < 0$

よって $PQ = \frac{2a-a^2}{\sqrt{5}}$

(4) 点Pからx軸に垂線を下ろし、x軸との交点をHとする。

求める面積をSとすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle OPQ + \triangle OPH - \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2+a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2a-a^2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} a \cdot a^2 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a \\ &= \frac{-3a^4 + 7a^3 + 3a^2}{15} \end{aligned}$$



(5) 曲線 $y=x^2$ ($0 \leq x \leq a$) 上の点でx座標がtであるような点をP'とし、P'を通り、直線 $y=2x$ に垂直な直線と直線 $y=2x$ との交点をQ'とする。

このとき、(2)、(3)と同様にして、原点Oと点Q'の距離sと線分P'Q'の長さは

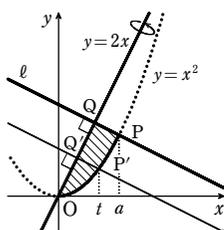
$$s = \frac{2t^2+t}{\sqrt{5}}, \quad P'Q' = \frac{2t-t^2}{\sqrt{5}}$$

であることがわかる。

求める立体の体積をVとすると $V = \pi \int_0^{\frac{2a^2+a}{\sqrt{5}}} P'Q'^2 ds$

$s = \frac{2t^2+t}{\sqrt{5}}$ のとき、 $ds = \frac{4t+1}{\sqrt{5}} dt$ であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a \left(\frac{2t-t^2}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \frac{4t+1}{\sqrt{5}} dt \\ &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \int_0^a (4t^3 - 15t^4 + 12t^3 + 4t^2) dt \\ &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \left[\frac{2}{3}t^6 - 3t^5 + 3t^4 + \frac{4}{3}t^3 \right]_0^a \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi}{75} (2a^6 - 9a^5 + 9a^4 + 4a^3) \end{aligned}$$



s	0 → $\frac{2a^2+a}{\sqrt{5}}$
t	0 → a

16

解答 4

解説

$$x = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta = \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$y = r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta = \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

よって $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta - 2\cos \theta \sin \theta = -\sin \theta - \sin 2\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta + \cos 2\theta$$

ゆえに $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (-\sin \theta - \sin 2\theta)^2 + (\cos \theta + \cos 2\theta)^2$

$$= 2 + 2\sin \theta \sin 2\theta + 2\cos \theta \cos 2\theta = 2 + 2\cos \theta$$

$$= 2 + 2\left(2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) = 4\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ であるから、求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta &= \int_0^\pi \sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4 \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

17

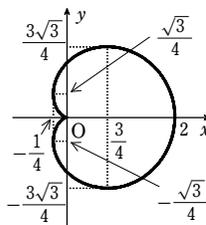
解答 (1) $\frac{dx}{d\theta} = 0$ となる点 $(2, 0), \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$

$(0, 0), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\frac{dy}{d\theta} = 0$ となる点 $\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), (0, 0),$

$\left(\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(2) $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{dy}{dx} = 0$ (3) [図] (4) 8



解説

(1) $r = 1 + \cos \theta$ であるから $x = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta$
 $y = r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta$

ゆえに $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \cos \theta - (1 + \cos \theta) \sin \theta = -\sin \theta (1 + 2\cos \theta)$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta = (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

よって、 $\frac{dx}{d\theta} = 0$ となる θ の値は $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$

したがって、 $\frac{dx}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標は

$(2, 0), \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), (0, 0), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

また、 $\frac{dy}{d\theta} = 0$ となる θ の値は $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

したがって、 $\frac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標は $\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), (0, 0), \left(\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}{-\sin \theta (1 + 2\cos \theta)}$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}{-\sin \theta (1 + 2\cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \left[-\frac{(2\cos \theta - 1)\sin^2 \theta}{\sin \theta (1 + 2\cos \theta)(1 - \cos \theta)} \right] \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \left[-\frac{(2\cos \theta - 1)\sin \theta}{(1 + 2\cos \theta)(1 - \cos \theta)} \right] = 0 \end{aligned}$$

(3) $x(\theta) = (1 + \cos \theta) \cos \theta, y(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$ とすると

$$x(2\pi - \theta) = x(\theta), y(2\pi - \theta) = -y(\theta)$$

よって、曲線Cで $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ に対応する曲線は $0 \leq \theta \leq \pi$ に対応する曲線をx軸に関して対称移動したものである。

(1) から、 $0 \leq \theta \leq \pi$ における増減表は次のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{2}{3}\pi$...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		-	-	-	0	+	0
x	2	←	$\frac{3}{4}$	←	$-\frac{1}{4}$	→	0
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	0
y	0	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↓	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↓	0

したがって、(2)と合わせて、曲線Cの概形は右の図のようになる。

(4) $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta - 2\sin \theta \cos \theta = -\sin \theta (1 + 2\cos \theta)$

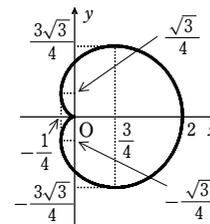
$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = (\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1)$$

であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (-\sin \theta (1 + 2\cos \theta))^2 \\ &\quad + (\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1)^2 \\ &= 2 + 2\cos \theta = 4\cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

ゆえに、曲線Cの長さをlとすると

$$l = 2 \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \left[2\sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 8$$



18

解答 (1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\frac{\pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})}{2}$

解説

(1) $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

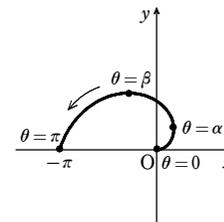
(2) 極方程式 $r = \theta$ ($\theta \geq 0$) から

$$x = r \cos \theta = \theta \cos \theta, y = r \sin \theta = \theta \sin \theta$$

ここで $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta - \theta \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta + \theta \cos \theta$

よって、 θ についての x, y の増減表は次のようになる。

θ	0	...	α	...	β	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		+	0	-	-	-	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	+	+	0	-	
x		↗	極大	↘	↘	↘	
y		↗	↗	↗	極大	↘	



ただし $\cos \alpha - \alpha \sin \alpha = 0$

$$\sin \beta + \beta \cos \beta = 0$$

ゆえに、曲線は右の図のようになる。

章末問題B

したがって、曲線 $r = \theta$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを L とすると

$$L = \int_0^\pi \sqrt{(\cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \theta \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

$$= \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\theta^2}{\sqrt{1 + \theta^2}} d\theta$$

$$= \pi \sqrt{1 + \pi^2} - \int_0^\pi \frac{1 + \theta^2 - 1}{\sqrt{1 + \theta^2}} d\theta$$

$$= \pi \sqrt{1 + \pi^2} - L + \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}$$

よって $2L = \pi \sqrt{1 + \pi^2} + \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}$

(1) より $2L = \pi \sqrt{1 + \pi^2} + \left[\log(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right]_0^\pi$

$$= \pi \sqrt{1 + \pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1 + \pi^2})$$

ゆえに $L = \frac{\pi \sqrt{1 + \pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1 + \pi^2})}{2}$

19

解答 (1) $\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $S(t) = 2(t+1)\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$ (3) $\frac{4}{3}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

解説

(1) $y \geq 0$ のとき、曲線 C は $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ と表せる。

右の図の斜線部分は x 軸に関して対称であるから、求め

る面積は $2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$

ここで、 $x = 2\cos \theta$ とおくと $dx = -2\sin \theta$

よって $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$

$$= \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \cdot (-2\sin \theta) d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

したがって、求める面積は $2 \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$

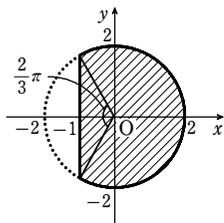
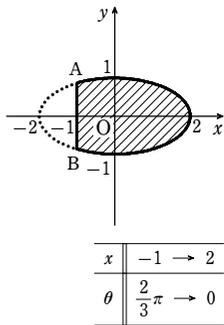
別解 y 軸方向に2倍して考える。

このとき、曲線 C は円 $x^2 + y^2 = 4$ に移る。

右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{4}{3}\pi + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}$$

したがって $S(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3} \right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$



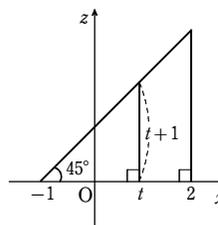
(2) 立体 V は平面 H 、平面 T 、曲面 K で囲まれた立体で、曲面 K は z 軸に平行であるから、立体 V を平面 $x = t$ で切った切り口は長方形になる。

平面 H と平面 T のなす角は 45° であるから、右の図より、切り口の長方形の縦の長さは $t+1$

立体 V と平面 H の共通部分は x 軸に関して対称である

から、切り口の長方形の横の長さは $2\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$

よって $S(t) = 2(t+1)\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$



(3) (2) から、立体 V の体積は $\int_{-1}^2 S(t) dt = 2 \int_{-1}^2 (t+1)\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt$

$$= 2 \int_{-1}^2 t\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt + 2 \int_{-1}^2 \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt$$

ここで、(1) から $\int_{-1}^2 \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$

また $\int_{-1}^2 t\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt = -2 \int_{-1}^2 \left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t^2}{4}\right)' dt = -2 \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって、立体 V の体積は $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

