$\boxed{1}$

解答　(1)　順に　$y=2x-\frac{\pi}{2}+1$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}+1$　　(2)　$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

(3)　$y=-\frac{2}{e^2}x+\frac{3}{e}$

解説

(1)　$f(x)=\tan x$ とすると　$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

ゆえに　$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2$

よって，点 A における接線の方程式は

$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$　すなわち　$y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

また，点 A における法線の方程式は

$y-1=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$　すなわち　$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}+1$

(2)　$2x^2-2xy+y^2=5$ の両辺を x で微分すると

$4x-2(y+xy')+2yy'=0$

よって，$y\neq x$ のとき　$y'=\frac{y-2x}{y-x}$

点 $(1,\ 3)$ における接線の傾きは　$\frac{3-2\cdot 1}{3-1}=\frac{1}{2}$

求める接線の方程式は　$y-3=\frac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

(3)　$\frac{dx}{dt}=e^t$，$\frac{dy}{dt}=-2te^{-t^2}$

$\frac{dx}{dt}=e^t>0$ であるから　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2te^{-t^2}}{e^t}=-2te^{-t^2-t}$

$t=1$ のとき　$x=e$，$y=\frac{1}{e}$，$\frac{dy}{dx}=-2e^{-2}=-\frac{2}{e^2}$

求める接線の方程式は　$y-\frac{1}{e}=-\frac{2}{e^2}(x-e)$　すなわち　$y=-\frac{2}{e^2}x+\frac{3}{e}$

$\boxed{2}$

解答　$y=\frac{1}{2e}x$

解説

$y=\frac{\log x}{x}$ から　$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$

接点を $\left(t,\ \frac{\log t}{t}\right)$ とすると，接線の方程式は　$y-\frac{\log t}{t}=\frac{1-\log t}{t^2}(x-t)$

この直線が原点を通るとき　$-\frac{\log t}{t}=-\frac{1-\log t}{t}$

$t>0$ であるから　$\log t=\frac{1}{2}$　ゆえに　$t=\sqrt{e}$

よって，求める直線の方程式は　$y=\frac{1}{2e}x$

$\boxed{3}$

解答　$a=\frac{1}{2e}$，$\mathrm{P}\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\right)$

解説

$f(x)=ax^2$，$g(x)=\log x$ とおくと　$f'(x)=2ax$，$g'(x)=\frac{1}{x}$

曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ が，x 座標が t である点で共通の接線をもつとき

$f(t)=g(t)$，　$f'(t)=g'(t)$

すなわち　$at^2=\log t$　……①，　$2at=\frac{1}{t}$　……②

② から　$at^2=\frac{1}{2}$　　これを ① に代入すると　$\frac{1}{2}=\log t$

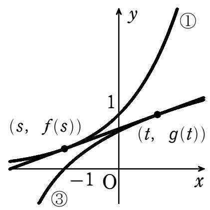
よって　$t=\sqrt{e}$　　ゆえに　$a=\frac{1}{2(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{2e}$

また，点 P の y 座標は　$y=\log\sqrt{e}=\frac{1}{2}$　　よって　$\mathrm{P}\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{4}$

解答　$y=x+1$，$y=\frac{x}{e}+\frac{2}{e}$

解説



$y=e^x$ ……① から　$y'=e^x$

よって，曲線 ① 上の点 $(s,\ e^s)$ における接線の方程式は

$y-e^s=e^s(x-s)$

すなわち　$y=e^sx-e^s(s-1)$ ……②

また，$y=\log(x+2)$ ……③ から　$y'=\frac{1}{x+2}$

よって，曲線 ③ 上の点 $(t,\ \log(t+2))$ における接線の方程式は

$y-\log(t+2)=\frac{1}{t+2}(x-t)$

すなわち　$y=\frac{1}{t+2}x-\frac{t}{t+2}+\log(t+2)$ ……④

2 接線 ②，④ が一致するための条件は

$e^s=\frac{1}{t+2}$ ……⑤，$e^s(s-1)=\frac{t}{t+2}-\log(t+2)$ ……⑥

⑤ から　$t+2=\frac{1}{e^s}$　　また　$t=\frac{1}{e^s}-2$

⑥ に代入して　$e^s(s-1)=e^s\left(\frac{1}{e^s}-2\right)-\log\frac{1}{e^s}$

よって　$e^s(s-1)=(1-2e^s)+s$

ゆえに　$(e^s-1)(s+1)=0$

したがって　$e^s=1$，$s=-1$　　すなわち　$s=0,\ -1$

これらを ② に代入して，求める接線の方程式は

$s=0$ のとき　$y=x+1$，　$s=-1$ のとき　$y=\frac{x}{e}+\frac{2}{e}$

$\boxed{5}$

解答　1

解説

$x\to +0$ であるから，$x>0$ としてよい。

このとき　$\sin x<x$

関数 $f(x)=e^x$ はすべての実数 x で微分可能で，$f'(x)=e^x$ であるから，区間 $[\sin x,\ x]$ において平均値の定理を用いると

$\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=e^c$，　$\sin x<c<x$

を満たす実数 c が存在する。

$\lim_{x\to+0}\sin x=0$，$\lim_{x\to+0}x=0$ であるから　$\lim_{x\to+0}c=0$

したがって　$\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to+0}e^c=e^0=1$

$\boxed{6}$

解答　略

解説

関数 $f(x)=x\log x$ は $x>0$ で微分可能で　$f'(x)=\log x+1$

区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$\frac{b\log b-a\log a}{b-a}=\log c+1$ ……①，　$a<c<b$ ……②

を満たす実数 c が存在する。

$\frac{1}{e^2}<a<b<1$ であるから，② より　$-2<\log a<\log c<\log b<0$

よって　$-1<\log c+1<1$

したがって，① より　$-1<\frac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

1

解答　接線の方程式，法線の方程式の順に

(1)　$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$，$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$　　(2)　$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$，$y=-\sqrt{3}x+2$

(3)　$y=x-\pi+4$，$y=-x+\pi$

解説

(1)　$y'=\frac{3(x+2)-3x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{6}{(x+2)^2}$

$x=1$ のとき　$y'=\frac{2}{3}$

よって，接線の方程式は

$y-1=\frac{2}{3}(x-1)$　　すなわち　$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

また，法線の方程式は

$y-1=-\frac{3}{2}(x-1)$　　すなわち　$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

(2)　$x^2+3y^2=6$ の両辺を x について微分すると　$2x+6y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

ゆえに，$y\neq 0$ のとき　$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{3y}$

$x=\sqrt{3}$，$y=-1$ のとき　$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

よって，接線の方程式は

$y-(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$　　すなわち　$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$

また，法線の方程式は

$y-(-1)=-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$　　すなわち　$y=-\sqrt{3}x+2$

(3)　$\frac{dx}{d\theta}=2(1-\cos\theta)$，$\frac{dy}{d\theta}=2\sin\theta$

ゆえに　$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき　$\frac{dy}{dx}=1$，　$x=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2$，　$y=2$

よって，接線の方程式は

$y-2=1\cdot\{x-(\pi-2)\}$　　すなわち　$y=x-\pi+4$

また，法線の方程式は

$y-2=-1\cdot\{x-(\pi-2)\}$　　すなわち　$y=-x+\pi$

2

解答　(1)　$y=\frac{2}{e}x$　　(2)　$y=\frac{e^2}{4}x$

解説

(1)　$y=2\log x$ を微分すると　$y'=\frac{2}{x}$

ここで，接点の座標を $(a,\ 2\log a)$ とすると，接線の方程式は

$y-2\log a=\frac{2}{a}(x-a)$　……①

接線 ① が原点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0-2\log a=\frac{2}{a}(0-a)$

よって，$\log a=1$ であるから　$a=e$

① に代入すると　$y-2=\frac{2}{e}(x-e)$　　整理して　$y=\frac{2}{e}x$

(2)　$y'=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

接点の座標を $\left(a,\ \frac{e^a}{a}\right)$ とすると，$a\neq 0$ で，接線の方程式は

$y-\frac{e^a}{a}=\frac{e^a(a-1)}{a^2}(x-a)$

すなわち　$y=\frac{e^a(a-1)}{a^2}(x-a)+\frac{e^a}{a}$　……①

この直線が原点を通るから　$0=e^a(a-1)\cdot(-1)+e^a$

$e^a\neq 0$ であるから　$-(a-1)+1=0$　　ゆえに　$a=2$

よって，求める接線の方程式は，① から

$y=\frac{e^2}{4}(x-2)+\frac{e^2}{2}$　すなわち　$y=\frac{e^2}{4}x$

3

解答　(1)　$a=-3,\ 1,\ \frac{3}{2}$　　(2)　$a=\frac{1}{e}$，$y=\frac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$

解説

(1)　$f(x)=2\sin x$，$g(x)=a-\cos 2x$ とおくと

$f'(x)=2\cos x$，$g'(x)=2\sin 2x$

2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接点の x 座標を t とする。

$x=t$ における 2 曲線の y 座標が等しいから

$f(t)=g(t)$　　すなわち　$2\sin t=a-\cos 2t$　……①

また，$x=t$ における 2 曲線の接線の傾きが等しいから

$f'(t)=g'(t)$　　すなわち　$2\cos t=2\sin 2t$　……②

② から　$\cos t(1-2\sin t)=0$　　よって　$\cos t=0$　または　$\sin t=\frac{1}{2}$

$0\leqq t<2\pi$ であるから　$t=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$　　これらは ① の解でもある。

$t=\frac{\pi}{2}$ のとき，① から　$2\sin\frac{\pi}{2}=a-\cos\pi$

すなわち　$2\cdot 1=a-(-1)$　　ゆえに　$a=1$

同様にして　$t=\frac{3}{2}\pi$ のとき　$a=-3$，　$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ のとき　$a=\frac{3}{2}$

よって　$a=-3,\ 1,\ \frac{3}{2}$

(2)　$f(x)=ax^3$，$g(x)=3\log x$ とすると　$f'(x)=3ax^2$，$g'(x)=\frac{3}{x}$

共有点の x 座標を p とすると，$f(p)=g(p)$ であるから　$ap^3=3\log p$　……①

2 つの曲線の共有点における接線の傾きは等しいから　$f'(p)=g'(p)$

よって　$3ap^2=\frac{3}{p}$　　すなわち　$ap^3=1$　……②

①，② から　$3\log p=1$　　よって　$p=e^{\frac{1}{3}}$

これを ② に代入して　$ae=1$　　ゆえに　$a=\frac{1}{e}$

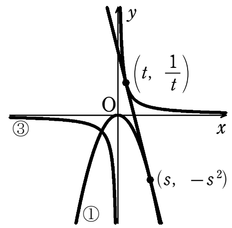
共有点の座標は $\left(e^{\frac{1}{3}},\ 1\right)$ であるから，接線の方程式は

$y-1=\frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}\left(x-e^{\frac{1}{3}}\right)$　　すなわち　$y=\frac{3}{\sqrt[3]{e}}x-2$

4

解答　(1)　$y=-4x+4$　　(2)　$y=ex$

解説



(1)　$y=-x^2$ ……① から　$y'=-2x$

よって，曲線 ① 上の点 $(s,\ -s^2)$ における接線の方程式は　$y-(-s^2)=-2s(x-s)$

すなわち　$y=-2sx+s^2$　……②

また，$y=\frac{1}{x}$ ……③ から　$y'=-\frac{1}{x^2}$

よって，曲線 ③ 上の点 $\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$ における接線の方程式は　$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$

すなわち　$y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$　……④

2 接線 ②，④ が一致するための条件は

$-2s=-\frac{1}{t^2}$　……⑤，　$s^2=\frac{2}{t}$　……⑥

⑤ から　$s=\frac{1}{2t^2}$　　これを ⑥ に代入して　$\frac{1}{4t^4}=\frac{2}{t}$

ゆえに　$8t^3-1=0$　　よって　$(2t-1)(4t^2+2t+1)=0$

t は実数であるから　$t=\frac{1}{2}$

これを ④ に代入して，求める接線の方程式は　$y=-4x+4$

別解　(曲線 ③ の接線 ④ を先に求めた上で)

① と ④ から y を消去して　$x^2-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2-4\cdot\frac{2}{t}=\frac{1}{t^4}-\frac{8}{t}$

① と ④ が接するから，$D=0$ として　$\frac{1}{t^4}-\frac{8}{t}=0$　すなわち　$8t^3-1=0$

よって　$(2t-1)(4t^2+2t+1)=0$

t は実数であるから　$t=\frac{1}{2}$

これを ④ に代入して，求める接線の方程式は　$y=-4x+4$

(2)　$y=e^x$ から　$y'=e^x$

よって，曲線 $y=e^x$ 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は

$y-e^p=e^p(x-p)$

すなわち　$y=e^px+(1-p)e^p$　……①

また，$y=-e^{-x}$ から　$y'=e^{-x}$

よって，曲線 $y=-e^{-x}$ 上の点 $(q,\ -e^{-q})$ における接線の方程式は

$y+e^{-q}=e^{-q}(x-q)$

すなわち　$y=e^{-q}x-(1+q)e^{-q}$　……②

①，② が一致するとき

$$e^p=e^{-q}\ \cdots\cdots ③,\quad (1-p)e^p=-(1+q)e^{-q}\ \cdots\cdots ④$$

③ から　$q=-p$

これを ④ に代入して　$(1-p)e^p=-(1-p)e^p$

よって　$p=1$

したがって，求める方程式は　$y=ex$

$\boxed{5}$

解答　(1)　1　(2)　1　(3)　2

解説

(1)　$x\to+0$ であるから，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい。このとき，$x<\tan x$ が成り立つ。

関数 $f(x)=e^x$ はすべての実数 x で微分可能であり　$f'(x)=e^x$

区間 $[x,\ \tan x]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}=e^c,\quad x<c<\tan x$$

を満たす実数 c が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x=0,\ \lim_{x\to+0}\tan x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}c=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}=\lim_{x\to+0}e^c=e^0=1$

(2)　関数 $f(x)=\sin x$ はすべての実数 x で微分可能であり　$f'(x)=\cos x$

[1]　$x<0$ のとき

$x<x^2$ であるから，区間 $[x,\ x^2]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\sin x^2-\sin x}{x^2-x}=\cos\theta_1,\quad x<\theta_1<x^2$$

を満たす実数 θ_1 が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to-0}x=0,\ \lim_{x\to-0}x^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\theta_1=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x^2-\sin x}{x^2-x}=\lim_{x\to-0}\cos\theta_1=\cos 0=1$

[2]　$x>0$ のとき

$x\to+0$ であるから，$0<x<1$ としてよい。

このとき，$x^2<x$ であるから，区間 $[x^2,\ x]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\cos\theta_2,\quad x^2<\theta_2<x$$

を満たす実数 θ_2 が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^2=0,\ \lim_{x\to+0}x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\theta_2=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\lim_{x\to+0}\cos\theta_2=\cos 0=1$

以上から　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=1$

(3)　関数 $f(x)=\log x$ は $x>0$ で微分可能であり　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

よって，区間 $[x,\ x+2]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\log(x+2)-\log x}{(x+2)-x}=\frac{1}{c},\quad x<c<x+2$$

を満たす実数 c が存在する。

等式から　$x\{\log(x+2)-\log x\}=\dfrac{2x}{c}$

また，$0<x<c<x+2$ から　$\dfrac{2x}{x+2}<\dfrac{2x}{c}<\dfrac{2x}{x}=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x}}=2$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{c}=2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+2)-\log x\}=2$

$\boxed{6}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略　(4)　略　(5)　略

解説

(1)　関数 $f(x)=2^x$ は，$(a,\ b)$ で微分可能で　$f'(x)=2^x\log 2$

区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{2^b-2^a}{b-a}=2^c\log 2\ \cdots\cdots ①,\quad a<c<b\ \cdots\cdots ②$$

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)=2^x\log 2$ は $a<x<b$ で増加するから，② より　$2^a\log 2<2^c\log 2<2^b\log 2$

よって，① より　$2^a\log 2<\dfrac{2^b-2^a}{b-a}<2^b\log 2$

(2)　関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は，$x>0$ で微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}=\frac{1}{2\sqrt{c}}\ \cdots\cdots ①,\quad a<c<b\ \cdots\cdots ②$$

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ は $a<x<b$ で減少するから，② より　$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}>\dfrac{1}{2\sqrt{c}}>\dfrac{1}{2\sqrt{b}}$

すなわち　$\dfrac{1}{2\sqrt{b}}<\dfrac{1}{2\sqrt{c}}<\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

よって，① より　$\dfrac{1}{2\sqrt{b}}<\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}<\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(3)　関数 $f(x)=\sin x$ はすべての実数 x について微分可能で　$f'(x)=\cos x$

区間 $[\alpha,\ \beta]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=\cos c\ \cdots\cdots ①\qquad \alpha<c<\beta\ \cdots\cdots ②$$

を満たす実数 c が存在する。

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，② より　$0<c<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$0<\cos c<1$

ゆえに，① により　$\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}<1$

$\beta-\alpha>0$ であるから　$\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$

(4)　$f(x)=\log x$ とすると，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であり

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\log b-\log a}{b-a}=\frac{1}{c}\ \cdots\cdots ①$$

$$a<c<b\ \cdots\cdots ②$$

を満たす実数 c が存在する。

$a,\ b,\ c$ は正の数であるから，② より

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$$

これに ① を代入して　$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\log b-\log a}{b-a}<\dfrac{1}{a}$

$b-a>0$ であるから　$\dfrac{b-a}{b}<\log b-\log a<\dfrac{b-a}{a}$

したがって　$1-\dfrac{a}{b}<\log\dfrac{b}{a}<\dfrac{b}{a}-1$

(5)　まず，両辺を $e(q-p)$ で割った不等式　$\dfrac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p}<\dfrac{1}{e}$　を証明する。

$f(x)=\log(\log x)$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{x\log x}$

区間 $p\leqq x\leqq q$ において連続であり，$p<x<q$ において微分可能であるから，平均値の定理により　$\dfrac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p}=\dfrac{1}{c\log c}$ ……①　となる c が $p<x<q$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する。

ここで，$e<p<c$ から　$e<c<c\log c$　　よって　$\dfrac{1}{c\log c}<\dfrac{1}{e}$

また，$p<q$ より $q-p>0$ であるから，① より　$\dfrac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p}<\dfrac{1}{e}$

したがって　$e\{\log(\log q)-\log(\log p)\}<q-p$

1

解答　(1)　$y=-x+\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{1}{2}\log 2$　　(2)　$\dfrac{dy}{dx}=-2te^{-t^2-t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=(4t^2+2t-2)e^{-t^2-2t}$，

接線の方程式は　$y=-\dfrac{2}{e^2}x+\dfrac{3}{e}$

解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ より，求める接線の方程式は　$y-\log\left(\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{\cos\dfrac{3}{4}\pi}{\sin\dfrac{3}{4}\pi}\left(x-\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって　$y-\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\left(x-\dfrac{3}{4}\pi\right)$　　ゆえに　$y=-x+\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{1}{2}\log 2$

(2)　$x=e^t$，$y=e^{-t^2}$ から　$\dfrac{dx}{dt}=e^t$，$\dfrac{dy}{dt}=-2te^{-t^2}$

$\dfrac{dx}{dt}=e^t>0$ であるから　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-2te^{-t^2}}{e^t}=-2te^{-t^2-t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(-2te^{-t^2-t})\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$=\left\{-2e^{-t^2-t}+(-2t)\cdot(-2t-1)e^{-t^2-t}\right\}\cdot\frac{1}{e^t}$$

$$=(4t^2+2t-2)e^{-t^2-2t}$$

また，$t=1$ のとき　$x=e$，$y=\dfrac{1}{e}$，$\dfrac{dy}{dx}=-2e^{-2}=-\dfrac{2}{e^2}$

よって，求める接線の方程式は　$y-\dfrac{1}{e}=-\dfrac{2}{e^2}(x-e)$

すなわち　$y=-\dfrac{2}{e^2}x+\dfrac{3}{e}$

2

解答　(ア)　$\dfrac{e^2}{3}$　　(イ)　$e^{\frac{2}{3}}x-\dfrac{5}{3}$

解説

$f(x)=kx^3-1$，$g(x)=\log x$ とおくと　$f'(x)=3kx^2$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$

曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ が，x 座標が $t\ (t>0)$ である点で共通の接線をもつとき

$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$

すなわち　$kt^3-1=\log t$　……①

$3kt^2=\dfrac{1}{t}$　……②

② から　$kt^3=\dfrac{1}{3}$

① に代入すると　$-\dfrac{2}{3}=\log t$

よって　$t=e^{-\frac{2}{3}}$

ゆえに　$k=\dfrac{1}{3\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)^3}={}^{ア}\dfrac{e^2}{3}$

また，共通の接線の方程式は　$y-\log e^{-\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}\left(x-e^{-\frac{2}{3}}\right)$

すなわち　$y={}^{イ}e^{\frac{2}{3}}x-\dfrac{5}{3}$

3

解答　$a\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq a$

解説

$y'=-2xe^{-x^2}$

接点の x 座標を t とすると，接線の方程式は

$y-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(x-t)$　すなわち　$y=-2te^{-t^2}x+(2t^2+1)e^{-t^2}$

これが点 A $(a,\ 0)$ を通るから　$0=-2te^{-t^2}a+(2t^2+1)e^{-t^2}$

よって　$(2t^2-2at+1)e^{-t^2}=0$

$e^{-t^2}>0$ であるから　$2t^2-2at+1=0$　……①

点 A から曲線 $y=e^{-x^2}$ に接線が引けるための必要十分条件は，t の 2 次方程式 ① が実数解をもつことである。

よって，① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-2\cdot1\geqq0$

これを解いて　$a\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq a$

4

解答　(1)　-1　　(2)　0

解説

(1)　$f(x)=\sin x$ とおく。$f(x)$ は常に微分可能であり　$f'(x)=\cos x$

平均値の定理により

$\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c)$，　$\sin x<c<x$　または　$x<c<\sin x$

を満たす実数 c が存在する。

$x\longrightarrow0$ のとき，$\sin x\longrightarrow0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to0}c=0$

よって　$(与式)=\displaystyle\lim_{x\to0}\left\{-\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}\right\}=\lim_{x\to0}\{-f'(c)\}=\lim_{x\to0}(-\cos c)$

$=-\cos0=-1$

(2)　$f(x)=\sin\sqrt{x}$ とすると　$f'(x)=\cos\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})'=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

よって，平均値の定理により，$\dfrac{\sin\sqrt{x+c}-\sin\sqrt{x}}{(x+c)-x}=\dfrac{\cos\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}$ を満たす α が x と $x+c$ の間に存在する。

ここで，$x\longrightarrow\infty$ ならば $\alpha\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+c}-\sin\sqrt{x})=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{c\cos\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}=0$$

5

解答　略

解説

$f(x)=\log(\log x)$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{x\log x}$

区間 $p\leqq x\leqq q$ において，平均値の定理により，

$\log(\log q)-\log(\log p)=(q-p)\times\dfrac{1}{c\log c}$ となる c が $p<c<q$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する．

ここで，$e\leqq p<c$ から　$e<c<c\log c$

ゆえに　$\dfrac{1}{c\log c}<\dfrac{1}{e}$

よって，$p<q$ から　$\log(\log q)-\log(\log p)<\dfrac{q-p}{e}$

1

解答　$y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$　（k は整数）

解説

$y=\sin x$ から　　$y'=\cos x$

接点の座標を $(p,\ \sin p)$ とすると，接線の方程式は　　$y-\sin p=\cos p(x-p)$

すなわち　　$y=x\cos p-p\cos p+\sin p$　……①

同様に，点 $(q,\ \sin q)$ における接線の方程式は　　$y=x\cos q-q\cos q+\sin q$　……②

① と ② が直交するとき　　$\cos p\cdot\cos q=-1$

ここで，$-1<\cos p<1$ とすると　　$|\cos q|>1$

これは $-1\leqq\cos q\leqq 1$ に矛盾する。

よって　　$\cos p=\pm 1$

[1]　$\cos p=1$ のとき

$\cos q=-1$ であるから，整数 m，n を用いて $p=2m\pi$，$q=(2n+1)\pi$ と表せる。

①，② より，２つの接線の方程式は　　$y=x-2m\pi$，$y=-x+(2n+1)\pi$

よって，交点の y 座標は　　$2y=(2n-2m+1)\pi$

ゆえに　　$y=\dfrac{2(n-m)+1}{2}\pi$

n，m は任意の整数であるから，任意の整数 k を用いて $n-m=k$ と表せる。

したがって　　$y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$

[2]　$\cos p=-1$ のとき

[1] と同様に，２つの接線の交点の y 座標は，任意の整数 k を用いて　$y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$

[1]，[2] より，求める交点の y 座標の値は　　$y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$（k は整数）

2

解答　1

解説

$f(x)=\dfrac{1}{2}+\sin\dfrac{\pi}{6}x$ とすると　　$f'(x)=\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6}x$

$f(x)$ は微分可能で，$a_{n+1}=f(a_n)$，$1=f(1)$ であるから，区間 $[a_n,\ 1]$ または $[1,\ a_n]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{f(a_n)-f(1)}{a_n-1}=f'(c)\ \text{すなわち}\ a_{n+1}-1=(a_n-1)f'(c)$$

（$a_n<c<1$ または $1<c<a_n$）を満たす c が存在する。

よって　　$|a_{n+1}-1|=|a_n-1|\cdot\left|\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6}c\right|\leqq\dfrac{\pi}{6}|a_n-1|$

ゆえに　　$0\leqq|a_n-1|\leqq\dfrac{\pi}{6}|a_{n-1}-1|\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{n-1}|a_1-1|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n-1}|a_1-1|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n-1}=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$　　　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

3

解答　(1)　略　　(2)　$f'(a)$，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(b)$

解説

(1)　$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2)　関数 $f(x)$ は $x>0$ において，微分可能である。

区間 $[a,\ b]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する。

$0<a<c<b$ から　　$\sqrt{a}<\sqrt{c}<\sqrt{b}$　　すなわち　　$\dfrac{1}{2\sqrt{b}}<\dfrac{1}{2\sqrt{c}}<\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=f'(a)$，$\dfrac{1}{2\sqrt{b}}=f'(b)$，$\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ であるから

$$f'(b)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(a)$，$f'(b)$ を大きい順に並べると

$$f'(a),\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ f'(b)$$

1

解答　(1)　$x=1$ で極大値 1，$x=-1$ で極小値 -1　　(2)　$x=3$ で極大値 $\dfrac{27}{e^3}$

解説

(1)　$y'=\dfrac{2\{(1+x^2)-x\cdot2x\}}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 1$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -1	↗	極大 1	↘

よって　　$x=1$ で極大値 1，

$x=-1$ で極小値 -1

(2)　$y'=3x^2e^{-x}+x^3(-e^{-x})=-x^2(x-3)e^{-x}$

$y'=0$ とすると

$x=0,\ 3$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	↗	0	↗	極大 $\dfrac{27}{e^3}$	↘

よって　　$x=3$ で極大値 $\dfrac{27}{e^3}$

2

解答　(1)　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{5}{4}$；$x=\pi$ で極小値 1

(2)　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$

解説

(1)　$f'(x)=2\sin x\cos x+\sin x=\sin x(2\cos x+1)$

$0<x<2\pi$ において，$f'(x)=0$ となるのは

$\sin x=0$ から　　$x=\pi$

$2\cos x+1=0$ から　　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	極大 $\frac{5}{4}$	↘	極小 1	↗	極大 $\frac{5}{4}$	↘	-1

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{5}{4}$，$x=\pi$ で極小値 1 をとる。

(2)　$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0<x<2\pi$ において，$f'(x)=0$ となるのは

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ から　　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	↘	極小 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$	↗	0

よって，$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{4}$ で極大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，$x=\frac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$ をとる。

3

解答　(1)　$x=1-\sqrt{2}$ で極大値 $-3-2\sqrt{2}$，$x=1+\sqrt{2}$ で極小値 $-3+2\sqrt{2}$

(2)　$x=\sqrt[3]{e}$ で極大値 $\frac{1}{3e}$　　(3)　$x=1$ で極大値 $\frac{1}{2}$

(4)　$x=\frac{4}{3}$ で極小値 $\frac{9}{2}$，$x=4$ で極大値 $\frac{1}{2}$

解説

(1)　関数の定義域は $x\neq 1$ である。

$f(x)=x-4+\frac{2}{x-1}$ であるから　　$f'(x)=1-\frac{2}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1\pm\sqrt{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $-3-2\sqrt{2}$	↘	／	↘	極小 $-3+2\sqrt{2}$	↗

よって，$f(x)$ は

$x=1-\sqrt{2}$ で極大値 $-3-2\sqrt{2}$，$x=1+\sqrt{2}$ で極小値 $-3+2\sqrt{2}$

をとる。

(2)　この関数の定義域は　　$x>0$

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-(\log x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{1-3\log x}{x^4}$$

$y'=0$ とすると　　$\log x=\frac{1}{3}$

ゆえに　　$x=\sqrt[3]{e}$

y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{e}$	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$
y	／	↗	極大 $\frac{1}{3e}$	↘

よって，y は $x=\sqrt[3]{e}$ で極大値 $\frac{1}{3e}$ をとる。

(3)　$f(x)$ の定義域は $x\geqq 0$ である。

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘

したがって，$f(x)$ は　$0\leqq x\leqq 1$ で増加し，$1\leqq x$ で減少する。

よって，$f(x)$ は　$x=1$ で極大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

(4)　この関数の定義域は　$x\neq 0$，$x\neq 2$

$$y'=-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=-\frac{3x^2-16x+16}{x^2(x-2)^2}=-\frac{(x-4)(3x-4)}{x^2(x-2)^2}$$

$y'=0$ とすると　　$x=\frac{4}{3}$，4

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$-$	／	$-$	0	$+$	／	$+$	0	$-$
y	↘	／	↘	極小 $\frac{9}{2}$	↗	／	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘

よって，y は　$x=\frac{4}{3}$ で極小値 $\frac{9}{2}$，$x=4$ で極大値 $\frac{1}{2}$　をとる。

4

解答　$x=-\frac{2}{3}$ で極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$，$x=0$ で極小値 0

解説

定義域は $x+1\geqq 0$ から　　$x\geqq -1$

[1]　$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　　$y=-x\sqrt{x+1}$

ゆえに，$-1<x<0$ のとき

$$y'=-\sqrt{x+1}-\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=-\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$y'=0$ とすると　　$x=-\frac{2}{3}$

[2]　$x\geqq 0$ のとき　　$y=x\sqrt{x+1}$

よって，$x>0$ のとき　　$y'=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}>0$

[3]　関数 y は $x=-1$，0 で微分可能でない。

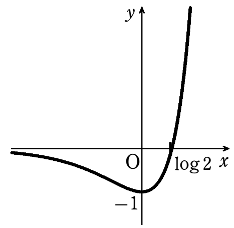
以上から，y の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$	／	$+$
y	0	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	極小 0	↗

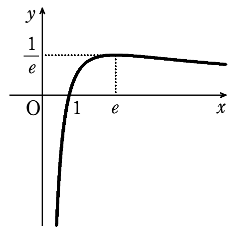
したがって　　$x=-\frac{2}{3}$ で極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$，$x=0$ で極小値 0

5

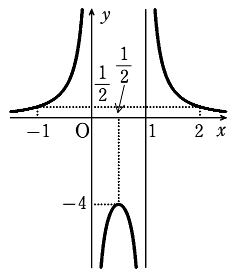
解答　(1)



(2



(3)



解説

(1)　$f(x)=e^x(e^x-2)$

$f(x)=0$ とおくと　$0=e^x(e^x-2)$

$e^x>0$ であるから　$e^x=2$

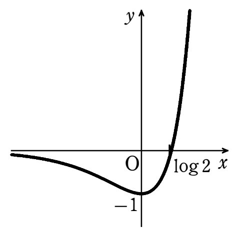
よって　$x=\log 2$

$x\to+\infty$ のとき $e^x\to+\infty$，$e^x-2\to+\infty$ であるから　$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty$

また，$x\to-\infty$ のとき $e^x\to 0$ であるから　$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

$f'(x)=2e^x(e^x-1)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗



よって，$x=0$ のとき $f(x)$ は極小かつ最小となり，

最小値は　$f(0)=-1$

また，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる.

(2)　$y=\frac{\log x}{x}$，$y'=\frac{1-\log x}{x^2}$

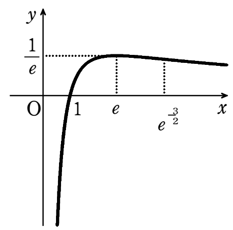
$y=0$ とおくと　$\log x=0$ から　$x=1$

$y'=0$ とおくと　$1-\log x=0$ から　$x=e$

$x=e$ のとき $y=\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$，$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0$，

$x>1$ で $y>0$　よって，グラフは図のようになる.



(3)　$y'=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+(x-1)^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{-2x+1}{x^2(x-1)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=\frac{1}{2}$

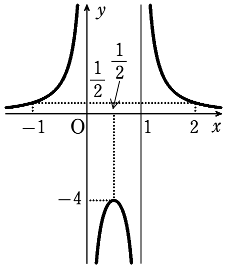
また　　$\lim_{x\to-\infty} y=0$，　$\lim_{x\to\infty} y=0$

$\lim_{x\to-0} y=\infty$，　$\lim_{x\to+0} y=-\infty$

$\lim_{x\to1-0} y=-\infty$，　$\lim_{x\to1+0} y=\infty$

よって，x 軸，y 軸，および直線 $x=1$ は漸近線である。

したがって，グラフの概形は，右の図のようになる。



$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=1$ で極大値 2，$x=-1$ で極小値 -2

(2)　$x=-\frac{2}{3}$ で極小値 $-\frac{9}{2}$，$x=3$ で極大値 1

(3)　$x=1$ で極大値 $\sqrt{2}$　　(4)　$x=1$ で極大値 $\frac{1}{e^3}$，極小値はない

(5)　$x=0$ で極小値 0，$x=1$ で極大値 $\frac{1}{e^2}$

(6)　$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$，$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極大値 $\frac{1}{\sqrt{2e}}$

解説

(1)　$y'=\frac{4(x^2+1)-4x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm1$

したがって，y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

よって　　$x=1$ で極大値 2，

$x=-1$ で極小値 -2

(2)　$f'(x)=\frac{6(x^2+2)-(6x-7)\cdot2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-6x^2+14x+12}{(x^2+2)^2}$

$=-\frac{2(3x+2)(x-3)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-\frac{2}{3}$，3

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 $-\frac{9}{2}$	↗	極大 1	↘

よって，$f(x)$ は

$x=-\frac{2}{3}$ で極小値 $-\frac{9}{2}$，$x=3$ で極大値 1 をとる。

(3)　$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-(x+1)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$

$=\frac{x^2+1-(x+1)x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$y'=0$ とすると　　$x=1$

したがって，y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	極大 $\sqrt{2}$	↘

よって　　$x=1$ で極大値 $\sqrt{2}$

(4)　$f'(x)=3x^2e^{-3x}+x^3(-3e^{-3x})=3x^2e^{-3x}(1-x)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，1

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗	極大 $\frac{1}{e^3}$	↘

よって，$f(x)$ は

$x=1$ で極大値 $\frac{1}{e^3}$ をとる。

極小値はない。

(5)　$f'(x)=2xe^{-2x}-2x^2e^{-2x}$

$=2x(1-x)e^{-2x}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$，1

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{1}{e^2}$	↘

よって，$f(x)$ は

$x=0$ で極小値 0,

$x=1$ で極大値 $\frac{1}{e^2}$　をとる。

(6)　$y'=1\cdot e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$

$=-2\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↗	極大 $\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘

ゆえに，$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ で増加，

$x\leqq-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x$ で減少，

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$，

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極大値 $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ をとる。

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=\frac{2}{3}\pi$ で極大値 $\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$，$x=\frac{4}{3}\pi$ で極小値 $-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$

(2)　$x=\frac{5}{6}\pi$ で極大値 $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{6}$ で極小値 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$x=0$ で極小値 1，$x=\frac{\pi}{2}$ で極大値 $\frac{\pi}{2}$

(4)　$x=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ で極大値 $\frac{5}{4}$，$x=\pi$ で極小値 1

(5)　$x=\frac{7}{6}\pi$ で極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{11}{6}\pi$ で極小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(6)　$x=\frac{\pi}{4}$ で極大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，$x=\frac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$

解説

(1)　$y'=2\cos x+1$ であるから，$y'=0$ とすると

$\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq2\pi$ であるから　　$x=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
y	0	↗	極大	↘	極小	↗	2π

よって　　$x=\frac{2}{3}\pi$ で極大値 $\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$，

$x=\frac{4}{3}\pi$ で極小値 $-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$

(2)　$f'(x)=1-2\cos2x$

$f'(x)=0$ とすると　　$\cos2x=\frac{1}{2}$

$0<x<\pi$ の範囲でこの等式を満たす x の値を求める。

$0<2x<2\pi$ であるから　　$2x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

よって　　$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	$\frac{\pi}{6}$	……	$\frac{5}{6}\pi$	……	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	極小 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	極大 $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	π

よって，$f(x)$ は $x=\frac{5}{6}\pi$ で極大値 $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{6}$ で極小値 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(3)　$y'=-\sin x+(\sin x+x\cos x)=x\cos x$

$y'=0$ とすると，$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ であるから　　$x=0$，$\pm\frac{\pi}{2}$

y の増減表は次のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	…	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{\pi}{2}$	↘	極小 1	↗	極大 $\frac{\pi}{2}$	↘	-1

よって　　$x=0$ で極小値 1，$x=\frac{\pi}{2}$ で極大値 $\frac{\pi}{2}$

(4)　$f'(x)=2\sin x\cos x+\sin x=\sin x(2\cos x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$\sin x=0$，$\cos x=-\frac{1}{2}$

$0<x<2\pi$ において，この等式を満たす x の値は　$x=\frac{2}{3}\pi$，π，$\frac{4}{3}\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π	…	$\frac{4}{3}\pi$	…	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	極大 $\frac{5}{4}$	↘	極小 1	↗	極大 $\frac{5}{4}$	↘	-1

したがって，$f(x)$ は $x=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ で極大値 $\frac{5}{4}$，$x=\pi$ で極小値 1 をとる。

(5)　$f'(x)=2\cos 2x+2\sin x=2(1-2\sin^2 x)+2\sin x=-2(2\sin^2 x-\sin x-1)$
$=-2(\sin x-1)(2\sin x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin x=1$ または $\sin x=-\frac{1}{2}$

$0<x<2\pi$ において，この等式を満たす x の値は　$x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{7}{6}\pi$	…	$\frac{11}{6}\pi$	…	2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	-2

したがって，$f(x)$ は $x=\frac{7}{6}\pi$ で極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{11}{6}\pi$ で極小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(6)　$y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(-\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

$y'=0$ とすると　　$\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)=0$

$0<x<2\pi$ のとき，$\frac{3}{4}\pi<x+\frac{3}{4}\pi<2\pi+\frac{3}{4}\pi$ であるから　　$x+\frac{3}{4}\pi=\pi$，2π

すなわち　　$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{5}{4}\pi$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{5}{4}\pi$	…	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	極大	↘	極小	↗	$e^{2\pi}$

よって　　$x=\frac{\pi}{4}$ で極大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，$x=\frac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=-6$ で極大値 -9，$x=0$ で極小値 -3　　(2)　$x=\sqrt{e}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$

(3)　$x=\frac{7}{9}$ で極大値 $\frac{25}{12}$　　(4)　$x=-1$ で極大値 1，$x=\frac{1}{3}$ で極小値 9