20

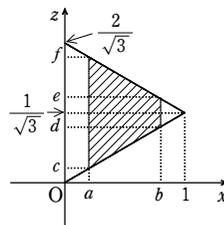
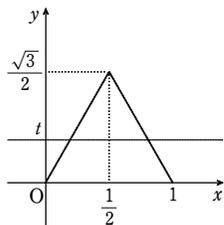
解答 $\frac{1}{4}$

解説

立体 K と L の共通部分を平面 $y = t$ で切ったときの切り口を考える。立体 K の xy 平面への射影は左図の正三角形であるから、 $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、立体 K と平面 $y = t$ の共

通部分の x の範囲は $\frac{1}{\sqrt{3}}t \leq x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t$

また、立体 L の $y = t$ による切り口は $(0, t, 0)$ 、 $(0, t, \frac{2}{\sqrt{3}})$ 、 $(1, t, \frac{1}{\sqrt{3}})$ を頂点とする正三角形だから、立体 K と L の共通部分の平面 $y = t$ による切り口は、右図の斜線部分のような台形となる。



[右図において $a = \frac{t}{\sqrt{3}}$ 、 $b = 1 - \frac{t}{\sqrt{3}}$ 、 $c = \frac{t}{3}$ 、 $d = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{t}{3}$ 、 $e = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{3}$ 、 $f = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t}{3}$]

この台形の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}t \right) - \frac{1}{3}t \right] + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}t \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}t \right) \right] \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t \right) - \frac{1}{\sqrt{3}}t \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}t \right)$$

よって、 K と L の共通部分の体積 V は

$$V = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}t \right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[t - \frac{1}{\sqrt{3}}t^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

章末問題C

1

【解答】 (1) 略 (2) $2\log \frac{y_2}{y_1}$

【解説】

(1) 点 $P_i(x_i, y_i)$ を通る x 軸に平行な直線と、直線 $y=x$ との交点 H_i の座標は

$$(y_i, y_i)$$

$$\text{よって } \triangle OP_i H_i = \frac{1}{2} |y_i - x_i| |y_i| = \frac{1}{2} |y_i^2 - x_i y_i|$$

ここで、点 P_i は曲線 C 上の点であるから

$$y_i = \frac{1}{2} x_i + \sqrt{\frac{1}{4} x_i^2 + 2}$$

$$\text{ゆえに } y_i^2 - x_i y_i = y_i(y_i - x_i)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} x_i + \sqrt{\frac{1}{4} x_i^2 + 2}\right) \left(\frac{1}{2} x_i + \sqrt{\frac{1}{4} x_i^2 + 2} - x_i\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{4} x_i^2 + 2} + \frac{1}{2} x_i\right) \left(\sqrt{\frac{1}{4} x_i^2 + 2} - \frac{1}{2} x_i\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{4} x_i^2 + 2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} x_i\right)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \triangle OP_i H_i = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad (i=1, 2)$$

したがって、 $\triangle OP_1 H_1$ と $\triangle OP_2 H_2$ の面積は等しい。

(2) まず、曲線 C の概形を調べる。

$$y = \frac{1}{2} x + \sqrt{\frac{1}{4} x^2 + 2}$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2} x\right)^2 = \frac{1}{4} x^2 + 2 \quad (y \geq \frac{1}{2} x)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - xy = 2 \quad (y \geq \frac{1}{2} x)$$

$$\Leftrightarrow x = y - \frac{2}{y} \quad (y \geq \frac{1}{2} x)$$

曲線 $x = y - \frac{2}{y}$ は、2直線 $x=y$, $y=0$ を漸近線にもつ双曲線であるから、曲線 C の概形は右の図のようになる。

求める面積を S とすると、 S は右の図の斜線部分の面積である。

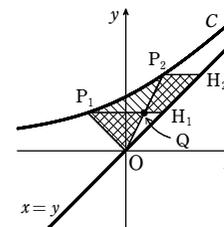
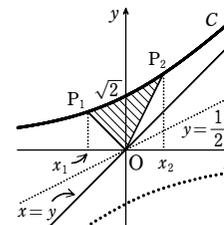
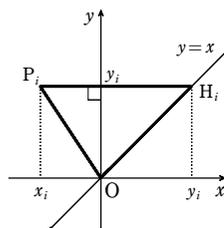
ここで、線分 $P_1 H_1$ と線分 OP_2 の交点を Q とする。

$$(1) \text{より } \triangle OP_1 H_1 = \triangle OP_2 H_2$$

$\triangle OQH_1$ は、 $\triangle OP_1 H_1$ と $\triangle OP_2 H_2$ の両方に含まれるから、 $\triangle OP_1 Q$ の面積は、四角形 $P_2 Q H_1 H_2$ の面積と等しい。

ゆえに、 S は右の図の斜線部分の面積と等しいから

$$S = \int_{x_1}^{y_2} \left\{ y - \left(y - \frac{2}{y}\right) \right\} dy$$



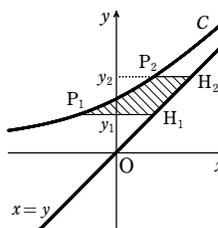
$$= \int_{x_1}^{y_2} \frac{2}{y} dy = \left[2 \log |y| \right]_{x_1}^{y_2}$$

$$= 2 \log \frac{y_2}{x_1}$$

【参考】 (2) の面積は、(1) を利用せずに、 x について積分して求めることも可能である。

その際、[1] $0 < x_1 < x_2$, [2] $x_1 < 0 < x_2$,

[3] $x_1 < x_2 < 0$ の3つの場合に分けて考えればよい。



2

【解答】 $\frac{2}{3} \pi - \log(2 + \sqrt{3})$

【解説】

C_1 と C_2 は共に直線 $y=x$ に関して対称であるから、2点 A, B も直線 $y=x$ に関して対称である。よって領域 $y > x$ にある方を A として考えてもよい。

$A(a, \frac{1}{a})$ とすると、線分 OA の傾きは $\frac{1}{a^2}$ であり、これを $\tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおく。

$C_1: y = \frac{1}{x}$ より $y' = -\frac{1}{x^2}$ であるから、接線 l の傾きは $-\frac{1}{a^2}$ であり、また

$$-\frac{1}{a^2} = -\tan \theta = \tan(\pi - \theta)$$

よって、 l が x 軸と交わる点を C とすると、 $\triangle OAC$ は $AO=AC$ の二等辺三角形である。

$\angle OAC = \frac{\pi}{6}$ であるから $\theta = \angle AOC = \angle ACO = \frac{5}{12} \pi$

$$\frac{1}{a^2} = \tan \frac{5}{12} \pi = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

よって $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\frac{1}{a} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

ゆえに $A(\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \sqrt{2 + \sqrt{3}})$, $B(\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \sqrt{2 - \sqrt{3}})$

C_2 の半径は原点 O と点 A 間の距離であるから $\sqrt{(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2} = 2$

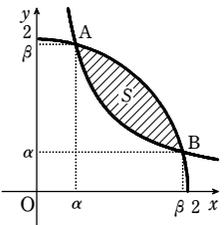
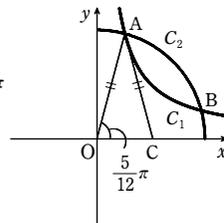
$\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $\beta = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ とおき、求める面積を

$$\begin{aligned} S &\text{ とすると } S = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{4 - x^2} dx - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

$$\text{ここで } 2 \sin \frac{5}{12} \pi = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \beta,$$

$$2 \cos \frac{5}{12} \pi = 2 \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \alpha$$

であるから、 $x = 2 \sin t$ とおくと $dx = 2 \cos t dt$



$$\text{したがって } S = \int_{-\frac{5\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} 4 \cos^2 t dt - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx$$

$$= 2 \int_{-\frac{5\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (1 + \cos 2t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx$$

$$= 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\frac{5\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} - \left[\log |x| \right]_{\alpha}^{\beta} = 2 \left(\frac{5}{12} \pi + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \right) - \log \frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \frac{2}{3} \pi - \log \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \frac{2}{3} \pi - \log(2 + \sqrt{3})$$

3

【解答】 (1) $\left(\cos t + \frac{\sqrt{d^2 - \sin^2 t}}{2}, \frac{\sin t}{2} \right)$ (2) $\frac{\pi}{4}$

【解説】

(1) $Q(q, 0)$ とする。

$\triangle OPQ$ において、余弦定理より

$$d^2 = 1 + q^2 - 2q \cos t$$

$$\text{よって } q^2 - 2q \cos t + 1 - d^2 = 0$$

$$\text{ゆえに } q = \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - (1 - d^2)}$$

$$= \cos t \pm \sqrt{d^2 - \sin^2 t}$$

$q > 0$ であるから $q = \cos t + \sqrt{d^2 - \sin^2 t}$

したがって、 R の座標は

$$\left(\cos t + \frac{\sqrt{d^2 - \sin^2 t}}{2}, \frac{\sin t}{2} \right)$$

(2) $x = \cos t + \frac{\sqrt{d^2 - \sin^2 t}}{2}$, $y = \frac{\sin t}{2}$ とおく。

$0 \leq t \leq \pi$ における x, y の値の変化は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π
x	$1 + \frac{d}{2}$	\searrow	$\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{2}$	\searrow	$-1 + \frac{d}{2}$
y	0	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow	0

よって、曲線の概形は右の図のようになる。

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における x を x_1 , $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ における x を

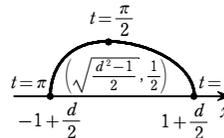
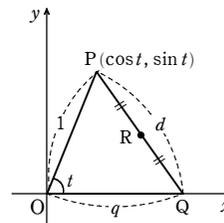
x_2 とすると、求める面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} (x_1 - x_2) dy$$