(5)　$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\frac{1}{2e}$　　(6)　極大値はない，$x=\frac{1}{4}$ で極小値 $\frac{27}{32}$

(7)　$x=2$ で極小値 2

解説

(1)　定義域は $x\neq-3$ である。

$y=\frac{x^2+3x+9}{x+3}=x+\frac{9}{x+3}$ であるから

$y'=1-\frac{9}{(x+3)^2}=\frac{(x+3)^2-9}{(x+3)^2}=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=-6$，0

よって，y の増減表は次のようになる。

x	…	-6	…	-3	…	0	…
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗	-9	↘		↘	3	↗

よって，$x=-6$ で極大値 -9，$x=0$ で極小値 -3

(2)　関数 y の定義域は　　$x>0$

$y'=-\frac{2}{x^3}\log x+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-2\log x}{x^3}$

$y'=0$ とすると　　$\log x=\frac{1}{2}$　　ゆえに　　$x=\sqrt{e}$

よって，y の増減表は右のようになるから

$0<x\leqq\sqrt{e}$ で増加，$\sqrt{e}\leqq x$ で減少，

$x=\sqrt{e}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$ をとる。

x	0	…	$\sqrt{e}$	…
y'		$+$	0	$-$
y		↗	極大 $\frac{1}{2e}$	↘

(3)　関数の定義域は　$x\geqq-1$

$y'=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{3}{4}=\frac{4-3\sqrt{x+1}}{4\sqrt{x+1}}$

$y'=0$ とすると，$4-3\sqrt{x+1}=0$ より

$\sqrt{x+1}=\frac{4}{3}$　　よって　$x=\frac{7}{9}$

y の増減表は右のようになる。

よって，y は

$-1\leqq x\leqq\frac{7}{9}$ で増加し，$\frac{7}{9}\leqq x$ で減少する。

よって，y は　$x=\frac{7}{9}$ で極大値 $\frac{25}{12}$ をとる。

x	-1	…	$\frac{7}{9}$	…
y'		$+$	0	$-$
y	$\frac{3}{4}$	↗	$\frac{25}{12}$	↘

(4)　この関数の定義域は，$x\neq0$，$x\neq1$ である。

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{3x^2+2x-1}{x^2(x-1)^2}=\frac{(x+1)(3x-1)}{x^2(x-1)^2}$

$f'(x)=0$ を満たす x の値は　　$x=-1$，$\frac{1}{3}$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	0	…	$\frac{1}{3}$	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↗	極大 1	↘		↘	極小 9	↗		↗

したがって，$f(x)$ は $x=-1$ で極大値 1，$x=\frac{1}{3}$ で極小値 9 をとる。

(5)　真数は正であるから，この関数の定義域は $x>0$ である。

$f'(x)=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\log x+1)$

$x>0$ において，$f'(x)=0$ を満たす x の値は，$\log x=-\frac{1}{2}$ から

$x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小 $-\frac{1}{2e}$	↗

したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$ をとる。

したがって，$f(x)$ は $x=-2$ で極小値 $-\dfrac{1}{e^2}$ をとる。

(6)　$f(x)$ の定義域は $x\neq\dfrac{1}{2}$ である。

$$f'(x)=\frac{-3(1-x)^2(1-2x)-(1-x)^3(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{(1-x)^2(-3+6x+2-2x)}{(1-2x)^2}$$
$$=\frac{(1-x)^2(4x-1)}{(1-2x)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{4},\ 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	$\frac{1}{4}$	……	$\frac{1}{2}$	……	1	……
$f'(x)$	$-$	0	$+$	／	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小 $\frac{27}{32}$	↗	／	↗	0	↗

よって，$f(x)$ は 極大値はない。$x=\dfrac{1}{4}$ で極小値 $\dfrac{27}{32}$ をとる。

(7)　この関数の定義域は $x>1$ である。

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}-x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{2(x-1)-x}{2(x-1)\sqrt{x-1}}=\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$x>1$ において，$f'(x)=0$ を満たす x の値は　$x=2$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	…	2	…
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小 2	↗

したがって，$f(x)$ は $x=2$ で極小値 2 をとる。

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=-2$ で極大値 2，$x=0$ で極小値 0

(2)　$x=2$ で極大値 2，$x=0$ で極小値 0

(3)　$x=-\dfrac{4}{3}$ で極大値 $\dfrac{10\sqrt{15}}{9}$，$x=2$ で極小値 0

(4)　$x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0

解説

(1)　$x+3\geqq 0$ であるから，関数の定義域は　$x\geqq -3$

[1]　$x\geqq 0$ のとき　　$f(x)=x\sqrt{x+3}$

$x>0$ において　　$f'(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

ゆえに，$x>0$ では，常に　$f'(x)>0$

[2]　$-3\leqq x<0$ のとき　　$f(x)=-x\sqrt{x+3}$

$-3<x<0$ において　　$f'(x)=-\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-2$

以上から，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	…	-2	…	0	…
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／	$+$
$f(x)$	0	↗	極大 2	↘	極小 0	↗

よって，$f(x)$ は $x=-2$ で極大値 2，$x=0$ で極小値 0 をとる。

(2)　$3-x\geqq 0$ であるから，定義域は　$x\leqq 3$

[1]　$x\leqq 0$ のとき　　$y=-x\sqrt{3-x}$

よって，$x<0$ のとき　　$y'=-\sqrt{3-x}+\dfrac{x}{2\sqrt{3-x}}=\dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{3-x}}$

この範囲では　　$y'<0$

[2]　$0\leqq x\leqq 3$ のとき　　$y=x\sqrt{3-x}$

よって，$0<x<3$ のとき　　$y'=-\dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{3-x}}$

この範囲で $y'=0$ となる x の値は　　$x=2$

[3]　関数 y は $x=0,\ 3$ で微分可能でない。

以上から，y の増減表は次のようになる。

x	…	0	…	2	…	3
y'	$-$	／	$+$	0	$-$	／
y	↘	極小 0	↗	極大 2	↘	0

よって　　$x=2$ で極大値 2，$x=0$ で極小値 0

(3)　$x+3\geqq 0$ であるから，定義域は　$x\geqq -3$

$-3\leqq x<2$ のとき　$y=(-x+2)\sqrt{x+3}$，$2\leqq x$ のとき　$y=(x-2)\sqrt{x+3}$　から

(ｉ)　$-3<x<2$ のとき　$y'=-\sqrt{x+3}+(-x+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}=-\dfrac{3x+4}{2\sqrt{x+3}}$

$y'=0$ とすると　$x=-\dfrac{4}{3}$

(ⅱ)　$2<x$ のとき　$y'=\sqrt{x+3}+(x-2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{3x+4}{2\sqrt{x+3}}>0$

(ⅲ)　$x=-3,\ 2$ のときは微分可能でない。

よって，y の増減表は次のようになる。

x	-3	…	$-\frac{4}{3}$	…	2	…
y'	／	$+$	0	$-$	／	$+$
y	0	↗	極大 $\frac{10\sqrt{15}}{9}$	↘	極小 0	↗

ゆえに，y は　$x=-\dfrac{4}{3}$ で極大値 $\dfrac{10\sqrt{15}}{9}$

$x=2$ で極小値 0　　　　をとる。

(4)　$x\geqq 1$ のとき　　$y=(x-1)e^x$

よって，$x>1$ のとき　　$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x>0$

$x<1$ のとき　　$y=-(x-1)e^x$

よって　　$y'=-e^x-(x-1)e^x=-xe^x$

$y'=0$ とすると　　$x=0$

関数 y は $x=1$ のとき微分可能でない。

ゆえに，y の増減表は右のようになる。

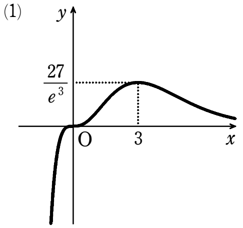
よって，$x=0$ で極大値 1，

$x=1$ で極小値 0 をとる。

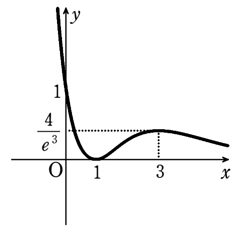
x	…	0	…	1	…
y'	$+$	0	$-$	／	$+$
y	↗	極大 1	↘	極小 0	↗

$\boxed{5}$

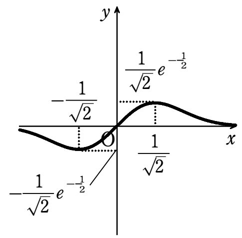
解答　(1)



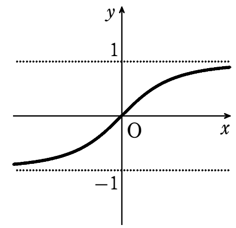
(2)



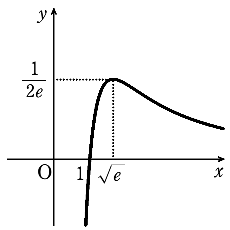
(3)



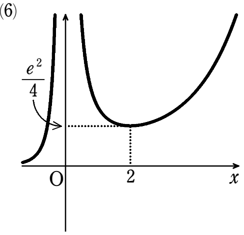
(4)



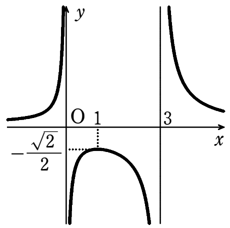
(5)



(6)



(7)



解説

(1)　$y=x^3e^{-x}$ より　　$y'=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2(3-x)e^{-x}$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 3$

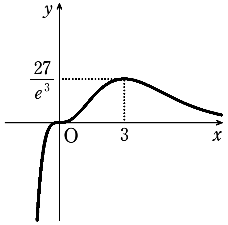
y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{27}{e^3}$	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3e^{-x}=-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}x^3e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$$

よって，曲線の概形は，右の図のようになる。



(2)　$f(x)=(x-1)^2e^{-x}$，$f'(x)=2(x-1)e^{-x}+(x-1)^2\cdot(-e^{-x})$

$$=(x-1)(2-x+1)e^{-x}$$

$$=-(x-1)(x-3)e^{-x}$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\dfrac{4}{e^3}$	$\searrow$

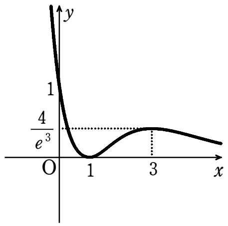
よって，$f(x)$ は $x=3$ で極大値 $\dfrac{4}{e^3}$，$x=1$ で極小値 0 をとる。

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-1)^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}(x-1)^2e^{-(x-1)}\cdot e^{-1}$$

$$=0\cdot e^{-1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2e^{-x}=\infty$$

よって,$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



(3)　$f(x)=xe^{-x^2}$，$f'(x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$

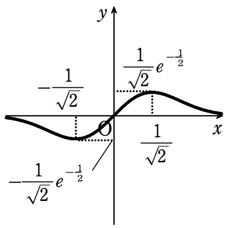
x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$

よって，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$，

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



(4)　$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

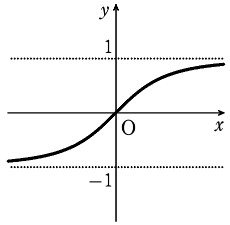
よって，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}=1$ であり，

$t=-x$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{(-t)^2}+1}}=-1$$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



(5)　真数は正であるから　$x>0$

$y=\dfrac{\log x}{x^2}$ から　$y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

$y'=0$ とすると　$x=\sqrt{e}$

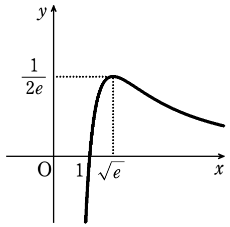
y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
y'	/	$+$	0	$-$
y	/	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^2}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$

$y=0$ とすると　$x=1$

よって，$y=\dfrac{\log x}{x^2}$ のグラフは右の図のようになる。



(6)　$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$　　$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^2-2x\cdot e^x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$

$f'(x)=0$ とおくと　$x=2$

$x<0$ のとき　$f'(x)>0$　かつ　$f(x)>0$

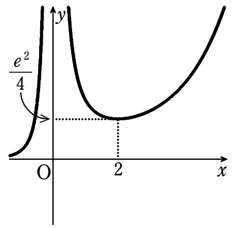
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$　　$\displaystyle\lim_{x\to\pm0}f(x)=+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
y	$0\nearrow+\infty$	$\times$	$+\infty\searrow$	$\dfrac{e^2}{4}$	$\nearrow+\infty$

増減表から　$x=2$ のとき極小値 $\dfrac{e^2}{4}$

グラフは右の図。



(7)　$x^2-3x=x(x-3)$，$x^2+1\geqq 0$ であるから，関数の定義域は　$x\neq 0,\ 3$

$$y'=\frac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\cdot(x^2-3x)-\sqrt{x^2+1}\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$=\frac{x^2(x-3)-(x^2+1)(2x-3)}{x^2(x-3)^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{x^2(x-3)^2\sqrt{x^2+1}}$$

$y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$
y	$\nearrow$	/	$\nearrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	/	$\searrow$

よって，y は $x=1$ で極大値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

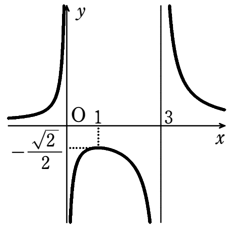
$\displaystyle\lim_{x\to-0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=-\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to3-0}y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to3+0}y=\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=0$

であるから，y 軸，直線 $x=3$，x 軸はこのグラフの漸近線である。

以上から，グラフは右の図のようになる。



1

解答　(1)　$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ で極大値 $\frac{1}{2}$，$x=0$ で極小値 0　　(2)　極値なし

(3)　$x=-\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{9}{4}e^{-2}$，$x=\frac{4}{5}$ で極小値 $-e^{\frac{16}{5}}$

(4)　$x=-3$ で極大値 0，$x=-\frac{13}{5}$ で極小値 $-\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$

(5)　$x=1$ で極大値 -1，$x=3$ で極小値 3

(6)　$x=\frac{\pi}{4}$ で極小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\frac{5}{4}\pi$ で極大値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

解説

(1)　定義域は $1-x^2\geqq 0$ から　$-1\leqq x\leqq 1$

[1]　$-1\leqq x<0$ のとき　　$y=-x\sqrt{1-x^2}$

よって，$-1<x<0$ のとき

$$y'=-\left(1\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y'=0$ とすると　　$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

[2]　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　　$y=x\sqrt{1-x^2}$

よって，$0<x<1$ のとき　$y'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$　　$y'=0$ とすると　$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

[3]　関数 y は $x=-1$，0，1 で微分可能でない。

以上から，y の増減表は次のようになる。

x	-1	…	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	1
y'		+	0	−		+	0	−	
y	0	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘	0

よって，$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ で極大値 $\frac{1}{2}$，$x=0$ で極小値 0

(2)　$y'=\frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}$

y の増減表は右のようになる。

よって，極値はない。

x	$\frac{\pi}{2}$	…	2π
y'		+	
y		↗	1

(3)　$y'=(10x-4)e^{4x}+(5x^2-4x-1)\cdot 4e^{4x}$

$=2(2x+1)(5x-4)e^{4x}$

$y'=0$ とすると　　$x=-\frac{1}{2}$，$\frac{4}{5}$

y の増減表は右のようになる。

x	…	$-\frac{1}{2}$	…	$\frac{4}{5}$	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 $\frac{9}{4}e^{-2}$	↘	極小 $-e^{\frac{16}{5}}$	↗

よって　　$x=-\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{9}{4}e^{-2}$

$x=\frac{4}{5}$ で極小値 $-e^{\frac{16}{5}}$

(4)　$y'=1\cdot(x+3)^{\frac{2}{3}}+(x+2)\cdot\frac{2}{3}(x+3)^{-\frac{1}{3}}$

$=\frac{3(x+3)+2(x+2)}{3\sqrt[3]{x+3}}=\frac{5x+13}{3\sqrt[3]{x+3}}$

$y'=0$ とすると　　$x=-\frac{13}{5}$

また，$x=-3$ で微分可能でない。

したがって，y の増減表は右のようになる。

よって　　$x=-3$ で極大値 0

$x=-\frac{13}{5}$ で極小値 $-\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$

x	…	-3	…	$-\frac{13}{5}$	…
y'	+		−	0	+
y	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$	↗

(5)　$x-2\neq 0$ であるから，定義域は　$x\neq 2$

また，$y=x-1+\frac{1}{x-2}$ と変形できる。

よって　　$y'=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=1$，3

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	…	1	…	2	…	3	…
y'	+	0	−		−	0	+
y	↗	極大 -1	↘		↘	極小 3	↗

よって　　$x=1$ で極大値 -1，$x=3$ で極小値 3

(6)　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ を解くと

$x+\frac{\pi}{4}=\pi$，2π　　　　よって　　$x=\frac{3}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$

ゆえに，関数の定義域は　$x\neq\frac{3}{4}\pi$，$x\neq\frac{7}{4}\pi$

このとき　　$y'=\frac{-(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$

$y'=0$ とすると　　$\sin x-\cos x=0$　　すなわち　　$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$0<x<2\pi$ の範囲で，これを解くと　　$x-\frac{\pi}{4}=0$，π

よって　　$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{5}{4}\pi$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{3}{4}\pi$	…	$\frac{5}{4}\pi$	…	$\frac{7}{4}\pi$	…	2π
y'		−	0	+		+	0	−		−	
y	1	↘	極小	↗		↗	極大	↘		↘	1

よって　　$x=\frac{\pi}{4}$ で極小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\frac{5}{4}\pi$ で極大値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2

解答　$a=12$，$b=2\sqrt{3}$

解説

$f'(x)=a\cos x-2b\sin 2x$

$x=\frac{\pi}{3}$ で極大値 $5\sqrt{3}$ をとるから　　$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$，$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$

よって　　$\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{b}{2}=5\sqrt{3}$，$\frac{a}{2}-\sqrt{3}\,b=0$

これを解いて　　$a=12$，$b=2\sqrt{3}$

このとき　　$f'(x)=12\cos x-4\sqrt{3}\sin 2x=12\cos x-8\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=-4\sqrt{3}\cos x(2\sin x-\sqrt{3})$

ゆえに，$x=\frac{\pi}{3}$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に変わるから，確かに $f(x)$ は $x=\frac{\pi}{3}$ で極大となる。

したがって　　$a=12$，$b=2\sqrt{3}$

3

解答　$a=1$，$b=2$，$c=3$

解説

$f'(x)=\frac{-bx^2+(4a-2c)x+2b}{(x^2+2)^2}$

$x=-2$ で極小値 $\frac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 2 をもつから，

$f'(-2)=0$，$f(-2)=\frac{1}{2}$，$f'(1)=0$，$f(1)=2$ であることが必要。

$f'(-2)=0$ から　　$\frac{-8a-2b+4c}{36}=0$

$f'(1)=0$ から　　$\frac{4a+b-2c}{9}=0$

よって　　$4a+b-2c=0$　……①

$f(-2)=\frac{1}{2}$ から　　$4a-2b+c=3$　……②

$f(1)=2$ から　　$a+b+c=6$　……③

①，②，③ から　　$a=1$，$b=2$，$c=3$

逆に，このとき　　$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2}$

$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$

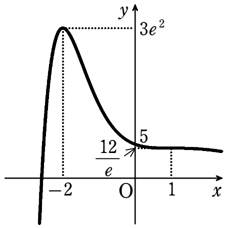
$f(x)$ の増減表は次のようになり，条件を満たす。

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	2	↘

以上から　　$a=1$，$b=2$，$c=3$

$\boxed{4}$

解答 ［図］



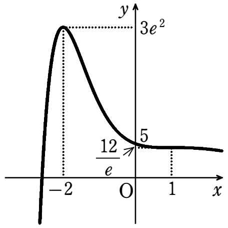
解説

$f(x)=(x^3+3x^2+3x+5)e^{-x}$

$f'(x)=(3x^2+6x+3)e^{-x}-(x^3+3x^2+3x+5)e^{-x}=-(x^3-3x+2)e^{-x}$
$\quad=-(x-1)^2(x+2)e^{-x}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ -2$　　よって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	極大 $3e^2$	↘	$\dfrac{12}{e}$	↘	0