となる。ここで、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$x_1 = x(t) = \cos t + \frac{\sqrt{d^2 - \sin^2 t}}{2}$$

$$x_2 = x(\pi - t) = \cos(\pi - t) + \frac{\sqrt{d^2 - \sin^2(\pi - t)}}{2} = -\cos t + \frac{\sqrt{d^2 - \sin^2 t}}{2}$$



章末問題C

よって $x_1 - x_2 = 2\cos t$ また $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\cos t$

ゆえに $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot \frac{1}{2}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

4

〔解答〕 (1) $f(t)$ は $t = \frac{\pi}{6}$ で最大値 $\frac{3}{2}$, $g(t)$ は $t = \frac{\pi}{6}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) 略

(3) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$

〔解説〕

(1) $f'(t) = 2\cos t - 2\sin 2t = 2\cos t(1 - 2\sin t)$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ であるから, $f'(t) = 0$ のとき $\cos t = 0$ または $\sin t = \frac{1}{2}$

よって $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

したがって, $f(t)$ の増減表は右のようになる。

よって, $f(t)$ は $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$ とする。

次に $g(t) = 2\cos t + \sin 2t$ について

$g'(t) = -2\sin t + 2\cos 2t = -2\sin t + 2(1 - 2\sin^2 t)$
 $= -2(2\sin t - 1)(\sin t + 1)$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ であるから, $g'(t) = 0$ のとき

$2\sin t - 1 = 0$ したがって $t = \frac{\pi}{6}$

よって, $g(t)$ の増減表は右のようになる。

したがって, $g(t)$ は $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

をとる。

(2) (1)の結果から, $x = f(t)$ のグラフは右の図のようになる。

よって $0 \leq t_1 < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$

また, $f(t_1) = f(t_2)$ のとき

$2\sin t_1 + \cos 2t_1 = 2\sin t_2 + \cos 2t_2$

$2\sin t_1 + (1 - 2\sin^2 t_1) = 2\sin t_2 + (1 - 2\sin^2 t_2)$

ゆえに $(\sin t_1 - \sin t_2)(1 - (\sin t_1 + \sin t_2)) = 0$

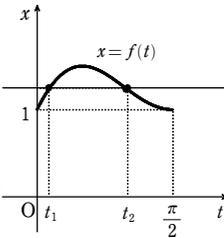
ここで, $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ より $\sin t_1 < \sin t_2$

したがって $\sin t_1 + \sin t_2 = 1$ ゆえに $\sin t_2 = 1 - \sin t_1$

$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 = (2\cos t_1 + \sin 2t_1)^2 - (2\cos t_2 + \sin 2t_2)^2$
 $= (2\cos t_1 + 2\sin t_1 \cos t_1)^2 - (2\cos t_2 + 2\sin t_2 \cos t_2)^2$
 $= 4\cos^2 t_1(1 + \sin t_1)^2 - 4\cos^2 t_2(1 + \sin t_2)^2$
 $= 4(1 - \sin^2 t_1)(1 + \sin t_1)^2 - 4(1 - \sin^2 t_2)(1 + \sin t_2)^2$
 $= 4(1 - \sin t_1)(1 + \sin t_1)^3 - 4(1 - \sin t_2)(1 + \sin t_2)^3$

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	0
$f(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0



ここで, $\sin t_2 = 1 - \sin t_1$ であるから

$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 = 4(1 - \sin t_1)(1 + \sin t_1)^3 - 4\sin t_1(2 - \sin t_1)^3$
 $= 4(-8\sin^3 t_1 + 12\sin^2 t_1 - 6\sin t_1 + 1) = 4(1 - 2\sin t_1)^3$

$0 \leq t_1 < \frac{\pi}{6}$ であるから $1 - 2\sin t_1 > 0$

よって $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$

(3) (1)の結果より, x, y の増減は右のようになる。

また, (1)の結果より $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において, $g(t) \geq 0$

であり, (2)の結果より $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$

が成り立つ。

よって, $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $g(t_1) > g(t_2)$

したがって, 曲線 C の概形は右の図のようになる。

ゆえに, 曲線 C と直線 $x = 1$ が囲む領域は右の図の斜線部分のようになる。

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ における y の値を y_1 , $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における y の値を y_2 とすると, 求める面積 S は

$S = \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} y_1 dx - \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} y_2 dx$

ここで, $\frac{dx}{dt} = 2\cos t - 2\sin 2t$ であるから

$dx = (2\cos t - 2\sin 2t)dt$

また, x と t の対応は右のようになる。

x	1	→	$\frac{3}{2}$
t	0	→	$\frac{\pi}{6}$

x	1	→	$\frac{3}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	→	$\frac{\pi}{6}$

$S = \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} y_1 dx - \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} y_2 dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t) \cdot (2\cos t - 2\sin 2t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t) \cdot (2\cos t - 2\sin 2t) dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t) dt$

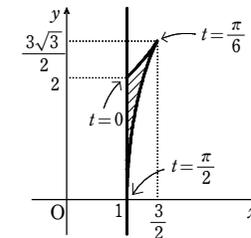
$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos^2 t - \sin 2t \cos t - \sin^2 2t) dt$

$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(2 \cdot \frac{1+\cos 2t}{2} - 2\sin t \cos t \cdot \cos t - \frac{1-\cos 4t}{2} \right) dt$

$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + \cos 2t - 2\sin t \cos^2 t + \frac{1}{2}\cos 4t \right) dt$

$= 2 \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\cos^3 t + \frac{1}{8}\sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-	
x	1	→	$\frac{3}{2}$	←	1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	2	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↓	0



5

〔解答〕 (1) 略 (2) $s = 1$ のとき 1 個, $s > 1$ のとき 2 個

(3) $\frac{1}{6} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right) + \frac{3}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) - 2 \left(a + \frac{1}{a} \right) \log a$

〔解説〕

(1) $h(t) = g(t) - g\left(\frac{1}{t}\right)$ ($t > 1$) とおくと

$h(t) = t^2 - 2\log t - \left(\frac{1}{t^2} + 2\log t \right) = t^2 - \frac{1}{t^2} - 4\log t$

よって $h'(t) = 2t + \frac{2}{t^3} - \frac{4}{t} = \frac{2}{t^3}(t^4 + 1 - 2t^2) = \frac{2}{t^3}(t^2 - 1)^2 > 0$

ゆえに, $h(t)$ は単調に増加し, $h(1) = 0$ であるから $h(t) > 0$

よって, $t > 1$ のとき $g(t) > g\left(\frac{1}{t}\right)$

(2) $\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$ …… ① とすると $t - s + \frac{s-t}{ts} = 0$

よって $(t-s) \left(1 - \frac{1}{ts} \right) = 0$ ゆえに $t = s, \frac{1}{s}$

[1] $s = 1$ のとき $s = \frac{1}{s} = 1$

よって, このとき ① を満たす t は $t = 1$ であり, 求める共有点の個数は 1 個

[2] $s > 1$ のとき $s > 1 > \frac{1}{s}$

ゆえに, このとき ① を満たす t は $t = s, \frac{1}{s}$ であり, (1) から, $(f(s), g(s))$,

$\left(f\left(\frac{1}{s}\right), g\left(\frac{1}{s}\right) \right)$ は相異なる 2 点である。

よって, 求める共有点の個数は 2 個

(3) $x = f(t), y = g(t)$ とすると

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) = \frac{(t+1)(t-1)}{2t^2}$

$t > 0$ であるから, $\frac{dx}{dt} = 0$ とすると $t = 1$

また $\frac{dy}{dt} = 2t - \frac{2}{t} = \frac{2(t+1)(t-1)}{t}$

$t > 0$ であるから, $\frac{dy}{dt} = 0$ とすると $t = 1$

$t (> 0)$ に対する x, y の増減は右のようになる。

実数 u は $u \geq 1$ の範囲を動くとしても $0 < \frac{1}{u} \leq 1$

$t = u$ のときの曲線 C を C_u , $t = \frac{1}{u}$ のときの曲線 C を $C_{\frac{1}{u}}$ とする。

$u > 1$ のとき, C_u と直線 $x = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$ の交点の座標は,

(2) から $(f(s), g(s))$

$u > 1$ のとき, $C_{\frac{1}{u}}$ と直線 $x = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$ の交点の座標は,

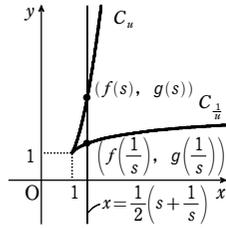
t	0	...	1	...
$\frac{dx}{dt}$		-	0	+
x		↘	1	↗
$\frac{dy}{dt}$		-	0	+
y		↘	1	↗