$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．

$\boxed{1}$

解答　$x=-2$ で極大値 $4e^{-a-2}$，$x=0$ で極小値 0，$x=a$ で極大値 a^2

解説

$x<a$ のとき　　$f(x)=x^2e^{x-a}$

$\qquad\qquad f'(x)=2xe^{x-a}+x^2\cdot e^{x-a}=xe^{x-a}(x+2)$

$x=a$ のとき　　$f(x)=a^2$　　　この点でも $f(x)$ は連続である。

$x>a$ のとき　　$f(x)=x^2e^{-x+a}$

$\qquad\qquad f'(x)=2xe^{-x+a}-x^2\cdot e^{-x+a}=xe^{-x+a}(2-x)$

$x>a>2$ であるから　　$f'(x)<0$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

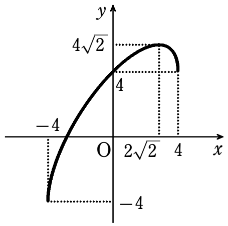
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	／	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

したがって，$f(x)$ の極値は

$\qquad x=-2$ で極大値 $4e^{-a-2}$，　$x=0$ で極小値 0，　$x=a$ で極大値 a^2

$\boxed{2}$

解答



解説

$16-x^2\geqq0$ であるから，これを解くと　　$-4\leqq x\leqq4$

　よって，$f(x)$ の定義域は　　$-4\leqq x\leqq4$

$f'(x)=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$

$f'(x)=0$ とすると　　$\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}=1$　　　よって　　$x=\sqrt{16-x^2}$　……①

$\sqrt{16-x^2}\geqq0$ であるから　　$x\geqq0$

① の両辺を２乗すると　　$x^2=16-x^2$　　　よって　　$x^2=8$

$0\leqq x\leqq4$ であるから　　$x=2\sqrt2$

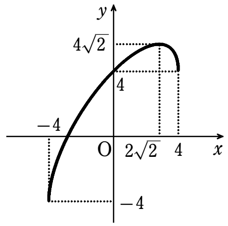
$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	-4	$\cdots$	$2\sqrt2$	$\cdots$	4
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	-4	↗	極大	↘	4

$\quad f(2\sqrt2)=2\sqrt2+\sqrt{16-(2\sqrt2)^2}$
$\qquad\qquad=2\sqrt2+\sqrt8=4\sqrt2$

よって，$f(x)$ は $x=2\sqrt2$ で極大値 $4\sqrt2$ をとる。

$y=f(x)$ のグラフは右のようになる。



$\boxed{3}$

解答　(1)　$f'(x)=\dfrac{-x^2+2ax+a+1}{(x^2+x+1)^2}$

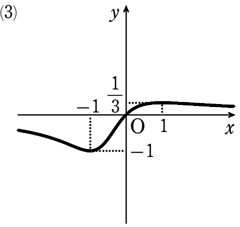
(2)　$a=0$

(3)　$-1\leqq x\leqq1$ で増加，$x\leqq-1$，$1\leqq x$ で減少，

$x=-1$ のとき極小値 -1，

$x=1$ のとき極大値 $\dfrac13$，［図］

(3)



解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{(x^2+x+1)-(x-a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$\qquad\quad=\dfrac{-x^2+2ax+a+1}{(x^2+x+1)^2}$

(2)　$f'(-1)=0$ から　$-1-2a+a+1=0$

ゆえに　$a=0$

逆に，$a=0$ のとき，$x=-1$ で極値をとる．

(3)　$f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$，$f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$

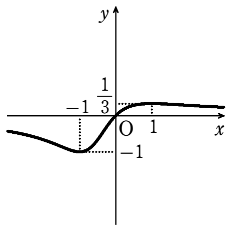
$f'(x)=0$ とおくと　$x=\pm1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -1	↗	極大 $\dfrac13$	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

ゆえに，$-1\leqq x\leqq1$ で増加，$x\leqq-1$，$1\leqq x$ で減少，

$x=-1$ のとき極小値 -1，$x=1$ のとき極大値 $\dfrac13$　［図］



1

解答　(1)　$x=1$ で最大値 1，$x=-1$ で最小値 -1

　(2)　$x=3$ で最大値 1，$x=-3$ で最小値 -1

解説

(1)　この関数の定義域は，$2-x^2\geqq 0$ を解いて　$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ のとき

$$y'=1\cdot\sqrt{2-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{(2-x^2)-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=-\frac{2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}$$

$y'=0$ とすると　$x=\pm1$

$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ における y の増減表は右のようになる。

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

よって，y は　$x=1$ で最大値 1，

$x=-1$ で最小値 -1　をとる。

(2)　$$y'=\frac{6\{(x^2+9)-x\cdot2x\}}{(x^2+9)^2}=-\frac{6(x^2-9)}{(x^2+9)^2}=-\frac{6(x+3)(x-3)}{(x^2+9)^2}$$

$y'=0$ とすると　$x=-3,\ 3$

y の増減表は右のようになる。

また　$\lim_{x\to-\infty}y=0$，$\lim_{x\to\infty}y=0$

したがって　$x=3$　で最大値 1

$x=-3$ で最小値 -1

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$	極大 1	$\searrow$

2

解答　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値 $\sqrt{2}$，$x=-1$ で最小値 -1

解説

この関数の定義域は，$1-x^2\geqq 0$ を解いて　$-1\leqq x\leqq 1$

$$y'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y'=0$ とすると　$\sqrt{1-x^2}=x$　……①

①の両辺を２乗すると　$1-x^2=x^2$　　ゆえに　$x^2=\dfrac{1}{2}$

①より，$x\geqq 0$ であるから　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-1\leqq x\leqq 1$ における y の増減表は右のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'	／	$+$	0	$-$	／
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

よって，y は　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値 $\sqrt{2}$，

$x=-1$ で最小値 -1　をとる。

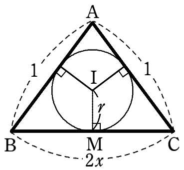
3

解答　(1)　$r=\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$ $(0<x<1)$　　(2)　$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

解説

(1)　三角形が存在する条件は　$1-1<2x<1+1$ から

$0<x<1$



$\triangle$ABC は AB$=$AC$=1$ の二等辺三角形であるから，A から BC に垂線 AM を引くと，M は線分 BC の中点である。

よって　AM$=\sqrt{1-x^2}$

$\triangle$ABC の内心を I とすると

$\triangle$ABC$=\triangle$ABI$+\triangle$BCI$+\triangle$CAI から

$$\frac{1}{2}\cdot2x\cdot\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot r+\frac{1}{2}\cdot2x\cdot r+\frac{1}{2}\cdot1\cdot r$$

$$x\sqrt{1-x^2}=(x+1)r$$

よって　$r=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{x+1}=\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$　$(0<x<1)$

(2)　$r^2=\dfrac{x^2(1-x)}{x+1}$

$f(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{x+1}$ とおくと　$f(x)=\dfrac{-x^3+x^2}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{(-3x^2+2x)(x+1)-(-x^3+x^2)}{(x+1)^2}=-\frac{2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると $0<x<1$ において　$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$0<x<1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき最大となる。

$r>0$ であるから，$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき r も最大となる。

4

解答　$-\sqrt{3}<x<0$，$\sqrt{3}<x$ で下に凸；$x<-\sqrt{3}$，$0<x<\sqrt{3}$ で上に凸；

変曲点は 点 $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

解説

$$y'=\frac{x^2+1-x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

$$y''=-\frac{2x(x^2+1)^2-(x^2-1)\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=-\frac{2x(x^2+1)\{(x^2+1)-2(x^2-1)\}}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$y''=0$ とすると　$x=0,\ \pm\sqrt{3}$

y'' の符号を調べると，常に $(x^2+1)^3>0$ であるから，この曲線の凹凸は次の表のようになる (表の $\cup$ は下に凸，$\cap$ は上に凸を表す)。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cap$	変曲点	$\cup$	変曲点	$\cap$	変曲点	$\cup$

よって　$-\sqrt{3}<x<0$，$\sqrt{3}<x$ で下に凸

$x<-\sqrt{3}$，$0<x<\sqrt{3}$ で上に凸

変曲点は　点 $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

5

解答　(1)　$x<-1$，$1<x$ で上に凸；

$-1<x<1$ で下に凸；変曲点 $(-1,\ \log2)$，

$(1,\ \log2)$；[図]

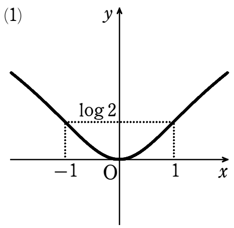
(2)　$x>0$ で下に凸；変曲点はなし；[図]

(3)　$x<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x$ で下に凸；

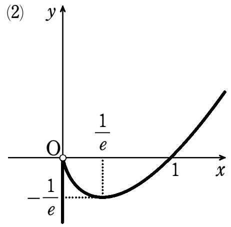
$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ で上に凸；変曲点

$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$；[図]

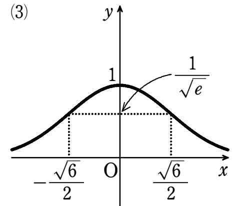
(1)



(2)



(3)



解説

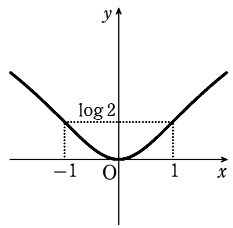
(1)　$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　$x=0$

$y''=0$ とすると　$x=\pm1$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$\log2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\log2$	$\nearrow$



また　$\lim_{x\to-\infty}y=+\infty$，$\lim_{x\to+\infty}y=+\infty$

よって　$x<-1$，$1<x$ で上に凸，$-1<x<1$ で下に凸

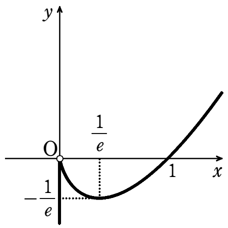
変曲点の座標は　$(-1,\ \log2)$，$(1,\ \log2)$　　グラフは[図]。

(2)　定義域は $x>0$ である。

$y'=\log x+1$，$y''=\dfrac{1}{x}>0$　　$y'=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{e}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$+$
y		↘	$-\frac{1}{e}$	↗



また　　$\displaystyle\lim_{x\to+0} y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y=+\infty$

よって，$x>0$ で下に凸；変曲点はなし；グラフは〔図〕。

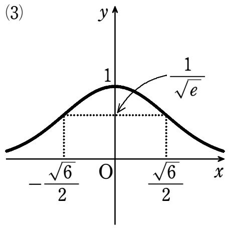
(3)　$y'=-\frac{2}{3}xe^{-\frac{x^2}{3}}$，$y''=-\frac{2}{3}e^{-\frac{x^2}{3}}-\frac{2}{3}x\cdot\left(-\frac{2}{3}xe^{-\frac{x^2}{3}}\right)=\frac{4}{9}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{3}}$

$y'=0$ とすると，$x=0$，$y''=0$ とすると　$x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

(3)



また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y=0$

ゆえに，y 軸は漸近線である。

よって　$x<-\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\frac{\sqrt{6}}{2}<x$ で下に凸，$-\frac{\sqrt{6}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$ で上に凸

変曲点の座標は　$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$　　グラフは〔図〕。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{2}$；$x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $-\frac{9}{2}$

(2)　$x=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=\pm1$ で最小値 0

(3)　$x=3$ で最大値 $\frac{1}{2}$，$x=-\frac{1}{3}$ で最小値 $-\frac{9}{2}$

(4)　$x=2$ で最大値 1，$x=0$ で最小値 -1

(5)　$x=1+\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，$x=1-\sqrt{3}$ で最小値 $-\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)　関数 y の定義域は，$9-x^2\geqq0$ から　　$-3\leqq x\leqq3$

$y'=\sqrt{9-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$

$-3<x<3$ で $y'=0$ とすると

$x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

y の増減表は右のようになる。

x	-3	$\cdots$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	0

よって　$x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{2}$

$x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $-\frac{9}{2}$

(2)　関数の定義域は，$1-x^2\geqq0$ から　　$-1\leqq x\leqq1$

$-1<x<1$ のとき

$y'=1\cdot\sqrt{1-x^2}+(x+1)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{(x+1)(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'=0$ とすると，$-1<x<1$ では　　$x=\frac{1}{2}$

また，$x=\pm1$ のとき　　$y=0$

y の増減表は右のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

よって

$x=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=\pm1$ で最小値 0

(3)　$y'=\frac{3(x^2+1)-(3x-4)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{-(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=-\frac{1}{3}$，3

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-\frac{9}{2}$	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘

また　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=0$

よって　　$x=3$ で最大値 $\frac{1}{2}$，$x=-\frac{1}{3}$ で最小値 $-\frac{9}{2}$

(4)　$y'=\frac{2(x^2-2x+2)-2(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=-\frac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=0$，2

よって，y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	2	$\cdots\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -1	↗	極大 1	↘

また　　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=0$

ゆえに，y は

$x=2$ で最大値 1，

$x=0$ で最小値 -1 をとる。

(5)　$y'=\frac{1\cdot(x^2+2)-(x-1)\cdot2x}{(x^2+2)^2}=-\frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=1\pm\sqrt{3}$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$	↘

また　　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=0$

よって，y は

$x=1+\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，

$x=1-\sqrt{3}$ で最小値 $-\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ をとる。

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=1$ で最大値 1，$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $-\sqrt{2}$

(2)　$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ で最大値 $\sqrt{5}$，$x=-1$ で最小値 -2

解説

(1)　$y=f(x)$ とする。

$1-x^2\geqq0$ であるから，関数の定義域は　　$-1\leqq x\leqq1$

$-1<x<1$ のとき　　$f'(x)=1-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$ とすると

$\sqrt{1-x^2}=-x$ (ただし $x\leqq0$)

両辺を 2 乗して　　$1-x^2=x^2$

$x\leqq0$ であるから　　$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1

よって，$f(x)$ は $x=1$ で最大値 1，$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

(2)　$1-x^2\geqq0$ であるから，定義域は　　$-1\leqq x\leqq1$

$-1<x<1$ のとき　　$y'=2-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'=0$ とすると　　$2\sqrt{1-x^2}=x$　……①

両辺を 2 乗して　　$4(1-x^2)=x^2$

① より，$x\geqq0$ であるから　　$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

よって，y の増減表は右のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	$\sqrt{5}$	↘	2

したがって　　$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ で最大値 $\sqrt{5}$，$x=-1$ で最小値 -2

3

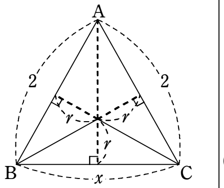
解答　(1) $\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}$　(2) $x=2\sqrt{5}-2$ のとき最大値 $(10\sqrt{5}-22)\pi$

解説

(1) 三角形が存在する条件は　$2-2<x<2+2$ から

$0<x<4$

内接円の半径を r，$\triangle ABC$ の面積を S とする。



$$S=\frac{1}{2}\cdot 2r+\frac{1}{2}\cdot 2r+\frac{1}{2}\cdot xr=\frac{x+4}{2}r$$

一方　$S=\dfrac{1}{2}\cdot x\sqrt{2^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{16-x^2}{4}}$

よって　$\dfrac{x+4}{2}r=\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{16-x^2}{4}}$

したがって　$r=\dfrac{x}{x+4}\sqrt{\dfrac{16-x^2}{4}}=\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}$

(2) 内接円の面積を T とすると

$$T=\pi r^2=\pi\cdot\frac{x^2}{4}\cdot\frac{4-x}{4+x}=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3-4x^2}{x+4}$$

$$T'=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(3x^2-8x)(x+4)-(x^3-4x^2)}{(x+4)^2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x(x^2+4x-16)}{(x+4)^2}$$

$T'=0$ とおくと　$x=0,\ -2\pm2\sqrt{5}$

$0<x<4$ における T の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$2\sqrt{5}-2$	$\cdots$	4
T'	／	$+$	0	$-$	／
T	／	↗	極大	↘	／

増減表から，T は $x=2\sqrt{5}-2$ のとき極大かつ最大になる。

最大値は

$$-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(2\sqrt{5}-2)^3-4(2\sqrt{5}-2)^2}{2\sqrt{5}-2+4}=(10\sqrt{5}-22)\pi$$

4

解答　(1) $x<-1,\ 0<x$ で下に凸；$-1<x<0$ で上に凸；変曲点は 点 $(-1,\ 1)$，$(0,\ 2)$

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi<x<\pi$ で上に凸；$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$ で下に凸；変曲点は

点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$

(3) $x<-2$ で上に凸，$-2<x$ で下に凸；変曲点は 点 $(-2,\ -2e^{-2})$

(4) $x<-1,\ 0<x$ で下に凸；$-1<x<0$ で上に凸；変曲点は 点 $(-1,\ 0)$

解説

(1) $y'=4x^3+6x^2$，$y''=12x^2+12x=12x(x+1)$

$y''=0$ とすると　$x=-1,\ 0$

y'' の符号を調べると，この曲線の凹凸は右の表のようになる (ただし，表の ∪ は下に凸，∩ は上に凸を表す。以下同じ)。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	∪	変曲点	∩	変曲点	∪

よって　$x<-1,\ 0<x$ で下に凸，$-1<x<0$ で上に凸；

変曲点は　点 $(-1,\ 1)$，$(0,\ 2)$

(2) $y'=1-2\sin 2x$，　$y''=-4\cos 2x$

$y''=0$ とすると，$0\leqq x\leqq\pi$ より $0\leqq 2x\leqq 2\pi$ であるから

$2x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

y'' の符号を調べると，この曲線の凹凸は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	∩	変曲点	∪	変曲点	∩	$\pi+1$

よって　$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi<x<\pi$ で上に凸，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$ で下に凸；

変曲点は　点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$

(3) $y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，$y''=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$y''=0$ とすると，$e^x>0$ であるから　$x=-2$

y'' の符号を調べると，この曲線の凹凸は右の表のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	∩	変曲点	∪

よって　$x<-2$ で上に凸，$-2<x$ で下に凸；

変曲点は　点 $(-2,\ -2e^{-2})$

(4) 定義域は $x\neq 0$ である。

$$y'=2x-\frac{1}{x^2},\quad y''=2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$$

$y''=0$ とすると　$x=-1$

y'' の符号を調べると，この曲線の凹凸は右の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	／	$+$
y	∪	変曲点	∩	／	∪

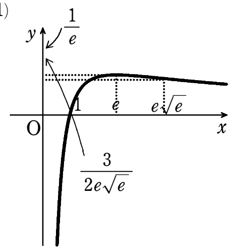
よって　$x<-1,\ 0<x$ で下に凸，

$-1<x<0$ で上に凸；

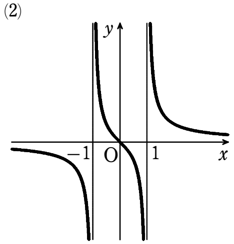
変曲点は　点 $(-1,\ 0)$

5

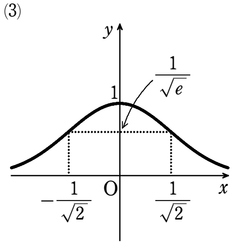
解答　(1)



(2)



(3)



解説

(1) 定義域は $x>0$ である。

$$y'=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$y''=\frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

$y'=0$ とすると　$x=e$

$y''=0$ とすると　$x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

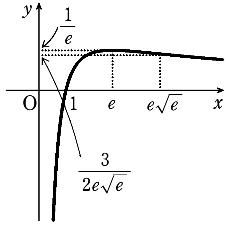
y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	／	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	／	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=-\infty$ であるから，y 軸はこの曲線の漸近線である。

更に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=0$ であるから，x 軸もこの曲線の漸近線である。

よって，グラフは [図]。



(2) この関数の定義域は　$x\neq-1,\ x\neq1$

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

$$y''=-\frac{2x\cdot(x^2-1)^2-(x^2+1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$y''=0$ とすると　$x=0$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	／	$-$	$-$	$-$	／	$-$
y''	$-$	／	$+$	0	$-$	／	$+$
y	↘	／	↘	0	↘	／	↘

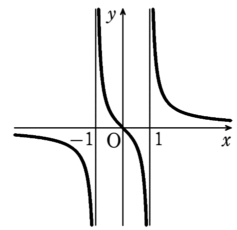
また　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}y=-\infty,\ \lim_{x\to-1+0}y=\infty,$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}y=-\infty,\ \lim_{x\to1+0}y=\infty,$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=0,\ \lim_{x\to\infty}y=0$

であるから，2 直線 $x=-1$，$x=1$ と x 軸は漸近線である。

したがって，グラフは右の図のようになる。



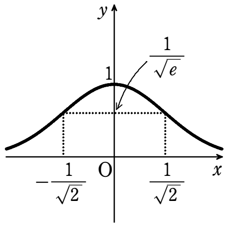
(3) $y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=-2\left\{1\cdot e^{-x^2}+x\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)\right\}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$y'=0$ とすると　$x=0$

$y''=0$ とすると　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↘



また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=0$

よって，x 軸は漸近線である。

したがって，グラフは右の図のようになる。

1

解答　(1)　$x=2$ で最大値 2，$x=-\sqrt{2}$ で最小値 $-2\sqrt{2}$

(2)　$x=-1+\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，$x=-1-\sqrt{2}$ で最小値 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

(3)　$x=0$ で最小値 0，最大値はない

(4)　$x=\pi$ で最大値 $\pi-1$，$x=1$ で最小値 $\sin 1$

(5)　$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $3\sqrt{2}$；$x=-3$ のとき最小値 -3

(6)　最大値はなし；$x=\dfrac{1}{e}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{e}$

(7)　最大値はなし；$x=\dfrac{1}{3}\log 2$ のとき最小値 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

(8)　最大値はなし；$x=1$ のとき最小値 $3\sqrt{2}$

(9)　$x=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\sqrt{2}$，$x=1$，2 で最小値 1

(10)　$x=e$ で最小値 $-e$，最大値はない

解説

(1)　関数の定義域は，$4-x^2\geqq 0$ より　　$-2\leqq x\leqq 2$

$-2<x<2$ において

$$y'=1-\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$y'=0$ とすると　　$\sqrt{4-x^2}=-x$　……①

両辺を２乗して　　$4-x^2=x^2$

すなわち　　$x^2=2$　これを解いて　$x=\pm\sqrt{2}$

このうち，① を満たすのは　　$x=-\sqrt{2}$

y の増減表は右のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'	／	$-$	0	$+$	／
y	-2	↘	極小 $-2\sqrt{2}$	↗	2

よって，y は $x=2$ で最大値 2，$x=-\sqrt{2}$ で最小値 $-2\sqrt{2}$ をとる。

(2)　$$y'=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$$

$y'=0$ となる x の値は　　$x=-1\pm\sqrt{2}$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大	↘

$x=-1-\sqrt{2}$ のとき　$y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

$x=-1+\sqrt{2}$ のとき　$y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=0$

よって，y は

$x=-1+\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，$x=-1-\sqrt{2}$ で最小値 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

をとる。

(3)　$x\geqq 0$ のとき　　$y=xe^x$

$x>0$ において　　$y'=(x+1)e^x>0$

$x<0$ のとき　　$y=-xe^x$

$y'=-(x+1)e^x$

$y'=0$ となる x の値は　　$x=-1$

以上から，y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$+$
y	↗	極大 $\dfrac{1}{e}$	↘	極小 0	↗

また，$x<-1$ のとき $0<y<\dfrac{1}{e}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\infty$

よって，y は $x=0$ で最小値 0 をとる。最大値はない。

(4)　$y'=-\cos x-(1-x)\sin x+\cos x$

$=(x-1)\sin x$

$0<x<\pi$ で $y'=0$ となる x の値は　　$x=1$

y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	π
y'	／	$-$	0	$+$	／
y	1	↘	極小	↗	$\pi-1$

$x=1$ のとき $y=\sin 1$，$1<\pi-1$

よって，y は $x=\pi$ で最大値 $\pi-1$，$x=1$ で最小値 $\sin 1$ をとる。

(5)　定義域は $9-x^2\geqq 0$ から　$-3\leqq x\leqq 3$

$$y'=1-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$-3<x<3$ において　$y'=0$ とすると

$\sqrt{9-x^2}-x=0$

よって　$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

y の増減表は右のようになる。

x	-3	$\cdots$	$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	3
y'	／	$+$	0	$-$	／
y	-3	↗	$3\sqrt{2}$	↘	3

よって　　$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき　最大値 $3\sqrt{2}$

$x=-3$ のとき　最小値 -3

(6)　定義域は　$x>0$

$$y'=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$x>0$ において　$y'=0$ とすると

$\log x+1=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{e}$

y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\infty$

よって　最大値はなし

$x=\dfrac{1}{e}$ のとき　最小値 $-\dfrac{1}{e}$

(7)　$$y'=e^x-2e^{-2x}=\frac{e^{3x}-2}{e^{2x}}$$

$y'=0$ とすると　$e^{3x}-2=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{3}\log 2$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}\log 2$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	$\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$	↗

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\infty$

よって　最大値はなし

$x=\dfrac{1}{3}\log 2$ のとき　最小値 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

(8)　$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

$y'=0$ とすると　$x\sqrt{(x-3)^2+4}=-(x-3)\sqrt{x^2+1}$　……①

両辺を平方して整理すると　$x^2+2x-3=0$　　よって　$x=-3$，1

このうち，① を満たすのは　$x=1$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	$3\sqrt{2}$	↗

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\infty$

よって　最大値はなし

$x=1$ のとき　最小値 $3\sqrt{2}$

(9)　関数 y の定義域は，$x-1\geqq 0$，$2-x\geqq 0$ から　　$1\leqq x\leqq 2$

$1<x<2$ のとき

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{2-x-(x-1)}{2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}(\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\frac{3-2x}{2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}(\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1})}\quad\cdots\cdots ①$$

① において分母は正であるから，$y'=0$ とすると　　$x=\dfrac{3}{2}$

よって，y の増減表は右のようになる。

ゆえに，y は

$x=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\sqrt{2}$，

$x=1$，2 で最小値 1 をとる。

x	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
y'	／	$+$	0	$-$	／
y	1	↗	極大 $\sqrt{2}$	↘	1

(10)　関数 y の定義域は　　$x>0$

$$y'=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}-2=\log x-1$$

$y'=0$ とすると　　$\log x=1$

ゆえに　　$x=e$

よって，y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y		↘	極小 $-e$	↗

ここで　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} x(\log x-2)=\infty$

ゆえに，y は $x=e$ で最小値 $-e$ をとる。

また，最大値はない。

2

解答　$a=3$

解説

$$f(x)=\frac{a\sin x}{\cos x+2}\quad(0\leqq x\leqq \pi)$$

$$f'(x)=\frac{a\{\cos x(\cos x+2)-\sin x(-\sin x)\}}{(\cos x+2)^2}=\frac{a(2\cos x+1)}{(\cos x+2)^2}$$

[1]　$a=0$ のとき

常に $f(x)=0$ から，不適。

[2]　$a>0$ のとき

増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

ゆえに，最大値は　　$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{-\frac{1}{2}+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

よって　　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$

したがって　　$a=3$　　　　これは $a>0$ を満たす。

[3]　$a<0$ のとき

増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	0

ゆえに，最大値は　　$f(0)=f(\pi)=0$

よって，不適。

[1]～[3] から　　$a=3$

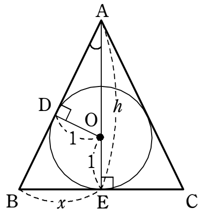
3

解答　(1)　$\dfrac{2x^2}{x^2-1}$　　(2)　$\dfrac{8}{3}\pi$

解説

(1)　直円錐の高さを h とする。

球の中心を O として，直円錐をその頂点と底面の円の中心を通る平面で切ったとき，切り口の △ABC，および球と △ABC との接点 D，E を右の図のように定める。



△ABE∽△AOD であるから

$$\mathrm{AE}:\mathrm{AD}=\mathrm{BE}:\mathrm{OD}$$

ここで　　$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AO}^2-\mathrm{OD}^2}=\sqrt{(h-1)^2-1^2}$

$=\sqrt{h^2-2h}$

よって　　$h:\sqrt{h^2-2h}=x:1$

$x>1$ であるから　　$h=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

(2)　体積を V とすると　　$V=\dfrac{\pi}{3}x^2h=\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{x^4}{x^2-1}$　$(x>1)$

$$V'=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{4x^3(x^2-1)-x^4\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{x^3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2-1)^2}$$

$V'=0$ とすると　　$x=\sqrt{2}$

よって，V は右の増減表から $x=\sqrt{2}$ で最小値 $\dfrac{8}{3}\pi$ をとる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
V'	／	$-$	0	$+$
V		↘	$\frac{8}{3}\pi$	↗

4

解答　$a<3$ のとき 2 個，$a\geqq 3$ のとき 0 個

解説

$$y'=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x=(x^2+4x+a+2)e^x$$

$$y''=(2x+4)e^x+(x^2+4x+a+2)e^x=(x^2+6x+a+6)e^x$$

$e^x>0$ であるから，$y''=0$ とすると　$x^2+6x+a+6=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=3^2-1\cdot(a+6)=3-a$

$D>0$ すなわち $a<3$ のとき，$y''=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，その解の前後で y'' の符号が変わるから，変曲点は 2 個になる。

$D\leqq 0$ すなわち $a\geqq 3$ のとき，常に $y''\geqq 0$ となるから，曲線は常に下に凸で，変曲点をもたない。

したがって，変曲点の個数は　$a<3$ のとき　2 個，$a\geqq 3$ のとき　0 個

5

解答　グラフは [図]。変曲点は

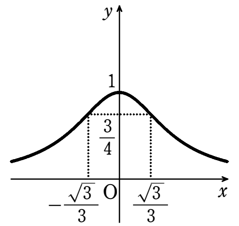
(1)　$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　(2)　$(-1,\ -1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$

(3)　$(-1,\ \log 2)$，$(1,\ \log 2)$　　(4)　$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

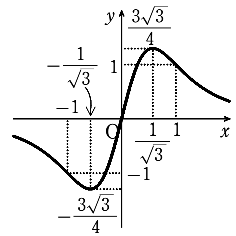
(5)　$\left(-\dfrac{7}{2},\ 22e^{-\frac{7}{2}}\right)$，$(-1,\ 2e^{-1})$

(6)　$\left(\sqrt[6]{e^5},\ \dfrac{5}{6e\sqrt[3]{e^2}}\right)$

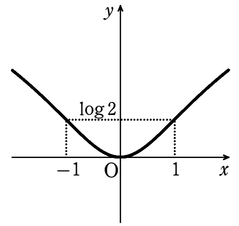
(1)



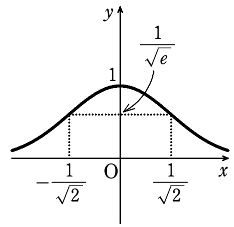
(2)



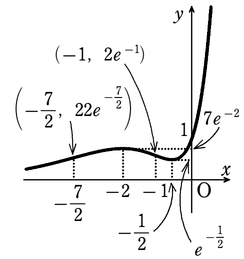
(3)



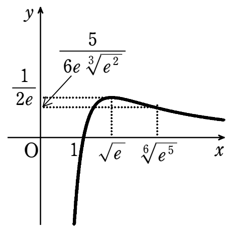
(4)



(5)



(6)



解説

(1)　$y'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=0$

y''

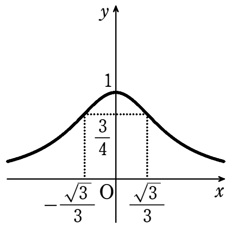
$$=-2\cdot\frac{(x^2+1)^2-x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	変曲点 $\frac{3}{4}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{3}{4}$	↘

グラフは y 軸に関して対称である。
y の増減とグラフの凹凸は右上の表のようになる。
よって，グラフは右の図のようになる。

変曲点は　$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$

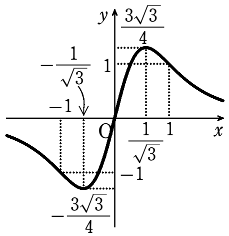


(2)　$y=4x(x^2+1)^{-2}$ であるから

$$y'=4(x^2+1)^{-2}+4x\{-2(x^2+1)^{-3}\cdot 2x\}$$
$$=4(-3x^2+1)(x^2+1)^{-3}=-\frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$
$$y''=-24x(x^2+1)^{-3}+4(-3x^2+1)\{-3(x^2+1)^{-4}\cdot 2x\}$$
$$=48x(x^2-1)(x^2+1)^{-4}=\frac{48x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$$

グラフは原点に関して対称である。
$x\geqq 0$ の範囲で y の増減とグラフの凹凸は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	4	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	変曲点 0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	変曲点 1	↘

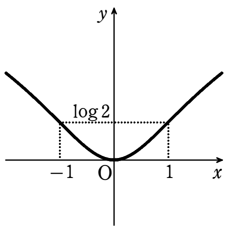


よって，グラフは右の図のようになる。
変曲点は　$(-1,\ -1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$

(3)　$y'=\frac{2x}{1+x^2}$，$y''=2\cdot\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=-\frac{2(x+1)(x-1)}{(1+x^2)^2}$

グラフは y 軸に関して対称である。
y の増減とグラフの凹凸は次の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	変曲点 $\log 2$	↘	極小 0	↗	変曲点 $\log 2$	↗



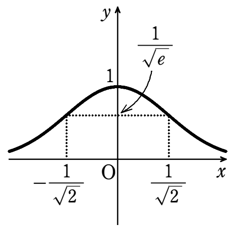
よって，グラフは右の図のようになる。
変曲点は　$(-1,\ \log 2)$，$(1,\ \log 2)$

(4)　$y'=-2xe^{-x^2}$

$$y''=-2e^{-x^2}-2x\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)=2(2x^2-1)e^{-x^2}=4\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$$

グラフは y 軸に関して対称である。
y の増減とグラフの凹凸は次の表のようになる。また　$\lim\limits_{x\to\infty}y=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘



以上から，グラフは右の図のようになる。

変曲点は　$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

(5)　$y'=(4x+1)e^x+(2x^2+x+1)e^x=(2x^2+5x+2)e^x=(x+2)(2x+1)e^x$

$y'=0$ とすると　$x=-2,\ -\frac{1}{2}$

また　$y''=(4x+5)e^x+(2x^2+5x+2)e^x=(x+1)(2x+7)e^x$

$y''=0$ とすると　$x=-1,\ -\frac{7}{2}$

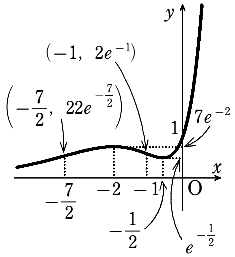
y の増減とグラフの凹凸は次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{7}{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	変曲点 $22e^{-\frac{7}{2}}$	↗	極大 $7e^{-2}$	↘	変曲点 $2e^{-1}$	↘	極小 $e^{-\frac{1}{2}}$	↗

ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x+1}{e^{-x}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{e^{-x}}=0$$

よって，x 軸が漸近線である。
また　$\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$
以上から，グラフは右の図のようになる。



変曲点は

$$\left(-\frac{7}{2},\ 22e^{-\frac{7}{2}}\right),\ (-1,\ 2e^{-1})$$

(6)　真数 >0，分母 $\neq 0$ から関数 y の定義域は　$x>0$

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\log x}{x^3}=(1-2\log x)x^{-3}$$
$$y''=-2x^{-1}\cdot x^{-3}+(1-2\log x)\cdot(-3x^{-4})$$
$$=(-5+6\log x)x^{-4}=\frac{-5+6\log x}{x^4}$$

$y'=0$ とすると　$x=\sqrt{e}$

$y''=0$ とすると　$x=\sqrt[6]{e^5}$

y の増減とグラフの凹凸は右の表のようになる。

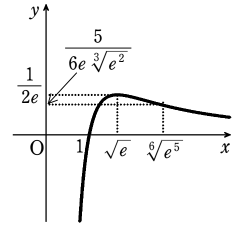
x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	$\sqrt[6]{e^5}$	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	／	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	／	↗	極大 $\frac{1}{2e}$	↘	変曲点	↘

ここで　$\lim\limits_{x\to+0}y=-\infty$
また，ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

よって，y 軸と x 軸が漸近線である。
以上から，グラフは右の図のようになる。

変曲点は　$\left(\sqrt[6]{e^5},\ \frac{5}{6e\sqrt[3]{e^2}}\right)$



1

解答　$-2<a<2$；$x=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{a+2}$，$x=-1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{a-2}$

解説

$x^2+ax+1=0$ が実数解 $x=\alpha$ をもつとすると $\displaystyle\lim_{x\to\alpha+0} f(x)=\infty$ または $\displaystyle\lim_{x\to\alpha+0} f(x)=-\infty$

となり，最大値または最小値をもたない。

よって，最大値と最小値をもつためには，$x^2+ax+1=0$ の判別式 D が負となることが必要である。

したがって，$D=a^2-4<0$ から　$-2<a<2$

このとき

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+ax+1)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+ax+1)^2}$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

また　　$f(-1)=\dfrac{1}{a-2}<0$，$f(1)=\dfrac{1}{a+2}>0$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+a+\frac{1}{x}}=0$ より，$f(x)$ は $-2<a<2$ のとき最大値と最小値をもち，

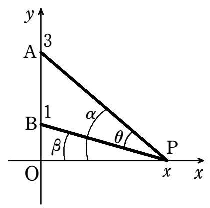
最大値は $f(1)=\dfrac{1}{a+2}$，最小値は $f(-1)=\dfrac{1}{a-2}$

2

解答　$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

解説

$\angle\mathrm{APO}=\alpha$，$\angle\mathrm{BPO}=\beta$ とおくと　条件から



$$\tan\alpha=\frac{3}{x},\ \tan\beta=\frac{1}{x}$$

また　$\theta=\alpha-\beta$

よって　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{x}}=\frac{2x}{x^2+3}$$

$\dfrac{2x}{x^2+3}=y$ とおくと

$$y'=\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)'=\frac{2(x^2+3)-2x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{2(3-x^2)}{(x^2+3)^2}=\frac{2(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)}{(x^2+3)^2}$$

$x>0$ において，$y'=0$ とすると $x=\sqrt{3}$

よって増減表は右のようになるから，$x=\sqrt{3}$ のとき y は最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$
y		↗	極大	↘

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\tan\theta$ が最大のとき θ も最大となり，

このときの点 P の座標は $(\sqrt{3},\ 0)$

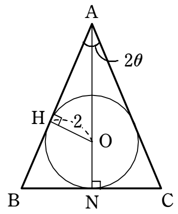
また，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

3

解答　1 辺の長さが $4\sqrt{3}$ の正三角形

解説

半径 2 の円に外接する二等辺三角形を △ABC とし，AB＝AC とする。



また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

円の中心を O とし，O から辺 AB に垂線 OH を下ろす。

直線AO と BC の交点を N とすると，AN⊥BC となる。

$$\mathrm{AH}=\mathrm{OH}\cdot\frac{1}{\tan\theta}=\frac{2}{\tan\theta}$$

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OH}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$$

△OAH∽△BAN であるから，BH＝x とおくと

$$\left(x+\frac{2}{\tan\theta}\right):\left(\frac{2}{\sin\theta}+2\right)=\frac{2}{\sin\theta}:\frac{2}{\tan\theta}$$