章末問題C

(2)から $(f(\frac{1}{s}), g(\frac{1}{s}))$

$s > 1$ のとき, (1)から $g(s) > g(\frac{1}{s})$

よって, 曲線 C の概形は右の図のようになる。



ここで, 曲線 C_n において, x と t の対応は右の [1] のようになる。

曲線 $C_{\frac{1}{n}}$ において, x と t の対応は右の [2] のようになる。

なる。

ゆえに, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^a g(t) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt - \int_1^{\frac{1}{a}} g(t) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \int_{\frac{1}{a}}^a (t^2 - 2\log t) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a (t^2 - 1) dt - \int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \log t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_{\frac{1}{a}}^a - \left[\left(t + \frac{1}{t}\right) \log t \right]_{\frac{1}{a}}^a + \int_{\frac{1}{a}}^a \left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{6} \left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) - \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) \log a + \left(a + \frac{1}{a}\right) \log \frac{1}{a} + \left[t - \frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{a}}^a \\ &= \frac{1}{6} \left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) - \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a}\right) - 2 \left(a + \frac{1}{a}\right) \log a + a - \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + a \\ &= \frac{1}{6} \left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) + \frac{3}{2} \left(a - \frac{1}{a}\right) - 2 \left(a + \frac{1}{a}\right) \log a \end{aligned}$$

[6]

【解答】 $\frac{32}{9}$

【解説】

$\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \frac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t = \sqrt{1+t^2} \sin(t+\alpha)$

ただし, α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ を満たす角である。

$0 < t < 2\pi$ において $\frac{dx}{dt} = 0$ とすると $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

$\frac{dy}{dt} = 0$ とすると $t = \pi - \alpha, 2\pi - \alpha$

$0 \leq t \leq 2\pi$ における x, y の値の変化は次のようになる。

[1]

x	$1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a}\right)$
t	$1 \rightarrow a$

[2]

x	$1 \rightarrow \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a}\right)$
t	$1 \rightarrow \frac{1}{a}$

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	$\pi - \alpha$...	π	...	$\frac{3\pi}{2}$...	$2\pi - \alpha$...	2π
$\frac{dx}{dt}$	-	0	+	+	+	0	-	0	+	+	+		
x	1	\searrow	-1	\nearrow	\nearrow	\nearrow	1	\searrow	-1	\nearrow	\nearrow	\nearrow	1
$\frac{dy}{dt}$	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+		
y	0	\nearrow	$\frac{\pi}{2}$	\nearrow		\searrow	0	\searrow	$-\frac{3\pi}{2}$	\searrow		\nearrow	0

なお, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる θ に対し, $x = \cos 2\theta$ となる t は

$t = \theta, \pi - \theta, \pi + \theta, 2\pi - \theta$

この4つの t の値に対応する y の値をそれぞれ $y_\theta, y_{\pi-\theta}, y_{\pi+\theta}, y_{2\pi-\theta}$ とすると

$y_\theta = \theta \sin \theta$
 $y_{\pi-\theta} = (\pi - \theta) \sin(\pi - \theta) = (\pi - \theta) \sin \theta$
 $y_{\pi+\theta} = (\pi + \theta) \sin(\pi + \theta) = -(\pi + \theta) \sin \theta$
 $y_{2\pi-\theta} = (2\pi - \theta) \sin(2\pi - \theta) = -(2\pi - \theta) \sin \theta$

ここで $y_{\pi-\theta} - y_\theta = (\pi - 2\theta) \sin \theta > 0$

$y_{\pi+\theta} - y_{2\pi-\theta} = (\pi - 2\theta) \sin \theta > 0$

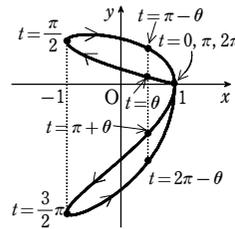
また $y_\theta > 0 > y_{\pi+\theta}$

ゆえに $y_{\pi-\theta} > y_\theta > y_{\pi+\theta} > y_{2\pi-\theta}$

よって, $0 < t < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < t < \pi, \pi < t < \frac{3\pi}{2}$,

$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ の各区間において曲線は交点をもたない。

よって, 曲線の概形は右の図のようになる。



$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における y を y_1 , $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ における y を y_2 , $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ における y を y_3 ,

$\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ における y を y_4 とすると, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (y_2 - y_1) dx + \int_{-1}^1 (y_3 - y_4) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y \frac{dx}{dt} dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} y \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\pi} y \frac{dx}{dt} dt - \int_{\pi}^{2\pi} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\pi} t \sin t (-2\sin 2t) dt - \int_{\pi}^{2\pi} t \sin t (-2\sin 2t) dt \end{aligned}$$

ここで $\int 2t \sin t \sin 2t dt = \int 4t \sin^2 t \cos t dt = \frac{4}{3} t \sin^3 t - \frac{4}{3} \int \sin^3 t dt$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{3} t \sin^3 t - \frac{4}{3} \int (1 - \cos^2 t) \sin t dt \\ &= \frac{4}{3} t \sin^3 t - \frac{4}{3} \left\{ \sin t + \cos^2 t (\cos t)' \right\} dt \\ &= \frac{4}{3} t \sin^3 t + \frac{4}{3} \cos t - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cos^3 t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

よって $S = -\left[\frac{4}{3} t \sin^3 t + \frac{4}{3} \cos t - \frac{4}{9} \cos^3 t \right]_0^{\pi} + \left[\frac{4}{3} t \sin^3 t + \frac{4}{3} \cos t - \frac{4}{9} \cos^3 t \right]_{\pi}^{2\pi}$

$= \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}$

[7]

【解答】 (1) 略 (2) $S_n + S_{n+1} = \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$ (3) $1 - \frac{1}{e^a}$

【解説】

(1) $f_n(x) = \frac{(\log x)^n}{n!}$ ① とする。

[1] $n=1$ のとき $f_1(x) = \log x$ であるから, ① が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, ① が成り立つと仮定すると $f_k(x) = \frac{(\log x)^k}{k!}$

$n=k+1$ のとき, 与えられた条件から

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \int_1^x \frac{f_k(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{(\log t)^k}{k!} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{1}{k!} \int_1^x (\log t)^k \cdot (\log t)' dt \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{1}{k+1} (\log t)^{k+1} \right]_1^x = \frac{(\log x)^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

よって, ① は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] より, ① はすべての自然数 n について成り立つ。

$y = f_n(x)$ の概形
 [1] n が奇数のとき

(2) $0 < a \leq 1$ から $e^0 < a^a \leq e^1$

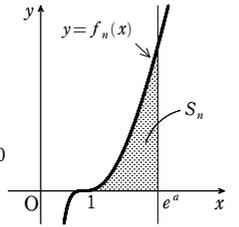
ゆえに $1 < e^a \leq e$

$f_n(x) = 0$ とすると $\frac{(\log x)^n}{n!} = 0$

よって $x=1$

また, $x \geq 1$ のとき $\log x \geq 0$ であるから $f_n(x) \geq 0$

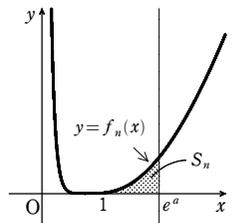
よって $S_n = \int_1^{e^a} f_n(x) dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$



ゆえに, 各 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \int_1^{e^a} f_{n+1}(x) dx = \int_1^{e^a} \frac{(\log x)^{n+1}}{(n+1)!} dx \\ &= \left[x \cdot \frac{(\log x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_1^{e^a} - \int_1^{e^a} x \cdot \frac{(\log x)^n}{n!} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!} - \int_1^{e^a} \frac{(\log x)^n}{n!} dx \\ &= \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!} - S_n \end{aligned}$$

[2] n が偶数のとき



したがって $S_n + S_{n+1} = \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(3) (2) より $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e^a} (S_n + S_{n+1}) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

よって, 与えられた無限級数の第 n 項までの部分積を T_n とすると

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{a}{1!} - \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} a^n}{n!} = a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k a^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (S_k + S_{k+1})}{e^a} \\ &= a + \frac{1}{e^a} \{-S_1 + (-1)^{n-1} S_n\} \quad \dots \dots \text{②} \end{aligned}$$

章末問題C

ここで, $S_n > 0, 0 < a \leq 1$ であるから

$$0 < S_n < S_n + S_{n+1} = \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^a}{(n+1)!}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^a}{(n+1)!} = 0$ であるから, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$

ゆえに, ②より $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = a - \frac{1}{e^a} S_1$

$S_1 = \int_1^{e^a} \log x dx = [x \log x - x]_1^{e^a} = e^a a - e^a + 1$ であるから, 求める無限級数の和は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = a - \frac{1}{e^a} (e^a a - e^a + 1) = 1 - \frac{1}{e^a}$$

8

【解答】 (1) $a_n = (2 + \sqrt{5})e^{-n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (2) $1 - \frac{2 + \sqrt{5}}{6} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

【解説】

(1) $f_n'(x) = a_n[n+1-x-(x-n)] = a_n(2n+1-2x)$

$g(x) = e^{-x}$ とすると $g'(x) = -e^{-x}$

2つの曲線が接するための条件は, $f_n(t) = g(t), f_n'(t) = g'(t)$ となる実数 t があることである。

$f_n(t) = g(t)$ から $a_n(t-n)(n+1-t) = e^{-t} \dots \dots ①$

$f_n'(t) = g'(t)$ から $a_n(2n+1-2t) = -e^{-t} \dots \dots ②$

①+②から $a_n[(t-n)(n+1-t) + 2n+1-2t] = 0$

$a_n > 0$ であるから $t^2 - (2n-1)t + n^2 - n - 1 = 0$

$$\text{よって } t = \frac{2n-1 \pm \sqrt{(2n-1)^2 - 4(n^2-n-1)}}{2} = \frac{2n-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$a_n > 0, e^{-t} > 0$ であるから, ②より $2n+1-2t < 0$