よって　$x=\dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{2}{\cos\theta}-\dfrac{2}{\tan\theta}$

$$\mathrm{AB}=x+\mathrm{AH}=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{2}{\cos\theta}=\frac{4(1+\sin\theta)}{\sin 2\theta}$$

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{16(1+\sin\theta)^2}{\sin^2 2\theta}\cdot\sin 2\theta=\frac{8(1+\sin\theta)^2}{\sin 2\theta}$$

$$S'=\frac{16(1+\sin\theta)\cos\theta\cdot\sin 2\theta-8(1+\sin\theta)^2\cdot\cos 2\theta\cdot 2}{\sin^2 2\theta}$$

$$=\frac{16(1+\sin\theta)\{\cos\theta\cdot\sin 2\theta-(1+\sin\theta)\cos 2\theta\}}{\sin^2 2\theta}$$

$$=\frac{16(1+\sin\theta)(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)}{\sin^2 2\theta}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$S'=0$ とすると　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって，増減表は次のようになるから，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき面積が最小となる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'	／	$-$	0	$+$	／
S		↘	極小	↗	

このとき　$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{3}$

$$\mathrm{AB}=\frac{4(1+\sin\theta)}{\sin 2\theta}=\frac{4\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$$

よって，1 辺の長さが $4\sqrt{3}$ の正三角形となる。

4

解答　略

解説

真数の条件から　　$\dfrac{x+a}{3a-x}>0$

両辺に $(3a-x)^2>0$ を掛けて　　$(x+a)(3a-x)>0$

よって　　$(x+a)(x-3a)<0$

$a>0$ であるから，$f(x)$ の定義域は　　$-a<x<3a$

ゆえに　　$f(x)=\log(x+a)-\log(3a-x)$

$$f'(x)=\frac{1}{x+a}-\frac{-1}{3a-x}=\frac{1}{x+a}+\frac{1}{3a-x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{-1}{(3a-x)^2}=\frac{-(3a-x)^2+(x+a)^2}{(x+a)^2(3a-x)^2}=\frac{8a(x-a)}{(x+a)^2(3a-x)^2}$$

$f''(x)=0$ とすると　　$x=a$

よって，$y=f(x)$ のグラフの凹凸は右の表のようになり，変曲点を P とすると

x	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$	$3a$
$f''(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$f(x)$		上に凸	0	下に凸	

$\mathrm{P}(a,\ 0)$

次に，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-a$ だけ平行移動したグラフを表す関数を $g(x)$ とすると　$g(x)=\log\dfrac{\{x-(-a)\}+a}{3a-\{x-(-a)\}}=\log\dfrac{x+2a}{2a-x}$

ここで　　$g(-x)=\log\dfrac{-x+2a}{2a-(-x)}=\log\left(\dfrac{x+2a}{2a-x}\right)^{-1}=-\log\dfrac{x+2a}{2a-x}=-g(x)$

ゆえに，$y=g(x)$ のグラフは原点に関して対称である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは変曲点 P に関して対称である。

別解　（変曲点を求めるまでは同じ）

曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点を $\mathrm{Q}(s,\ t)$，変曲点 P に関して Q と対称な点を $\mathrm{Q}'(u,\ v)$ とすると　　$\dfrac{s+u}{2}=a$，$\dfrac{t+v}{2}=0$

よって　　$\begin{cases} s=2a-u \\ t=-v \end{cases}$　……①

$\mathrm{Q}(s,\ t)$ は曲線 $y=f(x)$ 上にあるから

$t=f(s)$　すなわち　$t=\log\dfrac{s+a}{3a-s}$

① を代入すると　　$-v=\log\dfrac{(2a-u)+a}{3a-(2a-u)}$

ゆえに　　$v=-\log\dfrac{3a-u}{a+u}=\log\dfrac{a+u}{3a-u}=f(u)$

よって，点 Q′ は曲線 $y=f(x)$ 上にある。

したがって，$y=f(x)$ のグラフは変曲点 P に関して対称である。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=1,\ y=2x+2$　　(2)　$y=0,\ y=2x$

解説

(1)　$y=\dfrac{2x^2+3}{x-1}=2x+2+\dfrac{5}{x-1}$

定義域は，$x-1\neq 0$ から　　$x\neq 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} y=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0} y=\infty$ であるから，直線 $x=1$ は漸近線である。

また　　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(2x+2)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-1}=0$

よって，直線 $y=2x+2$ は漸近線である。

以上から，漸近線の方程式は　　$x=1,\ y=2x+2$

(2)　定義域は，$x^2-9\geqq 0$ から　　$x\leqq -3,\ 3\leqq x$

定義域では，この関数は連続であるから，x 軸に垂直な漸近線はない。

また　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x+\sqrt{x^2-9}}=0$

ゆえに，直線 $y=0$ (x 軸) は漸近線である。

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left\{x-(-x)\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)=2$

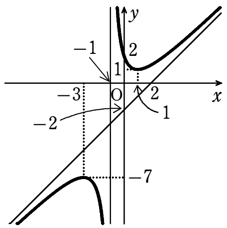
ゆえに　　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(y-2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{x^2-9}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{-x+\sqrt{x^2-9}}=0$

よって，直線 $y=2x$ は漸近線である。

以上から，漸近線の方程式は　　$y=0,\ y=2x$

$\boxed{2}$

解答　〔図〕



解説

関数 y の定義域は　　$x\neq -1$

$y=\dfrac{(x+1)(x-2)+4}{x+1}=x-2+\dfrac{4}{x+1}$ であるから

$y'=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2},\quad y''=\dfrac{8}{(x+1)^3}$

$y'=0$ とすると　　$x=-3,\ 1$

よって，y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	……	-3	……	-1	……	1	……
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 -7	↘	／	↘	極小 1	↗

また　　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0} y=\lim_{x\to-1+0}\left(x-2+\frac{4}{x+1}\right)=\infty,$

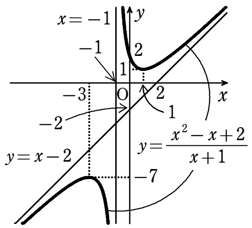
$\displaystyle\lim_{x\to-1-0} y=-\infty$

ゆえに，直線 $x=-1$ はこの曲線の漸近線である。

更に　　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(x-2)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+1}=0$

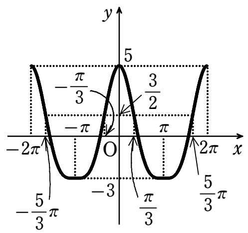
よって，直線　$y=x-2$　もこの曲線の漸近線である。

以上から，グラフの概形は右図のようになる。



$\boxed{3}$

解答　〔図〕



解説

$y=f(x)$ とすると，$f(-x)=f(x)$ であるから，グラフは y 軸に関して対称である。

$y'=-4\sin x-2\sin 2x=-4\sin x-2\cdot 2\sin x\cos x$

$=-4\sin x(\cos x+1)$

$y''=-4\cos x-4\cos 2x=-4\{\cos x+(2\cos^2 x-1)\}$

$=-4(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$0<x<2\pi$ において，　$y'=0$ となる x の値は，$\sin x=0$ または　$\cos x+1=0$ から

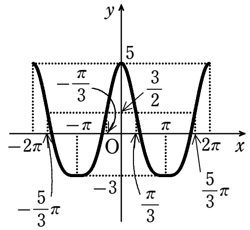
$x=\pi$

$y''=0$ となる x の値は，$\cos x+1=0$　または　$2\cos x-1=0$ から　　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減，凹凸は，次の表のようになる。

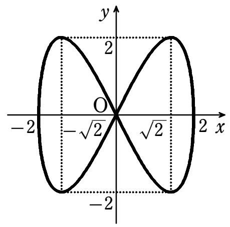
x	0	…	$\dfrac{\pi}{3}$	…	π	…	$\dfrac{5}{3}\pi$	…	2π
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y''		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
y	5	↘	$\dfrac{3}{2}$	↘	-3	↗	$\dfrac{3}{2}$	↗	5

ゆえに，グラフの対称性により，求めるグラフは右図。



$\boxed{4}$

解答　〔図〕



解説

この関数の定義域は，$4-x^2\geqq 0$ を解いて　　$-2\leqq x\leqq 2$

$F(x,\ y)=y^2-x^2(4-x^2)$ とおくと

$F(x,\ -y)=F(x,\ y),\quad F(-x,\ y)=F(x,\ y),$

$F(-x,\ -y)=F(x,\ y)$

よって，曲線 $F(x,\ y)=0$ は x 軸，y 軸，原点に関して対称である。

まず，$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ の範囲で考える。

このとき，$y^2=x^2(4-x^2)$ から　　$y=x\sqrt{4-x^2}$

$0\leqq x<2$ のとき

$y'=1\cdot\sqrt{4-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

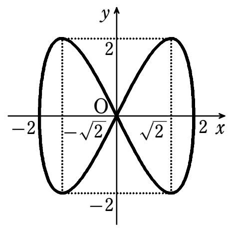
$y''=\dfrac{-4x\sqrt{4-x^2}-2(2-x^2)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=\dfrac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	0	⋯	$\sqrt{2}$	⋯	2
y'	$+$	$+$	0	$-$	／
y''	0	$-$	$-$	$-$	／
y	0	↗	2	↘	0

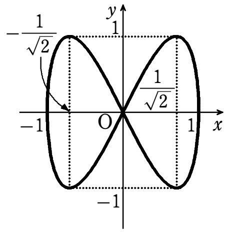
また　　$\displaystyle\lim_{x\to+0} y'=2,\ \lim_{x\to 2-0} y'=-\infty$

以上により，対称性を考えて，曲線は右の図のようになる。



5

解答　〔図〕



解説

$\cos\theta$，$\sin 2\theta$ の周期はそれぞれ 2π，π である。

$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とすると，$f(-\theta)=f(\theta)$，$g(-\theta)=-g(\theta)$ であるから，曲線は x 軸に関して対称である。したがって，$0\leqq\theta\leqq\pi$ …… ① の範囲で考える。

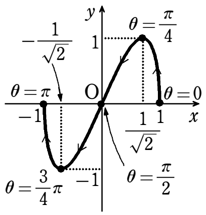
$$f'(\theta)=-\sin\theta,\quad g'(\theta)=2\cos 2\theta$$

① の範囲で $f'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　　$\theta=0,\ \pi$

$g'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

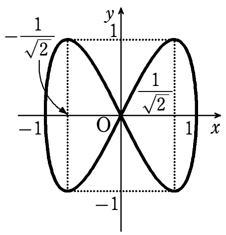
① の範囲における θ の値の変化に対応した x，y の値の変化は次の表のようになる。

θ	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{3}{4}\pi$	…	π
$f'(\theta)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
x	1	←	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	←	0	←	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	←	-1
$g'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	0	↑	1	↓	0	↓	-1	↑	0



よって，対称性を考えると，曲線の概形は，右下の図。

注意　表の ← は x の値が減少することを表す。また，↑，↓ はそれぞれ y の値が増加，減少することを表す。



1

解答　(1)　$y=x+1$，$x=1$　　(2)　$y=0$，$x=0$，$x=3$　　(3)　$y=2x$，$y=0$

(4)　$y=3x$，$y=x$

解説

(1)　$y=\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x-1}=1$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\{y-(x+1)\}=0$ であるから，直線 $y=x+1$ が漸近線。

$\lim\limits_{x\to1-0}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to1+0}y=\infty$ であるから，直線 $x=1$ が漸近線。

(2)　$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{3}{x}}=0$

であるから，直線 $y=0$ が漸近線。

$\lim\limits_{x\to-0}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to+0}y=-\infty$ であるから，直線 $x=0$ が漸近線。

$\lim\limits_{x\to3-0}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to3+0}y=\infty$ であるから，直線 $x=3$ が漸近線。

(3)　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2$

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

よって，直線 $y=2x$ が漸近線。

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0$

よって，直線 $y=0$ が漸近線。

(4)　定義域は，$x^2-1\geqq0$ から　　$x\leqq-1$，$1\leqq x$

定義域では，この関数は連続であるから，x 軸に垂直な漸近線はない。

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=3$ から

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

よって，直線 $y=3x$ は漸近線である。

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=1$ から

$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0$

よって，直線 $y=x$ は漸近線である。

以上から，漸近線の方程式は　　$y=3x$，$y=x$

参考　$|x|$ が十分大きいとき　　$\sqrt{x^2-1}\fallingdotseq\sqrt{x^2}=|x|$

よって　　$y\fallingdotseq2x+|x|$

したがって　　$x>0$ のとき　$y\fallingdotseq3x$

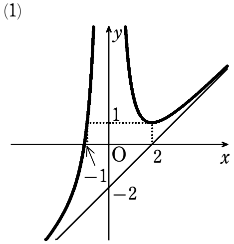
$x<0$ のとき　$y\fallingdotseq x$

以上から，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-3x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)$ を計算して漸近線を求めてもよい。

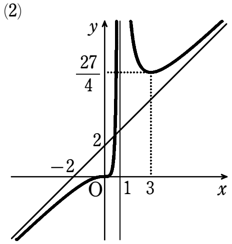
2

解答

(1)



(2)



解説

(1)　この関数の定義域は　$x\neq0$

$y=x-2+\frac{4}{x^2}$ であるから　　$y'=1-\frac{8}{x^3}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

$$y''=\frac{24}{x^4}$$

$y'=0$ とすると　　$x=2$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	…	0	…	2	…
y'	$+$	／	$-$	0	$+$
y''	$+$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	／	↘	1	↗

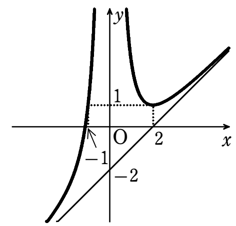
また　　$\lim\limits_{x\to0}y=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\{y-(x-2)\}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\{y-(x-2)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$

であるから，y 軸と直線 $y=x-2$ は漸近線である。

したがって，グラフは右の図のようになる。



(2)　この関数の定義域は　$x\neq1$

$$y'=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$$y''=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-x^2(x-3)\cdot3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{6x}{(x-1)^4}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 3$

$y''=0$ とすると　　$x=0$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	…	0	…	1	…	3	…
y'	$+$	0	$+$	／	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	0	↗	／	↘	$\frac{27}{4}$	↗

また　$\lim_{x\to1}y=\infty$

よって，直線 $x=1$ は漸近線である。

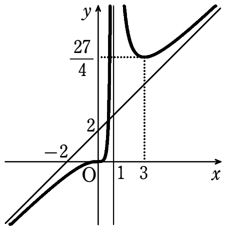
$y=x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}\{y-(x+2)\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\{y-(x+2)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=0$$

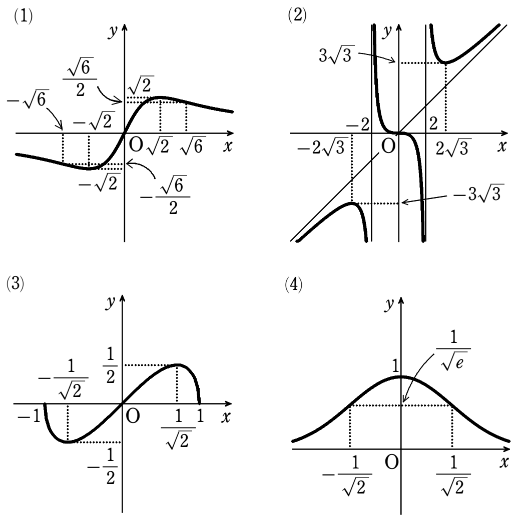
よって，直線 $y=x+2$ も漸近線である。

したがって，グラフは右の図のようになる。



3

解答



解説

1)　奇関数であるから，グラフは原点に関して対称である。

$$y'=\frac{4(x^2+2)-4x\cdot2x}{(x^2+2)^2}=-\frac{4(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$

$$y''=-\frac{8x(x^2+2)^2-4(x^2-2)\cdot2(x^2+2)\cdot2x}{(x^2+2)^4}=\frac{8x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}$$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{2}$

$y''=0$ とすると　　$x=0,\ \pm\sqrt{6}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	↘

また　$\lim_{x\to-\infty}y=0,\ \lim_{x\to\infty}y=0$

よって，直線 $y=0$ は漸近線である。ゆえに，グラフは [図] のようになる。

(2)　この関数の定義域は，$x^2-4\neq0$ から　　$x\neq\pm2$

奇関数であるから，グラフは原点に関して対称である。

$$y'=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3\cdot2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$$y''=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-(x^4-12x^2)\cdot2(x^2-4)\cdot2x}{(x^2-4)^4}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ \pm2\sqrt{3}$

$y''=0$ とすると　　$x=0$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	／	$+$	0	$-$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	／	↘	0	↘	／	↘	$3\sqrt{3}$	↗

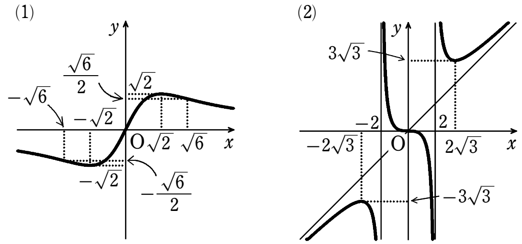
$y=x+\frac{4x}{x^2-4}$ であるから　　$\lim_{x\to-2-0}y=-\infty,\ \lim_{x\to-2+0}y=\infty,$

$\lim_{x\to2-0}y=-\infty,\ \lim_{x\to2+0}y=\infty,$

$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=0,\ \lim_{x\to\infty}(y-x)=0$

よって，3 直線 $x=-2$，$x=2$，$y=x$ は漸近線である。

ゆえに，グラフは [図] のようになる。



(3)　この関数の定義域は，$1-x^2\geqq0$ を解いて　　$-1\leqq x\leqq1$

奇関数であるから，グラフは原点に関して対称である。

$-1<x<1$ のとき

$$y'=1\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''=\frac{-4x\sqrt{1-x^2}-(1-2x^2)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$-1<x<1$ で，$y'=0$ とすると　$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

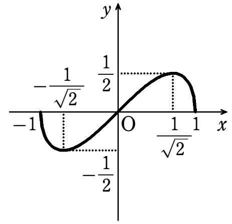
$y''=0$ とすると　$x=0$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'	／	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	／
y''	／	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	／
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

また　$\lim_{x\to-1+0}y'=-\infty,\ \lim_{x\to1-0}y'=-\infty$

したがって，グラフは右の図のようになる。



(4)　偶関数であるから，グラフは y 軸に関して対称である。

$$y'=-2xe^{-x^2}$$

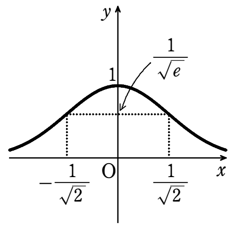
$$y''=-2\{1\cdot e^{-x^2}+x\cdot(-2xe^{-x^2})\}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0$

$y''=0$ とすると　　$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘



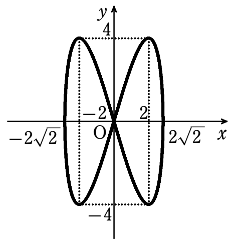
また　$\lim_{x\to-\infty}y=0,\ \lim_{x\to\infty}y=0$

よって，x 軸は漸近線である。

したがって，グラフは右の図のようになる。

4

解答　［図］



解説

方程式で x を $-x$，y を $-y$ におき換えても $y^2=x^2(8-x^2)$ は成り立つから，グラフは x 軸，y 軸，原点に関して対称である。

よって，$x\geqq0$，$y\geqq0$ の範囲で考えると　　$y=x\sqrt{8-x^2}$　……①

$8-x^2 \geqq 0$ であるから　　$0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$

$0<x<2\sqrt{2}$ のとき

$$y'=\sqrt{8-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=\frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$y''=2\cdot\frac{-2x\sqrt{8-x^2}-(4-x^2)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}}{8-x^2}=\frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)\sqrt{8-x^2}}$$