ゆえに $t > n + \frac{1}{2}$

$$\text{よって } t = \frac{2n-1 + \sqrt{5}}{2}$$

これを②に代入して

$$a_n[2n+1 - (2n-1 + \sqrt{5})] = -e^{-\frac{2n-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

ゆえに $(2 - \sqrt{5})a_n = -e^{-n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

したがって

$$a_n = (2 + \sqrt{5})e^{-n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

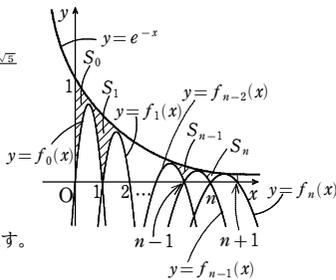
(2) $\sum_{k=0}^n S_k$ は, 右の図の斜線部分の面積を表す。

面積の大小関係から

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \{e^{-x} - f_k(x)\} dx < \sum_{k=0}^n S_k < \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \{e^{-x} - f_k(x)\} dx \dots \dots ③$$

ここで, $T_n = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \{e^{-x} - f_k(x)\} dx$ とおくと, ③から

$$T_{n-1} < \sum_{k=0}^n S_k < T_n \dots \dots ④$$



$$\int_k^{k+1} \{e^{-x} - f_k(x)\} dx = [-e^{-x}]_k^{k+1} + a_k \int_k^{k+1} (x-k)(x-(k+1)) dx$$

$$= e^{-k} - e^{-(k+1)} - \frac{a_k}{6} ((k+1) - k)^3 = e^{-k} - e^{-(k+1)} - \frac{a_k}{6}$$

よって $T_n = \sum_{k=0}^n \left\{ e^{-k} - e^{-(k+1)} - \frac{a_k}{6} \right\}$

$$= e^0 - e^{-(n+1)} - \frac{2 + \sqrt{5}}{6} \sum_{k=0}^n e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2} k} \cdot e^{-k}$$

$$= 1 - e^{-(n+1)} - \frac{2 + \sqrt{5}}{6} e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}}$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 1 - \frac{2 + \sqrt{5}}{6} e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1}} = 1 - \frac{2 + \sqrt{5}}{6(e-1)} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

また, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ であるから, ④より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k = 1 - \frac{2 + \sqrt{5}}{6(e-1)} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

9

【解答】 (1) $T_n = T_1(e^{-k})^{n-1}, S_N = \frac{T_1(1 - e^{-kN})}{1 - e^{-k}}$

(2) $N = \left[\frac{z}{k} \right]$ ただし, $\left[\frac{z}{k} \right]$ は $\frac{z}{k}$ 以下の最大の整数。

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-x} f(x) dx = \frac{T_1}{1 - e^{-k}}$$

(3) $\lim_{z \rightarrow \infty} V(z) = \frac{2\pi\sqrt{e} + e - 1}{(e-1)(\pi^2 + 1)}$

【解説】

(1) $T_1 = \int_0^k e^{-x} f(x) dx$ である。

$T_n = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x) dx$ において, $x - k(n-1) = t$ とおく

と $x = t + k(n-1), dx = dt$

$$\text{よって } T_n = \int_0^k e^{-t + k(n-1)} f(t + k(n-1)) dt$$

$$= e^{-k(n-1)} \int_0^k e^{-t} f(t + k(n-1)) dt$$

ここで $f(t) = f(t+k) = f(t+2k) = \dots = f(t+k(n-1))$

ゆえに $T_n = e^{-k(n-1)} \int_0^k e^{-t} f(t) dt$

$$= e^{-k(n-1)} T_1$$

$$= T_1 (e^{-k})^{n-1}$$

よって, 数列 $\{T_n\}$ は初項 T_1 , 公比 e^{-k} の等比数列である。

$k > 0$ より, $0 < e^{-k} < 1$ であるから $S_N = \sum_{n=1}^N T_n = \frac{T_1(1 - e^{-kN})}{1 - e^{-k}}$

(2) $S_N = \sum_{n=1}^N T_n = \sum_{n=1}^N \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x) dx = \int_0^{kN} e^{-x} f(x) dx$

よって, 設問の条件式は

$$\int_0^{kN} e^{-x} f(x) dx \leq \int_0^z e^{-x} f(x) dx < \int_0^{k(N+1)} e^{-x} f(x) dx \dots \dots ①$$

ここで, $f(x) \geq 0$ より $e^{-x} f(x) \geq 0$

ゆえに, 不等式①が成立するための N の条件は

$$kN \leq z < k(N+1) \quad \text{すなわち} \quad \frac{z}{k} - 1 < N \leq \frac{z}{k}$$

z は k 以上の実数より, $\frac{z}{k} - 1$ は 0 以上の実数であるから, 求める正の整数 N は

$$N = \left[\frac{z}{k} \right] \quad \text{ただし, } \left[\frac{z}{k} \right] \text{ は } \frac{z}{k} \text{ 以下の最大の整数を表す。}$$

また, $k > 0$ であるから, $z \rightarrow \infty$ のとき $\left[\frac{z}{k} \right] \rightarrow \infty$

すなわち $N \rightarrow \infty$

更に, (1)より $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T_1(1 - e^{-kN})}{1 - e^{-k}} = \frac{T_1}{1 - e^{-k}}$

同様に $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{N+1} = \frac{T_1}{1 - e^{-k}}$

したがって, はさみうちの原理により

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-x} f(x) dx = \frac{T_1}{1 - e^{-k}}$$

(3) $y = h(x)$, x 軸, y 軸および $x = z$ で囲まれた部分は右の図の斜線部分のようになり

$$V(z) = \int_0^z h(x) dx$$

ここで, $f(x) = |\cos \pi x|$ とすると, 関数 $f(x)$ は $f(x) = f(x+1)$

を満たし, また, $f(x) \geq 0$ である。

一方, $h(x) = e^{-x} f(x)$ であるから

$$V(z) = \int_0^z e^{-x} f(x) dx$$

よって, $z \geq k=1$ として, (1), (2)の結果を適用すると, 極限

$\lim_{z \rightarrow \infty} V(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-x} f(x) dx$ が存在して

$$\lim_{z \rightarrow \infty} V(z) = \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^1 e^{-x} |\cos \pi x| dx$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-1}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} \cos \pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos \pi x dx \right)$$

ここで, $I = \int e^{-x} \cos \pi x dx$ とおくと

$$I = \int (-e^{-x}) \cos \pi x dx$$

$$= -e^{-x} \cos \pi x + \int e^{-x} \cdot (-\pi \sin \pi x) dx$$

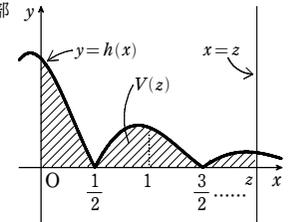
$$= -e^{-x} \cos \pi x + \pi \int (e^{-x})' \cdot \sin \pi x dx$$

$$= e^{-x} (\pi \sin \pi x - \cos \pi x) - \pi^2 I$$

ゆえに $I = \frac{1}{\pi^2 + 1} e^{-x} (\pi \sin \pi x - \cos \pi x) + C$ (C は積分定数)

したがって

$$\lim_{z \rightarrow \infty} V(z)$$



章末問題C

$$= \frac{1}{1-e^{-1}} \cdot \frac{1}{\pi^2+1} \left\{ \left[e^{-x}(\pi \sin \pi x - \cos \pi x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[e^{-x}(\pi \sin \pi x - \cos \pi x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right\}$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{e} + e - 1}{(e-1)(\pi^2+1)}$$

10

【解答】 (1) $\frac{38}{105} - \frac{26\sqrt{2}}{105}$ (2) 略

【解説】

(1) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 \theta - 1)^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$

$\cos \theta = t$ とおくと $-\sin \theta d\theta = dt, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ から $1 \geq t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

また $(2t^2-1)^2(1-t^2) = (4t^4-4t^2+1)(1-t^2) = -(4t^6-8t^4+5t^2+1)$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (4t^6-8t^4+5t^2-1) dt = \left[\frac{4}{7}t^7 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{5}{3}t^3 - t \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$= \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{8} - \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{4}{7} - \frac{8}{5} + \frac{5}{3} - 1 \right) = \frac{38}{105} - \frac{26\sqrt{2}}{105}$$

(2) 点Pから直線 $y=x$ に下ろした垂線の足をHとする。

$r = \sin 2\theta, t = OH = r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

ただし $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $PH = r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ から

$$V = \pi \int_0^1 PH^2 dt$$

$u = \theta - \frac{\pi}{4}$ とおくと $\sin 2\theta = \sin\left(2u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2u$

$PH = \sin 2\theta \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\theta \sin u$

$t = \sin 2\theta \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2u \cos u$ から $dt = -(2\sin 2u \cos u + \cos 2u \sin u) du$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ から $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$ また $du = d\theta$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2u \sin^2 u (2\sin 2u \cos u + \cos 2u \sin u) du$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2u \cos^2 u \sin^3 u du + \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2u \sin^3 u du$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2u (1 + \cos 2u) \sin^3 u du + \pi I_3$$

$$= 2\pi(I_2 + I_3) + \pi I_3 = 3\pi I_3 + 2\pi I_2$$

11

【解答】 (1) $L_n = L_1$ (2) 0

【解説】

(1) $f_n'(x)n = \cos nx$ から

$$L_n = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 nx} dx \quad \text{特に} \quad L_1 = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

k を整数とすると, $\cos^2 x$ の周期は π であるから

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = L_1$$

L_n において $nx = u$ とおくと

$ndx = du$ から

$$L_n = \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u} du$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u} du = \frac{1}{n} \cdot n L_1 = L_1$$

(2) $\left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2 - (\sqrt{1+t})^2 = \frac{1}{4}t^2 > 0$ から $(\sqrt{1+t})^2 < \left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2$

$t > 0$ のとき, $\sqrt{1+t} > 0, 1 + \frac{1}{2}t > 0$ であるから $\sqrt{1+t} < 1 + \frac{1}{2}t$

ゆえに $L_n = L_1 = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$

$$< \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x\right) dx = \left[x + \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) \right]_0^\pi = \frac{5}{4} \pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin nx \leq \frac{1}{n}$ から $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

ゆえに $L = \pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$

①, ② により $\frac{4(L_n - L)}{L} < \frac{4}{\pi} \left(\frac{5}{4}\pi - \pi\right) = 1$

また, $L_n \geq L$ であるから $0 \leq \frac{4(L_n - L)}{L} = \frac{4(L_1 - L)}{L} < 1$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4(L_n - L)}{L} \right\}^n = 0$

12

【解答】 (1) $0 \leq t \leq 1$ のとき最大値は $\sqrt{t+2\sqrt{t}+2}$, 最小値は $\sqrt{t-2\sqrt{t}+2}$,

$1 \leq t \leq 4$ のとき最大値は $\sqrt{t+2\sqrt{t}+2}$, 最小値は 1

(2) $0 \leq t \leq 1$ のとき $S(t) = 4\pi\sqrt{t}$, $1 \leq t \leq 4$ のとき $S(t) = \pi(t+2\sqrt{t}+1)$

(3) $\frac{45}{2}\pi$

【解説】

(1) 平面 $z=t$ と yz 平面上の放物線 $z=y^2$ との

交点の座標は

$$(0, -\sqrt{t}, t), (0, \sqrt{t}, t)$$

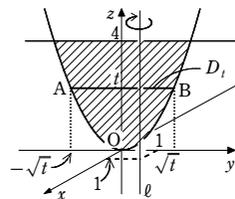
A $(0, -\sqrt{t}, t)$, B $(0, \sqrt{t}, t)$ とおくと, D_t は線分 AB であるから, 点 P は線分 AB 上を動く。

点 $(1, 1, t)$ を C として, 点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと $CH=1$

点 H の座標は H $(0, 1, t)$ であるから, H が線分 AB 上にあるのは

$$\sqrt{t} \geq 1 \text{ すなわち } 1 \leq t \leq 4$$

のときである。



x	$0 \rightarrow \pi$
u	$0 \rightarrow n\pi$

[1] $0 \leq t \leq 1$ のとき

点 P と点 C の距離の最大値は

$$CA = \sqrt{1 + \{1 - (-\sqrt{t})\}^2}$$

$$= \sqrt{t + 2\sqrt{t} + 2}$$

最小値は

$$CB = \sqrt{1 + (1 - \sqrt{t})^2}$$

$$= \sqrt{t - 2\sqrt{t} + 2}$$

[2] $1 \leq t \leq 4$ のとき

点 P と点 C の距離の最大値は

$$CA = \sqrt{t + 2\sqrt{t} + 2}$$

最小値は $CH=1$

[1], [2] から, 点 P と点 C の距離の最大値, 最小値は

$0 \leq t \leq 1$ のとき 最大値 $\sqrt{t + 2\sqrt{t} + 2}$,

最小値 $\sqrt{t - 2\sqrt{t} + 2}$

$1 \leq t \leq 4$ のとき 最大値 $\sqrt{t + 2\sqrt{t} + 2}$,

最小値 1

(2) 平面 $z=t$ による E の切り口は, 線分 AB を直線 ℓ の周りに 1 回転させてできる図形である。点 C は平面 $z=t$ と直線 ℓ の交点であるから, その面積は平面 $z=t$ 上で, 線分 AB が点 C を中心に 1 回転したときに通過する領域の面積に等しい。

[1] $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$S(t) = \pi CA^2 - \pi CB^2$$

$$= \pi(t + 2\sqrt{t} + 2) - \pi(t - 2\sqrt{t} + 2)$$

$$= 4\pi\sqrt{t}$$

[2] $1 \leq t \leq 4$ のとき

$$S(t) = \pi CA^2 - \pi CH^2$$

$$= \pi(t + 2\sqrt{t} + 2) - \pi$$

$$= \pi(t + 2\sqrt{t} + 1)$$

(3) (2) の結果から

$$V = \int_0^4 S(t) dt$$

$$= \int_0^1 4\pi\sqrt{t} dt + \int_1^4 \pi(t + 2\sqrt{t} + 1) dt$$

$$= 4\pi \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{4}{3} t\sqrt{t} + t \right]_1^4$$

$$= \frac{45}{2} \pi$$

13

【解答】 (1) $2\theta - \sin 2\theta$ (2) $\frac{4}{3}$

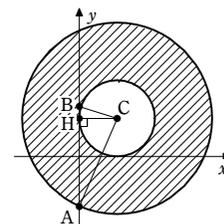
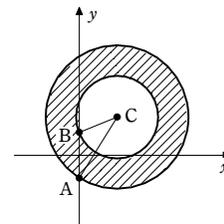
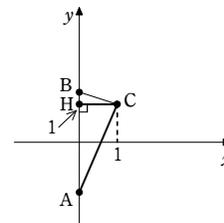
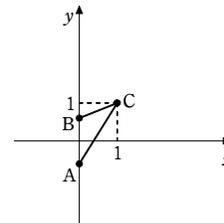
【解説】

(1) 点 P が線分 OA 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき

$$\vec{OP} = t\vec{OA} = (t, 0, t) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\vec{OQ} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0) \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2\pi)$$

と表され



$$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ} = (t, 0, t) + (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$$

よって、点 R は平面 $z=t$ 上で、点 $(t, 0, t)$ を中心とする半径 1 の周および内部を動く。

同様に、点 P が線分 OB 上を、点 Q が円 W の周および内部を動くとき

$$\vec{OR} = (0, \sqrt{3}t, t) + (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$$

$$(0 \leq t \leq 1, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2\pi)$$

と表されるから、点 R は平面 $z=t$ 上で点

$(0, \sqrt{3}t, t)$ を中心とする半径 1 の周および内部を動く。

ゆえに、平面 $z = \cos\theta$ による立体 V の切り口は、右の図の黒く塗った部分のようになる。右の図のように、点 C, D, E, F をとると

$$CE = CF = DE = DF = 1$$

よって、四角形 CFDE はひし形であるから、対角線 CD, EF は互いにその中点で交わる。

その中点を M とすると

$$CM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\theta + (\sqrt{3}\cos\theta)^2} = \cos\theta$$

直角三角形 CEM に注目すると、 $CE=1$ であることから $\angle ECM = \theta$

ゆえに、求める切り口の面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 2\theta = \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

よって $S = 2\theta - \sin 2\theta$

(2) 求める立体の体積は $\int_0^1 S dz$

$z = \cos\theta$ とすると $dz = -\sin\theta d\theta$

(1) の結果から

$$\int_0^1 S dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2\theta - \sin 2\theta)(-\sin\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta \sin\theta - \sin 2\theta \sin\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\theta(-\cos\theta)' - 2\sin^2\theta \cos\theta] d\theta$$

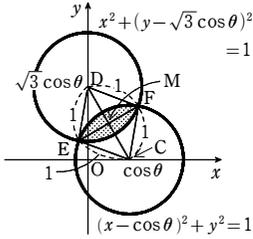
$$= 2 \left[-\theta \cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \left[\frac{1}{3} \sin^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left[\left[\sin\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3}$$

[14]

【解答】 (1) $\frac{4}{3}\pi[(\sqrt{b^2+1})^3 - a^3]$ (2) $\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) + 2\pi b$

(3) 立体 V の体積の方が立体 W の体積よりも大きい

【解説】



z	$0 \rightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

(1) xz 平面上で、領域 D は右の図の斜線部分である。よって、原点 O を中心とする半径 r の円が D の周および内部と共有点をもつのは $a \leq r \leq \sqrt{b^2+1}$ のときである。

ゆえに、D を y 軸の周りに 1 回転させてできる図形 E は

$$a^2 \leq x^2 + z^2 \leq b^2 + 1, y = 0$$

であり、次の図の斜線部分のようになる。

したがって、E を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体 V の体積は

$$\frac{4}{3}\pi(\sqrt{b^2+1})^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi[(\sqrt{b^2+1})^3 - a^3]$$

(2) D を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体 F は

$$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, -1 \leq z \leq 1$$

を満たす立体である。

立体 F の平面 $y=t (-b \leq t \leq b)$ での切り口を G_t とし、立体 W の平面 $y=t (-b \leq t \leq b)$ での切り口の面積を $S(t)$ とする。

[1] $-a \leq t \leq a$ のとき

領域 G_t は

$$a^2 - t^2 \leq x^2 \leq b^2 - t^2, y = t, -1 \leq z \leq 1$$

を満たし、右の図の斜線部分のようになる。

(1) と同様に考えると、 G_t を y 軸の周りに 1 回転させてできる図形は

$$a^2 - t^2 \leq x^2 + z^2 \leq b^2 - t^2 + 1, y = t, -1 \leq z \leq 1$$

を満たす。

$$S(t) = \pi(\sqrt{b^2 - t^2 + 1})^2 - \pi(\sqrt{a^2 - t^2})^2 = \pi(b^2 - a^2 + 1)$$