$y'=0$ とすると，$0<x<2\sqrt{2}$ では　　$x=2$

また，$0<x<2\sqrt{2}$ のとき　　$y''<0$

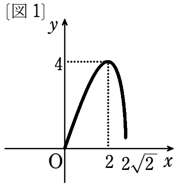
$0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ における関数 ① の増減，凹凸は左下の表のようになる。

更に　$\displaystyle\lim_{x\to 2\sqrt{2}-0} y'=-\infty$，

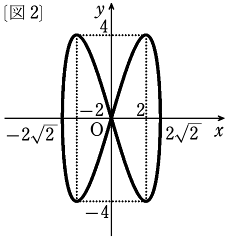
$\displaystyle\lim_{x\to +0} y'=2\sqrt{2}$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	0	↗	4	↘	0

［図 1］



［図 2］

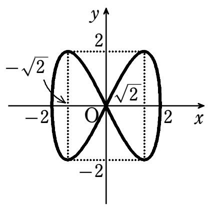


よって，$0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ における関数 ① のグラフは［図 1］のようになる。

ゆえに，対称性により，求めるグラフは［図 2］のようになる。

$\boxed{5}$

解答　［図］



解説

$2\cos\theta$，$2\sin 2\theta$ の周期はそれぞれ 2π，π である。

$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とすると，$f(-\theta)=f(\theta)$，$g(-\theta)=-g(\theta)$ であるから，曲線は x 軸に関して対称である。

したがって，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ …… ① の範囲で考える。

$$f'(\theta)=-2\sin\theta,\quad g'(\theta)=4\cos 2\theta$$

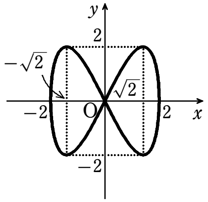
① の範囲で $f'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　$\theta=0,\ \pi$

$g'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

① の範囲における θ の値の変化に対して，x，y の値の変化は次の表のようになる。

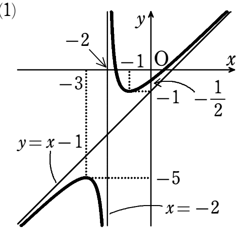
θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$g'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$(x,\ y)$	$(2,\ 0)$	↖	$(\sqrt{2},\ 2)$	↙	$(-\sqrt{2},\ -2)$	↖	$(-2,\ 0)$

対称性を考えると，曲線の概形は，右の図のようになる。

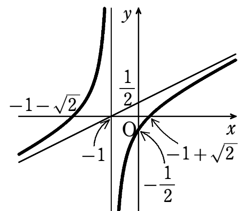


$\boxed{1}$

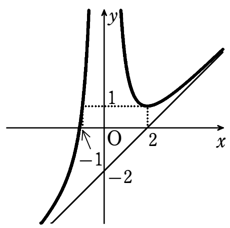
解答　(1)



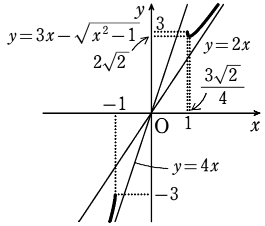
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　この関数の定義域は $x \fallingdotseq -2$ である。

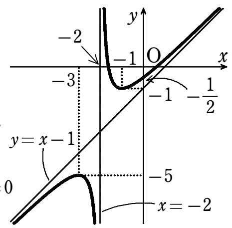
$f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ とすると，$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+2}$ であるから

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2},\qquad f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ -3$　　$f''(x)=0$ となる x の値は存在しない。

よって，$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	/	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大 -5	↘	/	↘	極小 -1	↗



また，$\displaystyle\lim_{x\to -2+0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to -2-0} f(x)=-\infty$ であるから，

直線 $x=-2$ はこの曲線の漸近線である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x-1)\}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\{f(x)-(x-1)\}=0$

であるから，直線 $y=x-1$ もこの曲線の漸近線である。

以上から，この関数のグラフの概形は右の図のようになる。

(2)　関数の定義域は　　$x \fallingdotseq -1$

$y=\dfrac{x^2+2x-1}{2(x+1)}$ から　　$y=\dfrac{1}{2}(x+1)-\dfrac{1}{x+1}$

ゆえに　　$y'=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2+2}{2(x+1)^2}$，　$y''=-\dfrac{2}{(x+1)^3}$

y の増減と曲線の凹凸は，右の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	／	$+$
y''	$+$	／	$-$
y	↗	／	↗

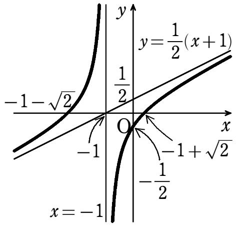
また，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0} y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-1-0} y=\infty$ であるから，直線 $x=-1$ は漸近線である。

さらに　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{y-\frac{1}{2}(x+1)\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left\{y-\frac{1}{2}(x+1)\right\}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=0$

よって，直線 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ も漸近線である。

したがって，グラフは［図］



(3)　この関数の定義域は　$x\neq0$

$y=x-2+\dfrac{4}{x^2}$ であるから　　$y'=1-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

$$y''=\frac{24}{x^4}$$

$y'=0$ とすると　　$x=2$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	／	$-$	0	$+$
y''	$+$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	／	↘	1	↗

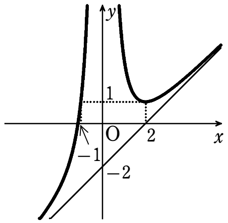
また　$\displaystyle\lim_{x\to0} y=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{y-(x-2)\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{y-(x-2)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$

であるから，y 軸と直線 $y=x-2$ は漸近線である。

したがって，グラフは右の図のようになる。



(4)　関数 y の定義域は，$x^2-1\geqq0$ から　　$x\leqq-1,\ 1\leqq x$

$$y'=3-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{3\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y''=-\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2}=\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$y'=0$ とすると　　$3\sqrt{x^2-1}=x$ ……①

① の両辺を 2 乗すると　　$9(x^2-1)=x^2$

よって　　$x^2=\dfrac{9}{8}$　　　ゆえに　　$x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

このうち，① を満たすものは　　$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

よって，y の増減，グラフの凹凸は右の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	╳	1	$\cdots$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\cdots$
y'	$+$	／	╳	／	$-$	0	$+$
y''	$+$	／	╳	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	-3	╳	3	↘	極小 $2\sqrt{2}$	↗

また　　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0} y'=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1+0} y'=-\infty$

更に，グラフの漸近線を考えると

[1]　$x\longrightarrow\infty$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(3-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=3-1=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$

ゆえに，直線 $y=2x$ は漸近線である。

[2]　$x\longrightarrow-\infty$ のとき，$t=-x$ とおくと　　$t\longrightarrow\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-(3t+\sqrt{t^2-1})}{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(3+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)=3+1=4$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(y-4x)=\lim_{x\to-\infty}(-x-\sqrt{x^2-1})$

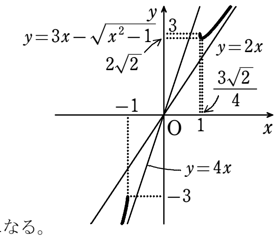
$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}(t-\sqrt{t^2-1})$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-(t^2-1)}{t+\sqrt{t^2-1}}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}}=0$

ゆえに，直線 $y=4x$ は漸近線である。

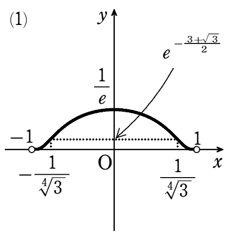
以上により，求めるグラフの概形は右図のようになる。



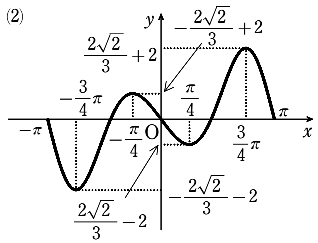
$\boxed{2}$

解答　(1)［図］　(2)［図］

(1)



(2)



解説

(1)　$y=f(x)$ とすると，$f(-x)=f(x)$ であるから，グラフは y 軸に関して対称である。

$$y'=e^{\frac{1}{x^2-1}}\cdot\left\{-\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right\}=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

$$y''=-2\left[\frac{(x^2-1)^2-x\cdot2(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}e^{\frac{1}{x^2-1}}+\frac{x}{(x^2-1)^2}\left\{-\frac{2x}{(x^2-1)^2}e^{\frac{1}{x^2-1}}\right\}\right]$$

$$=\frac{2(3x^4-1)}{(x^2-1)^4}e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0$

$y''=0$ とすると　　$x^4=\dfrac{1}{3}$　　　よって　　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$0\leqq x<1$ における y の増減，グラフの凹凸は右の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\cdots$	1
y'	0	$-$	$-$	$-$	
y''	$-$	$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{e}$	↘	変曲点 $e^{-\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$	↘	

また，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x^2-1}=-\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}e^{\frac{1}{x^2-1}}=0$

グラフの対称性を考慮すると，求めるグラフは図 (1)。

(2)　$y=f(x)$ とすると，$f(-x)=-f(x)$ であるから，グラフは原点に関して対称である。

$y'=\cos3x-4\cos2x+\cos x=(\cos3x+\cos x)-4\cos2x$

$=2\cos2x\cos x-4\cos2x=2\cos2x(\cos x-2)$

$y'=0$ とすると，$\cos x-2<0$ であるから　　$\cos2x=0$

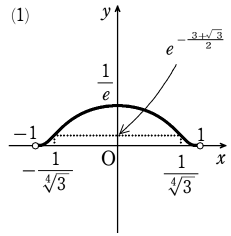
$0<x<\pi$ とすると　　$2x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$　　　ゆえに　　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

$0\leqq x\leqq\pi$ における y の増減表は次のようになる。

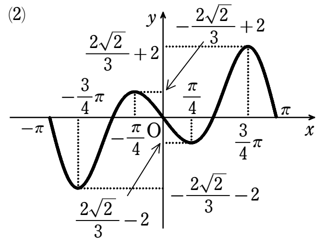
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	極小 $\frac{2\sqrt{2}}{3}-2$	↗	極大 $\frac{2\sqrt{2}}{3}+2$	↘	0

よって，グラフの対称性により，求めるグラフは 図 (2)。

(1)



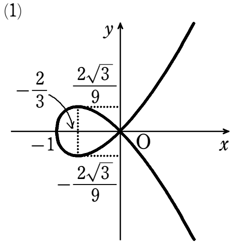
(2)



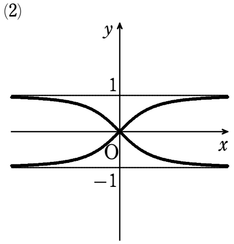
$\boxed{3}$

解答　(1)［図］　(2)［図］

(1)



(2)



解説

(1)　この関数の定義域は，$x+1\geqq 0$ を解いて　　$x\geqq -1$

$F(x,\ y)=y^2-x^2(x+1)$ とおくと　　$F(x,\ -y)=F(x,\ y)$

よって，曲線 $F(x,\ y)=0$ は x 軸に関して対称である。

$y^2=x^2(x+1)$ から　　$y=\pm x\sqrt{x+1}$

まず，$y=x\sqrt{x+1}$ のグラフを調べる。

$x>-1$ のとき　　$y'=1\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

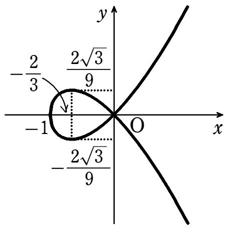
$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{x+1}-(3x+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

y の増減とグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y''	／	$+$	$+$	$+$
y	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

また　　$\displaystyle\lim_{x\to -1+0}y'=-\infty$

以上により，対称性を考えて，曲線は右の図のようになる。



(2)　$F(x,\ y)=x^2y^2-(x^2-y^2)$ とおくと

$F(x,\ -y)=F(x,\ y)$，　$F(-x,\ y)=F(x,\ y)$，

$F(-x,\ -y)=F(x,\ y)$

よって，曲線 $F(x,\ y)=0$ は x 軸，y 軸，原点に関して対称である。

まず，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の範囲で考える。

$x^2y^2=x^2-y^2$ から　　$(x^2+1)y^2=x^2$　　　ゆえに　　$y^2=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であるから　　$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

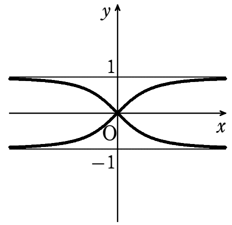
$$y''=-\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=-\frac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

$x\geqq 0$ のとき $y'>0$，$y''\leqq 0$ であるから，y は単調に増加し，グラフは上に凸である。

また　　$\displaystyle\lim_{x\to +0}y'=1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$

よって，直線 $y=1$ は漸近線である。

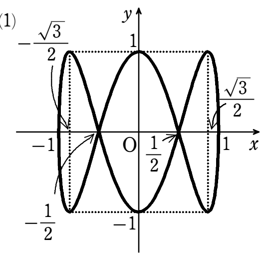
以上により，対称性を考えて，曲線は右の図のようになる。



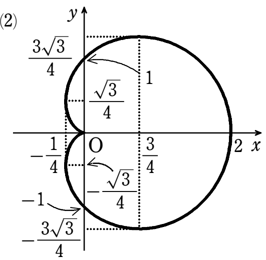
$\boxed{4}$

解答　(1)［図］　(2)［図］

(1)



(2)



解説

$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とする。

(1)　$\sin\theta$，$\cos 3\theta$ の周期はそれぞれ 2π，$\dfrac{2\pi}{3}$ である。

$f(-\theta)=-f(\theta)$，$g(-\theta)=g(\theta)$ であるから，曲線は y 軸に関して対称である。

したがって，$0\leqq\theta\leqq\pi$ …… ① の範囲で考える。

また　　$f'(\theta)=\cos\theta$，$g'(\theta)=-3\sin 3\theta$

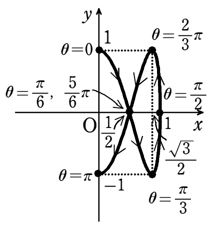
① の範囲で $f'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$g'(\theta)=0$ を満たす θ の値は，$\sin 3\theta=0$ $(0\leqq 3\theta\leqq 3\pi)$ から

$3\theta=0$，π，2π，3π　すなわち　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，π

① の範囲における θ の値の変化に対応した x，y の値の変化は次の表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	0	→	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	→	1	←	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	←	0
$g'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
y	1	↓	-1	↑	0	↑	1	↓	-1

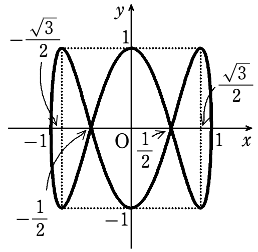


また，① の範囲で $y=0$ となるのは，

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ の他に $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ の場合があり

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ のとき　　$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

よって，対称性を考えると，曲線の概形は右の図のようになる。



(2)　$f(\theta)$，$g(\theta)$ の周期はともに 2π である。

$f(-\theta)=f(\theta)$，$g(-\theta)=-g(\theta)$ であるから，曲線は x 軸に関して対称である。

よって，$0\leqq\theta\leqq\pi$ …… ① の範囲で考える。

$f'(\theta)=-\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta=-\sin\theta(1+2\cos\theta)$

$g'(\theta)=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=-(1-\cos^2\theta)+(1+\cos\theta)\cos\theta$

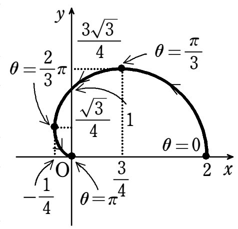
$\quad=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

① の範囲で $f'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　　$\theta=0$，$\dfrac{2}{3}\pi$，π

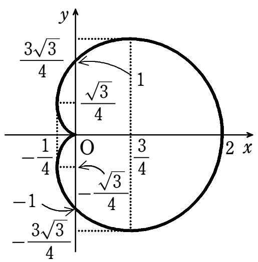
$g'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，π

① の範囲における θ の値の変化に対応した x，y の値の変化は次の表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	2	←	$\frac{3}{4}$	←	0	←	$-\frac{1}{4}$	→	0
$g'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
y	0	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↓	1	↓	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↓	0



よって，対称性を考えると，曲線の概形は右下の図のようになる。



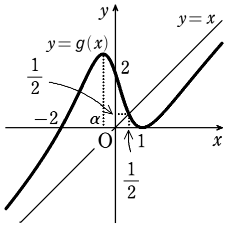
注意　この問題の解答における増減表の →，←，↑，↓ は，次のことを表す。

→：x の値が増加する　　←：x の値が減少する

↑：y の値が増加する　　↓：y の値が減少する

1

解答　(1)　略　　(2)　直線 $y=x$　　(3)　[図]



解説

(1)　$f'(x)=3x^2+2x+7=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{20}{3}$

よって，すべての実数 x について　　$f'(x)>0$

ゆえに，$f(x)$ は単調に増加する。

また　　$f(-2)=-15<0$，$f(0)=3>0$

したがって，方程式 $f(x)=0$ はただ１つの実数解をもち，その実数解 α は $-2<\alpha<0$ を満たす。

(2)　$g(x)=x+\dfrac{2-4x}{x^2+1}$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{g(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-4x}{x^2+1}=0$

同様にして　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{g(x)-x\}=0$

ゆえに，曲線 $y=g(x)$ の漸近線は　　直線 $y=x$

(3)　$g'(x)=\dfrac{(3x^2-3)(x^2+1)-(x^3-3x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+6x^2-4x-3}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(x-1)(x^3+x^2+7x+3)}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)f(x)}{(x^2+1)^2}$$

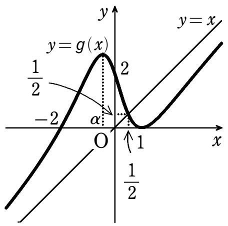
$g'(x)=0$ とすると，(1) から　　$x=1$，α

$-2<\alpha<0$ であるから，$g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	0	↗

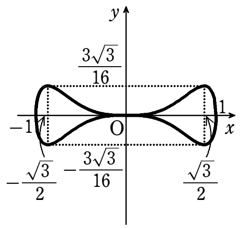
また　　$g(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^2+1}$

(2) の結果も考慮すると，$y=g(x)$ のグラフは右のようになる。



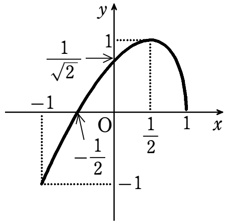
2

解答　(1)　[図]



(2)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3(4\cos^2\theta-3)}{4\sin\theta}$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{dy}{dx}=\frac{9}{4}$，

$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=-\infty$，グラフは[図]



解説

(1)　$y^2\geqq 0$ であるから　$x^6(1-x^2)\geqq 0$　よって　$-1\leqq x\leqq 1$

このとき，$y=\pm x^3\sqrt{1-x^2}$ であるから，求めるグラフは $y=x^3\sqrt{1-x^2}$ と $y=-x^3\sqrt{1-x^2}$ をあわせたものである。

まず，$y=x^3\sqrt{1-x^2}$　……① のグラフについて考える。

$y=0$ のとき　$x=\pm 1$，0

よって，原点 (0，0) と点 (−1，0)，(1，0) を通る。

① から　$y'=3x^2\sqrt{1-x^2}+x^3\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x^2(3-4x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

また，関数 ① のグラフは原点に関して対称である。

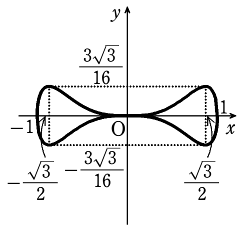
よって，① について，y の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↗	0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	0

また　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}y'=\lim_{x\to -1+0}y'=-\infty$

$y=-x^3\sqrt{1-x^2}$ のグラフは，x 軸に関して ① のグラフと対称である。

したがって，求めるグラフは右の図のようになる。



(2)　$\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos 3\theta$，$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin 2\theta$ から

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3\cos 3\theta}{2\sin 2\theta}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{4\cos^3\theta-3\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=-\frac{3(4\cos^2\theta-3)}{4\sin\theta}$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{4\cos^2\theta-3}{\sin\theta}=\frac{9}{4}$$