[2] $-b \leq t \leq -a, a \leq t \leq b$ のとき

領域 G_t は

$$0 \leq x^2 \leq b^2 - t^2, y = t, -1 \leq z \leq 1$$

を満たし、右の図の斜線部分のようになる。

(1) と同様に考えると、 G_t を y 軸の周りに 1 回転させてできる図形は

$$0 \leq x^2 + z^2 \leq b^2 - t^2 + 1, y = t, -1 \leq z \leq 1$$

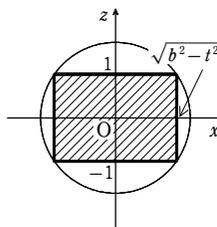
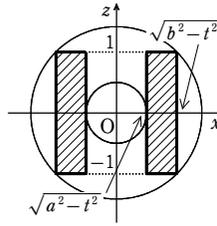
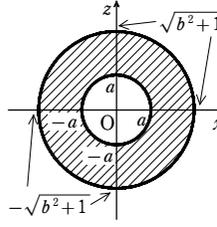
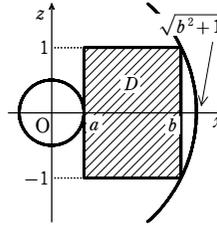
を満たす。

したがって、 $-b \leq t \leq -a, a \leq t \leq b$ のとき

$$S(t) = \pi(\sqrt{b^2 - t^2 + 1})^2 = \pi(b^2 - t^2 + 1)$$

立体 W が xz 平面に関して対称であることから、[1], [2] より、求める体積は

$$\begin{aligned} 2 \int_0^b S(t) dt &= 2 \int_0^a S(t) dt + 2 \int_a^b S(t) dt \\ &= 2 \int_0^a \pi(b^2 - a^2 + 1) dt + 2 \int_a^b \pi(b^2 - t^2 + 1) dt \\ &= 2\pi a(b^2 - a^2 + 1) + 2\pi \left[-\frac{1}{3}t^3 + (b^2 + 1)t \right]_a^b \end{aligned}$$



$$= \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) + 2\pi b$$

(3) (1), (2) から、立体 V と立体 W の体積の差は

$$\frac{4}{3}\pi[(\sqrt{b^2+1})^3 - a^3] - \left[\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) + 2\pi b \right] = \frac{4}{3}\pi[(\sqrt{b^2+1})^3 - b^3 - \frac{3}{2}b]$$

ここで、 $(\sqrt{b^2+1})^3 > 0, b^3 + \frac{3}{2}b > 0$ で

$$\begin{aligned} \{(\sqrt{b^2+1})^3\}^2 - \left(b^3 + \frac{3}{2}b\right)^2 &= (b^2+1)^3 - \left(b^3 + \frac{3}{2}b\right)^2 \\ &= b^6 + 3b^4 + 3b^2 + 1 - \left(b^6 + 3b^4 + \frac{9}{4}b^2\right) \\ &= \frac{3}{4}b^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

であるから $(\sqrt{b^2+1})^3 > b^3 + \frac{3}{2}b$

したがって、立体 V の体積の方が立体 W の体積よりも大きい。

[15]

【解答】 $4\sqrt{3} - 2\pi$

【解説】

3 点 A, B, C はすべて xy 平面上にあり

$$AB = BC = CA = 2\sqrt{3}$$

よって、 $\triangle ABC$ は正三角形である。

また、 $OP \perp (xy \text{ 平面})$ である。

四面体 PABC の $x^2 + y^2 \geq 1$ を満たす部分を K とし、立体 K を平面 $z=t (0 \leq t \leq 2)$ で切ったときの切り口について考える。

平面 $z=t$ と辺 PA, PB, PC の交点をそれぞれ A_t, B_t, C_t とする。

ここで、 $OA = OB = OC = 2$ であるから、平面 $z=1$ 上の点 $(0, 0, 1)$ と点 A_t, B_t, C_t の距離はすべて 1 である。ゆえに、立体 K は $z > 1$ の範囲には存在しないから、 $0 \leq t \leq 1$ として考える。

直線 AP は、 $x=0, \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ と表されるから、点 A_t の座標は $(0, 2-t, t)$

立体 K の平面 $z=t$ による切り口は、右の図の黒く塗った部分である。

ここで、 $\triangle A_t B_t C_t$ は正三角形であり、黒く塗った 3 つの部分、すべて合同な図形である。

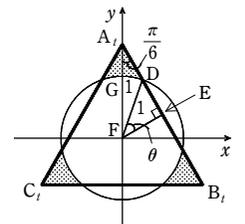
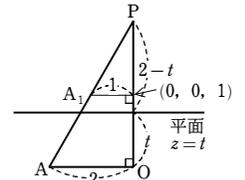
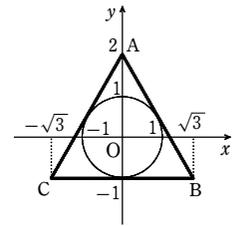
よって、右の図の黒く塗った部分のうち、 $y \geq 0$ の範囲にあるものの面積 S_A について考える。

図のように点 D, E, F, G をとると

$$\frac{S_A}{2} = \triangle FA_t E - \triangle FED - \text{扇形 FGD}$$

$$\angle FA_t E = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ であるから } FE = FA_t \sin \frac{\pi}{6} = \frac{2-t}{2}$$

$$FD = 1 \text{ であるから } DE = \sqrt{1 - FE^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2-t}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4t-t^2}}{2}$$



章末問題C

また $A_1E = FA_1 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)$

ゆえに、 $\triangle FA_1E$ の面積は

$$\frac{1}{2}A_1E \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(2-t) \cdot \frac{2-t}{2} = \frac{\sqrt{3}(2-t)^2}{8}$$

$\triangle FED$ の面積は $\frac{1}{2}DE \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4t-t^2}}{2} \cdot \frac{2-t}{2} = \frac{(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{8}$

扇形FGDの面積については、 $\angle FED = \theta$ とすると、 $\triangle FA_1E$ の内角の和に注目して

$$\angle A_1FD = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \theta \right) = \frac{\pi}{3} - \theta$$

よって、扇形FGDの面積は $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \angle A_1FD = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)$

ゆえに $\frac{S_A}{2} = \frac{\sqrt{3}(2-t)^2}{8} - \frac{(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)$

よって $S_A = \frac{\sqrt{3}(2-t)^2}{4} - \frac{(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{4} - \frac{\pi}{3} + \theta$

したがって、立体Kの体積をVとすると

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 3S_A dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{3\sqrt{3}(2-t)^2}{4} - \frac{3(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{4} - \pi + 3\theta \right\} dt \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \left[-\frac{(2-t)^3}{3} \right]_0^1 - \pi \left[t \right]_0^1 - \frac{3}{4} \int_0^1 (2-t)\sqrt{4t-t^2} dt + 3 \int_0^1 \theta dt \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{4} - \pi - \frac{3}{4} \int_0^1 (2-t)\sqrt{4t-t^2} dt + 3 \int_0^1 \theta dt \end{aligned}$$

ここで $\int_0^1 (2-t)\sqrt{4t-t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{2}(4t-t^2)\sqrt{4t-t^2} dt$
 $= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(4t-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{3}$

また、直角三角形FEDにおいて

$$\cos \theta = FE = \frac{2-t}{2}$$

よって $t = 2 - 2\cos \theta$ ゆえに $dt = 2\sin \theta d\theta$

t と θ の対応は右のようになるから

t	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta dt &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \theta \cdot 2\sin \theta d\theta \\ &= 2 \left\{ \left[-\theta \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta d\theta \right\} \\ &= 2 \left(-\frac{\pi}{6} + \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

以上から $V = \frac{7\sqrt{3}}{4} - \pi - \frac{3}{4}\sqrt{3} + 3 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 4\sqrt{3} - 2\pi$

[16]

【解答】 $\left(\frac{17}{3} - 8\log 2 \right) \pi$

【解説】

Kを平面 $z=k$ ($k \geq 1$)で切った切り口が空集合でないような k の値の範囲は、AとOが一致するとき

B(0, 0, 2)であることに注意すると $1 \leq k \leq 2$

特に $k=1, 2$ のとき、切り口は1点のみである。

$1 < k < 2$ のときを考える。

対称性から、Kは平面 $x=0$ における線分ABの通過範囲を z 軸を中心に回転させた領域である。

線分ABと平面 $z=k$ が共有点をもつとき、その共有点をDとおきE(0, 0, k)とおく。

DEが最大となるのは右下の図のようにDとBが一致するときである。

2点D, Bが一致するときの点DをD'とすると、Kを平面 $z=k$ で切った切り口は、点Eを中心とする半径D'Eの円である。

D'C: CA = EC: CO であるから

$$D'C: (2-D'C) = (k-1): 1$$

$$D'C = (k-1)(2-D'C)$$

よって $D'C = \frac{2(k-1)}{k}$

ゆえに $D'E^2 = D'C^2 - EC^2 = \frac{4(k-1)^2}{k^2} - (k-1)^2$

したがって、Kを平面 $z=k$ で切った切り口の面積は $\pi \left\{ \frac{4(k-1)^2}{k^2} - (k-1)^2 \right\}$

よって、求める体積は

$$\begin{aligned} \int_1^2 \pi \left\{ \frac{4(k-1)^2}{k^2} - (k-1)^2 \right\} dk &= 4\pi \int_1^2 (1-2k^{-1}+k^{-2}) dk - \pi \left[\frac{1}{3}(k-1)^3 \right]_1^2 \\ &= 4\pi \left[k - 2\log k - k^{-1} \right]_1^2 - \frac{1}{3}\pi = \left(\frac{17}{3} - 8\log 2 \right) \pi \end{aligned}$$

[17]

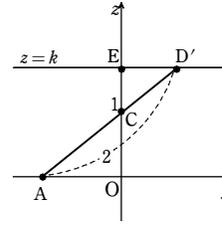
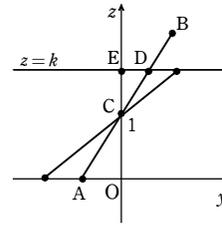
【解答】 (1) $H \left(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, \frac{p}{3} \right)$, $PH = \frac{\sqrt{6}}{3}p$

(2) $I \left(\frac{q+1}{3}, \frac{q+1}{3}, \frac{q+1}{3} \right)$, $QI = \frac{1}{3}\sqrt{6(q^2-q+1)}$

(3) $0 \leq u \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $r = \sqrt{2}u$,
 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq u \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき $r = \sqrt{2(u^2 - \sqrt{3}u + 1)}$,
 $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq u \leq \sqrt{3}$ のとき $r = \sqrt{2}(\sqrt{3} - u)$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

【解説】



(1) Hは直線OC上の点であるから、 s を実数として

$$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OC} = (s, s, s)$$

と表される。

$\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{OC}$ であるから $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= (s\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= s|\overrightarrow{OC}|^2 - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= s(1^2+1^2+1^2) - (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + p \cdot 1) \\ &= 3s - p \end{aligned}$$

よって、 $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ より $3s - p = 0$

ゆえに、 $s = \frac{p}{3}$ であるから $H \left(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, \frac{p}{3} \right)$

また $PH = \sqrt{\left(0 - \frac{p}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{p}{3}\right)^2 + \left(p - \frac{p}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}p$

(2) Iは直線OC上の点であるから、 t を実数として $\overrightarrow{OI} = t\overrightarrow{OC} = (t, t, t)$ と表される。

$\overrightarrow{QI} \perp \overrightarrow{OC}$ であるから $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OC} = (t\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= t|\overrightarrow{OC}|^2 - \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= 3t - (q \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 3t - (q+1) \end{aligned}$$

よって、 $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ より $3t - (q+1) = 0$

ゆえに、 $t = \frac{q+1}{3}$ であるから $I \left(\frac{q+1}{3}, \frac{q+1}{3}, \frac{q+1}{3} \right)$

また $QI = \sqrt{\left(q - \frac{q+1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{q+1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{q+1}{3}\right)^2}$
 $= \frac{1}{3}\sqrt{(2q-1)^2 + (q+1)^2 + (2-q)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{6(q^2-q+1)}$

(3) (1)のPがAに一致するときのHの座標は

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

この点を G_1 とすると $OG_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)のQがBに一致したときのIの座標は

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

この点を G_2 とすると $OG_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

[1] $0 \leq OU \leq OG_1$ すなわち $0 \leq u \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

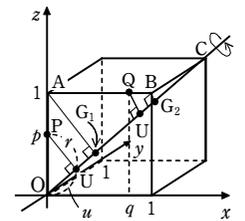
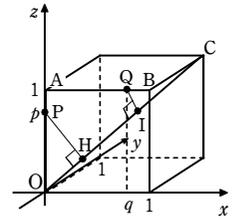
Uを通りOCに垂直な平面で立方体を切断したときの切り口を考えると、点Uからの距離が最大になるのは、(1)の立方体の辺上の点Pであるから $r = PU$

このとき、(1)において $OH = \frac{\sqrt{3}}{3}p$

これを u とおくと $p = \sqrt{3}u$

よって $r = PU = \frac{\sqrt{6}}{3}p = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3}u = \sqrt{2}u$

[2] $OG_1 \leq OU \leq OG_2$ すなわち $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq u \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき



章末問題C

[1]と同様に切り口を考えると、点Uからの距離が最大となるのは、(2)の立方体の辺上の点Qであるから $r=QU$

このとき、(2)において、 $\frac{\sqrt{3}}{3}(q+1)=u$ すなわち $q=\sqrt{3}u-1$ とすればよいから

$$r=QU=\frac{1}{3}\sqrt{6(q^2-q+1)}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{(\sqrt{3}u-1)^2-(\sqrt{3}u-1)+1}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{3(u^2-\sqrt{3}u+1)}=\sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)}$$

[3] $OG_2 \leq OU \leq OC$ すなわち $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq u \leq \sqrt{3}$ のとき

回転体Kは、線分OCの中点を通りOCに垂直な平面に関して対称な図形であるから、[1]においてuを $\sqrt{3}-u$ でおき換えて $r=\sqrt{2}(\sqrt{3}-u)$

[1]~[3]をまとめると

$$0 \leq u \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき } r = \sqrt{2}u$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq u \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき } r = \sqrt{2(u^2 - \sqrt{3}u + 1)}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq u \leq \sqrt{3} \text{ のとき } r = \sqrt{2}(\sqrt{3} - u)$$

(4) (3)より、求める体積をVとすると

$$V = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} 2u^2 du + \pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} 2(u^2 - \sqrt{3}u + 1) du + \pi \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} 2(\sqrt{3} - u)^2 du$$

$$= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} u^2 du + 2 \cdot 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \left\{ \left(u - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\} du$$

$$= 4\pi \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + 4\pi \left[\frac{1}{3} \left(u - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \frac{1}{4} \left(u - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 4\pi \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$

18

【解答】 (1) $\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)}$ (2) $\frac{32}{9}\sqrt{2}$

【解説】

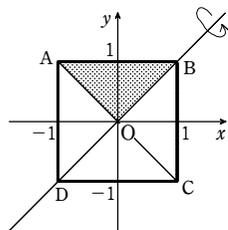
(1) 直角二等辺三角形ABOを直線BOを軸として回転させてできる円錐の側面上の点をP(x, y, z)とおく。円錐の表面上の点Pは \vec{BP} と \vec{BO} のなす角が45°の点である。

$$\vec{BP} \cdot \vec{BO} = |\vec{BP}| |\vec{BO}| \cos 45^\circ \text{ より}$$

$$(1-x) + (1-y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(1-x) + (1-y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|x| \leq 1, |y| \leq 1 \text{ であるから } (1-x) + (1-y) \geq 0$$



① 両辺を2乗すると $\{(1-x) + (1-y)\}^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2$
 $2(1-x)(1-y) = z^2$

$1-x > 0$ であるから $1-y = \frac{z^2}{2(1-x)}$

よって、円錐の表面の方程式は $y = 1 - \frac{z^2}{2(1-x)}$

この平面 $x=t$ による切り口は $y = 1 - \frac{z^2}{2(1-t)} \quad (-t \leq y \leq 1)$

同様に、二等辺三角形ADOを直線DOを軸として回転させてできる円錐の表面上の点Dとは異なる点について考えると、この円錐の表面の方程式は

$$y = -1 + \frac{z^2}{2(1+x)}$$

この平面 $x=t$ による切り口は

$$y = -1 + \frac{z^2}{2(1+t)} \quad (-1 \leq y \leq -t)$$

以上から、平面 $x=t$ による V_1 の切り口は、曲線

$$C_1: y = 1 - \frac{z^2}{2(1-t)}, \quad C_2: y = -1 + \frac{z^2}{2(1+t)}$$

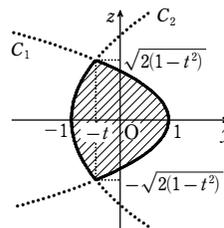
で囲まれた図形となる。

この図形はy軸に関して対称であるから、求める面積は

$$2 \int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}} \left[1 - \frac{z^2}{2(1-t)} - \left\{ -1 + \frac{z^2}{2(1+t)} \right\} \right] dz$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}} \left(2 - \frac{z^2}{1-t^2} \right) dz = 2 \left[2z - \frac{z^3}{3(1-t^2)} \right]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$= 2 \left\{ 2\sqrt{2(1-t^2)} - \frac{2(1-t^2)\sqrt{2(1-t^2)}}{3(1-t^2)} \right\} = \frac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)}$$



(2) V_1 と V_2 の共通部分の図形は、平面 $x=0$ に関して対称であるから、求める体積は $0 \leq x \leq 1$ の範囲の体積を2倍したものとなる。

さらに、 V_1 と V_2 の共通部分の図形は、平面 $y=0$ に関して対称である。

よって、 V_1 と V_2 の共通部分の平面 $x=t$ による切り口は、右の図のようになる。

よって、この切り口の面積は

$$4 \int_0^{\sqrt{2(1-t)}} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(1-t)} \right\} dz = 4 \left[z - \frac{z^3}{6(1-t)} \right]_0^{\sqrt{2(1-t)}}$$

$$= 4 \left\{ \sqrt{2(1-t)} - \frac{2(1-t)\sqrt{2(1-t)}}{6(1-t)} \right\}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2(1-t)}$$

ゆえに、求める体積は $2 \int_0^1 \frac{8}{3}\sqrt{2(1-t)} dt = \frac{16}{3}\sqrt{2} \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{32}{9}\sqrt{2}$