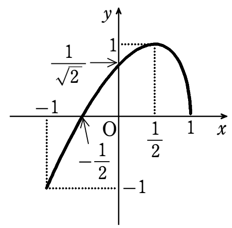
同様にして　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{4\cos^2\theta-3}{\sin\theta}=-\infty$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3(4\cos^2\theta-3)}{4\sin\theta}=\frac{3(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)}{4\sin\theta}$$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき　$\sin\theta>0,\ 2\sin\theta+1>0$　　ゆえに，$\dfrac{dy}{dx}=0$ とすると　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

よって，θ に関する y の増減表は次のようになる。

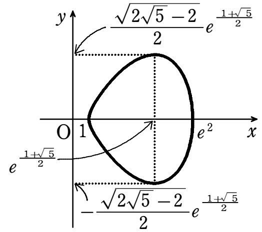
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	極大 1	↘	0



したがって，C の概形は，右の図のようになる。

3

解答　(1)　略　　(2)　[図]



解説

(1)　$e^{1-\cos(-\theta)}=e^{1-\cos\theta}=x$，$e^{1-\cos(-\theta)}\sin(-\theta)=-e^{1-\cos\theta}\sin\theta=-y$

よって，点 $(x,\ y)$ が曲線 C 上にあれば点 $(x,\ -y)$ も C 上にある。

ゆえに，曲線 C は x 軸に関して対称である。

(2)　$\dfrac{dx}{d\theta}=e^{1-\cos\theta}\sin\theta$　　$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると，$-\pi<\theta<\pi$ のとき　$\theta=0$

よって，x の増減表は次のようになる。

θ	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	e^2	↘	1	↗	e^2

また，$\dfrac{dy}{d\theta}=e^{1-\cos\theta}\sin^2\theta+e^{1-\cos\theta}\cos\theta=e^{1-\cos\theta}(-\cos^2\theta+\cos\theta+1)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$|\cos\theta|\leqq 1$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ かつ $0<\theta<\pi$ を満たす θ を $\theta=\alpha$ とする。

$\sin\alpha>0$ であるから　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$

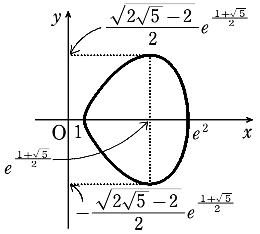
よって，x と y の増減表は次のようになる。

θ	$-\pi$	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
x	e^2	↘	↘	↘	1	↗	↗	↗	e^2
y	0	↘	極小	↗	↗	↗	極大	↘	0

$\theta=\alpha$ のとき　$y=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}>0$

$\theta=-\alpha$ のとき　$y=-\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}<0$

したがって，求める曲線の概形は，
右の図のようになる。



$\boxed{1}$

解答　略

解説

$f(x)=e^{-x}-(1-x)$ とおくと

$$f'(x)=-e^{-x}+1=-\frac{1}{e^x}+1=\frac{e^x-1}{e^x}$$

$x>0$ のとき $e^x>1$ であるから　$f'(x)>0$

ゆえに，$f(x)$ は $x\geqq0$ で単調に増加する。

また　$f(0)=e^0-1=0$

よって，$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

したがって　$e^{-x}>1-x$

$\boxed{2}$

解答　略

解説

$f(x)=e^x-x^2$ とすると

$f'(x)=e^x-2x$，$f''(x)=e^x-2$

$x>0$ における $f'(x)$ の増減表は右のようになり，

$x=\log2$ で極小かつ最小となる。

x	0	$\cdots$	$\log2$	$\cdots$
$f''(x)$	／	$-$	0	$+$
$f'(x)$		↘	極小	↗

$f'(\log2)=2-2\log2$

$\qquad=2\log\dfrac{e}{2}>0$

よって，$x>0$ のとき　$f'(x)\geqq f'(\log2)>0$

ゆえに，$f(x)$ は $x\geqq0$ で増加する。

よって，$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=1>0$

すなわち　$e^x>x^2$

$\boxed{3}$

解答　略

解説

$0<\alpha<\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\iff\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$$

であるから，$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}>\dfrac{\sin\beta}{\beta}$ を示せばよい。

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$g(x)=x\cos x-\sin x$ とすると

$g'(x)=1\cdot\cos x+x(-\sin x)-\cos x=-x\sin x$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $g'(x)<0$ であるから，$g(x)$ は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で減少する。

$g(0)=0$ であるから，$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$g(x)<g(0)=0$

よって　$f'(x)<0$

ゆえに，$f(x)$ は $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で減少する。

したがって，$0<\alpha<\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(\alpha)>f(\beta)$，すなわち $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}>\dfrac{\sin\beta}{\beta}$ が成り立つ。

よって，$0<\alpha<\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\boxed{4}$

解答　2 個

解説

$f(x)=x+2-e^x$ とすると　$f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

また

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は

2 個であるから，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解は 2 個である。

$\boxed{5}$

解答　$a<-\dfrac{27}{4}$ のとき 3 個，$a=-\dfrac{27}{4}$ のとき 2 個，$a>-\dfrac{27}{4}$ のとき 1 個

解説

$x^3+ax+a=0$ から　$a(x+1)=-x^3$

$x=-1$ は方程式の解ではないから，$x\neq-1$ であり

$$-\frac{x^3}{x+1}=a$$

よって，方程式の異なる実数解の個数は，関数 $y=-\dfrac{x^3}{x+1}$ ……① のグラフと直線

$y=a$ の共有点の個数に一致する。

① について　$y'=-\dfrac{3x^2(x+1)-x^3\cdot1}{(x+1)^2}=-\dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

$y'=0$ とすると　$x=-\dfrac{3}{2}$，0

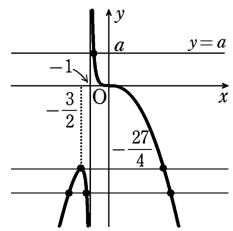
① の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$-$
y	↗	$-\dfrac{27}{4}$	↘	／	↘	0	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=-\infty$

よって，① のグラフは右の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数を調べて，

求める実数解の個数は

$a<-\dfrac{27}{4}$ のとき 3 個，　$a=-\dfrac{27}{4}$ のとき 2 個，　$a>-\dfrac{27}{4}$ のとき 1 個

$\boxed{6}$

解答　$k\geqq\dfrac{1}{3e}$

解説

$x>0$ のとき，不等式 $kx^3\geqq\log x$ は $k\geqq\dfrac{\log x}{x^3}$ と同値である。

$f(x)=\dfrac{\log x}{x^3}$ とすると

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-(\log x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{1-3\log x}{x^4}$$

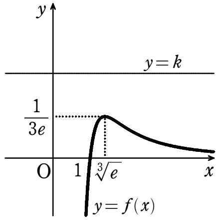
$f'(x)=0$ とすると　$\log x=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$x=\sqrt[3]{e}$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	極大 $\dfrac{1}{3e}$	↘

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt[3]{e}$ で極大かつ最大で，最大値は $\dfrac{1}{3e}$ である。



すべての正の数 x について不等式が成り立つための必要十分条件は，k の値が $f(x)$ の最大値と等しいか，または最大値より大きいことであるから

$$k\geqq\frac{1}{3e}$$

$\boxed{7}$

解答　$a<-1$ のとき 0 本；$a=-1$，$0\leqq a$ のとき 1 本；$-1<a<0$ のとき 2 本

解説

$f(x)=-e^x$ から　$f'(x)=-e^x$

よって，曲線上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$y-(-e^t)=-e^t(x-t)$　すなわち　$y=-e^tx+(t-1)e^t$

この接線 ℓ が点 $(0,\ a)$ を通るとき　$a=(t-1)e^t$

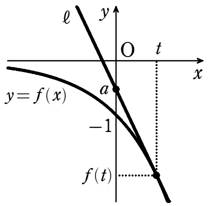
ここで，$g(t)=(t-1)e^t$ とすると

$g'(t)=e^t+(t-1)e^t=te^t$

$g'(t)=0$ とすると　$t=0$

$g(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	-1	↗



また　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}(t-1)e^t=\infty$，

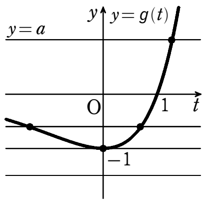
$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}g(t)=\lim_{t\to-\infty}(t-1)e^t=\lim_{t\to-\infty}(te^t-e^t)=0$

ゆえに，$y=g(t)$ のグラフの概形は右図のようになる。

$y=-e^x$ のグラフから，接点が異なれば接線も異なる。

よって，$a=g(t)$ を満たす実数解の個数が，接線の本数に一致するから，求める接線の本数は

$a<-1$ のとき 0 本；$a=-1$，$0\leqq a$ のとき 1 本；
$-1<a<0$ のとき 2 本



$\boxed{1}$

解答　略

解説

(1)　$f(x)=\dfrac{x}{e}-\log x$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-e}{ex}$

$x>0$ のとき，$f'(x)=0$ とすると　$x=e$

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$x=e$ で最小値 0 をとる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小 0	↗

よって，$x>0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

すなわち　$\log x\leqq\dfrac{x}{e}$

(2)　$f(x)=\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)-\log(1+x)$ とすると，$x>0$ のとき

$$f'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}$$
$$=\frac{(1+x)(1-x+x^2)-1}{1+x}$$
$$=\frac{x^3}{1+x}>0$$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

$f(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>0$

すなわち　$\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

(3)　$f(x)=\sin x-x\cos x$ とすると

$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

$0<x<\pi$ のとき　$f'(x)>0$　　よって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\pi$ で増加する。

ゆえに，$0<x<\pi$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$0<x<\pi$ のとき　$\sin x>x\cos x$

(4)　$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{2}x\right)-\sqrt{1+x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}$

$x>0$ のとき　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき　$\sqrt{1+x}<1+\dfrac{1}{2}x$

(5)　$f(x)=\dfrac{1+x}{2}-\log(1+x)$ とすると

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2(1+x)}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$1-\log 2$	↗

よって，$x>0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(1)=1-\log 2$

$1-\log 2>0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)\geqq f(1)>0$

したがって，$x>0$ のとき　$\log(1+x)<\dfrac{1+x}{2}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　略

解説

(1)　$f(x)=e^{2x}-\dfrac{x^2}{2}$ とすると　$f'(x)=2e^{2x}-x$，$f''(x)=4e^{2x}-1$

$x>0$ のとき，$4e^{2x}>4e^0=4>1$ より　$4e^{2x}-1>0$

よって，$x>0$ において　$f''(x)>0$

ゆえに，$x>0$ において $f'(x)$ は単調に増加する。

これと $f'(0)=2>0$ から，$x>0$ において　$f'(x)>0$

よって，$x>0$ において $f(x)$ は単調に増加する。

これと，$f(0)=1>0$ から，$x>0$ において　$f(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき　$e^{2x}>\dfrac{x^2}{2}$

(2)　$f(x)=\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2e^x\right)-e^x$ とおくと

$$f'(x)=1+\frac{1}{2}(2xe^x+x^2e^x)-e^x=\left(\frac{1}{2}x^2+x-1\right)e^x+1$$
$$f''(x)=(x+1)e^x+\left(\frac{1}{2}x^2+x-1\right)e^x=\frac{x(x+4)}{2}e^x$$

$x>0$ のとき $f''(x)>0$ であるから，$f'(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

また　$f'(0)=-e^0+1=0$

よって，$x>0$ のとき　$f'(x)>f'(0)=0$

ゆえに，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

また　$f(0)=1-e^0=0$

よって，$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

したがって　$e^x<1+x+\dfrac{1}{2}x^2e^x$

(3)　$f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと

$f'(x)=\cos x-(1-x)$，$f''(x)=-\sin x+1$

n を整数とすると　$x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき　$f''(x)=0$

$x\neq\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき　$f''(x)>0$

よって，$f'(x)$ は単調に増加する。

$f'(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f'(x)>f'(0)=0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

$f(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき　$\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

(4)　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)$ とおくと

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}\right\}$$

$x>0$ のとき $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

$f(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

ゆえに　$1-\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　……①

$g(x)=\left(1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2\right)-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ とおくと

$$g'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$g''(x)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4\sqrt{(1+x)^5}}=\frac{3}{4}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}\right\}$$

$x>0$ のとき $g''(x)>0$ であるから，$g'(x)$ は $x \geqq 0$ で単調に増加する。

$g'(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$g'(x)>g'(0)=0$

よって，$g(x)$ は $x \geqq 0$ で単調に増加する。

$g(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$g(x)>g(0)=0$

ゆえに　$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2$　……②

①，②から，$x>0$ のとき　$1-\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2$

$\boxed{3}$

解答　略

解説

$0<a<b<2\pi$ のとき，不等式の各辺を $ab\ (>0)$ で割って

$$\frac{1}{a}\sin\frac{a}{2}>\frac{1}{b}\sin\frac{b}{2}\quad\cdots\cdots ①$$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{2}$ とすると

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2x^2}\left(x\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\right)$$

$g(x)=x\cos\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}$ とすると

$$g'(x)=\cos\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=-\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$0<x<2\pi$ のとき，$0<\dfrac{x}{2}<\pi$ であるから　$g'(x)<0$

よって，$g(x)$ は $0 \leqq x<2\pi$ で単調に減少する。

また，$g(0)=0$ であるから，$0<x<2\pi$ において　$g(x)<0$　すなわち　$f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は $0<x<2\pi$ において単調に減少する。

ゆえに，$0<a<b<2\pi$ のとき　$\dfrac{1}{a}\sin\dfrac{a}{2}>\dfrac{1}{b}\sin\dfrac{b}{2}$

すなわち，不等式①が成り立つから，与えられた不等式は成り立つ。

$\boxed{4}$

解答　(1)　2 個　(2)　1 個

解説

(1)　$f(x)=x-e^{x-3}$ とすると　$f'(x)=1-e^{x-3}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=3$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は 2 個であるから，方程式 $f(x)=0$ すなわち $x=e^{x-3}$ の実数解は　2 個

(2)　$f(x)=x-\sin x$ とすると　$f'(x)=1-\cos x$

n を整数とすると　$x=2n\pi$ のとき　$f'(x)=0$

$x \neq 2n\pi$ のとき　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

したがって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は 1 個であるから，方程式 $f(x)=0$ すなわち $x-\sin x=0$ の異なる実数解の個数は　1 個

$\boxed{5}$

解答　(1)　$a<1$ のとき 1 個，$a=1$ のとき 2 個，$1<a$ のとき 3 個

(2)　$a<-1$ のとき 0 個，$a=-1$ のとき 1 個，$-1<a \leqq 0$ のとき 2 個，$0<a$ のとき 1 個

(3)　$a<-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ のとき 0 個；$a=-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$，$a \geqq 0$ のとき 1 個；

$-\dfrac{2}{\sqrt{e}}<a<0$ のとき 2 個

解説

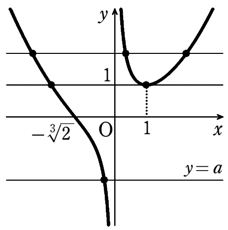
(1)　$x=0$ は方程式の解ではないから　$x^3-3ax+2=0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^3+2}{3x}=a$

よって，実数解の個数は，関数 $y=\dfrac{x^3+2}{3x}$ ……① のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数に等しい。

①について　$y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x^2\cdot x-(x^3+2)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)}{3x^2}=\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{3x^2}$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↘	／	↘	1	↗



また　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}y=-\infty$

よって，①のグラフは右図のようになる。

直線 $y=a$ との共有点の個数を調べて，実数解の個数は

$a<1$ のとき 1 個，　$a=1$ のとき 2 個，　$1<a$ のとき 3 個

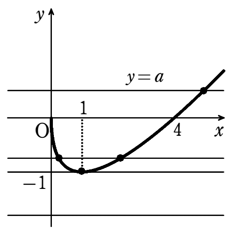
(2)　$2\sqrt{x}-x+a=0 \Longleftrightarrow x-2\sqrt{x}=a$

よって，実数解の個数は，関数 $y=x-2\sqrt{x}$ ……① のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数に等しい。

①の定義域は $x \geqq 0$ であり　$y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	0	↘	-1	↗



また　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$

よって，①のグラフは右図のようになる。

直線 $y=a$ との共有点の個数を調べて，実数解の個数は　$a<-1$ のとき 0 個，　$a=-1$ のとき 1 個，

$-1<a \leqq 0$ のとき 2 個，　$0<a$ のとき 1 個

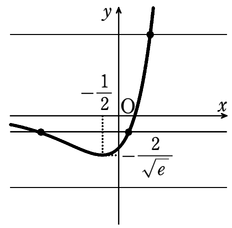
(3)　$2x-1=ae^{-x} \Longleftrightarrow (2x-1)e^x=a$

よって，実数解の個数は，関数 $y=(2x-1)e^x$ ……① のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数に等しい。

①について　$y'=2e^x+(2x-1)e^x=(2x+1)e^x$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	$-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$	↗



また　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y=+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}y&=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^x\\&=\lim_{t\to\infty}(-2t-1)e^{-t}\ (x=-t\ とおく)\\&=-2\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}\\&=-2\cdot 0-0\ \left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0\ を利用\right)\\&=0\end{aligned}$$

よって，①のグラフは右図のようになる。

直線 $y=a$ との共有点の個数を調べて，実数の個数は

$a<-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ のとき 0 個

$a=-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$，$a \geqq 0$ のとき 1 個

$-\dfrac{2}{\sqrt{e}}<a<0$ のとき 2 個

$\boxed{6}$

解答　$a \leqq \dfrac{e^3}{27}$

解説

$x>0$ であるから，与えられた不等式は

$$\frac{e^x}{x^3} \geqq a\quad\cdots\cdots ①$$

と同値である。

$f(x)=\dfrac{e^x}{x^3}\ (x>0)$ とすると　$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^3-e^x\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{(x-3)e^x}{x^4}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=3$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$\dfrac{e^3}{27}$	↗

よって，$f(x)$ は $x=3$ で最小値 $\dfrac{e^3}{27}$ をとる。

したがって，すべての正の数 x に対して，不等式①が成り立つような a の値の範囲は

$$a \leqq \frac{e^3}{27}$$

$\boxed{7}$

解答　$a>1$ のとき 0 本；$a=1$，$a \leqq 0$ のとき 1 本；$0<a<1$ のとき 2 本

解説

$f(x)=-\log x$ から　　$f'(x)=-\frac{1}{x}$

よって，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(-\log t)=-\frac{1}{t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{1}{t}x-\log t+1$$

この接線が点 $(a,\ 0)$ を通るとき　　$0=-\frac{1}{t}a-\log t+1$

したがって　　$a=t(1-\log t)$

ここで，$g(t)=t(1-\log t)$ とすると

$$g'(t)=1-\log t+t\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)=-\log t$$

$g'(t)=0$ とすると　　$t=1$

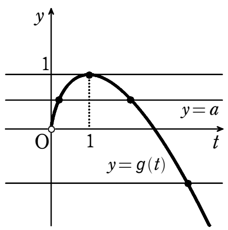
$g(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	…	1	…
$g'(t)$	/	$+$	0	$-$
$g(t)$	/	↗	1	↘

また　$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}t(1-\log t)=-\infty$，

$\lim_{t\to+0}g(t)=\lim_{t\to+0}(t-t\log t)=0$

ゆえに，$y=g(t)$ のグラフの概形は右図のようになる。



$y=-\log x$ のグラフから，接点が異なれば接線も異なる。

よって，$a=g(t)$ を満たす実数解の個数が，接線の本数に一致するから，求める接線の本数は

$a>1$ のとき 0 本；$a=1$，$a\leqq 0$ のとき 1 本；

$0<a<1$ のとき 2 本

1

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

(1) $f(x)=\frac{x^2-4}{4x}-\log\frac{x}{2}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2x\cdot x-(x^2-4)\cdot 1}{x^2}-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{x^2+4-4x}{4x^2}=\frac{(x-2)^2}{4x^2}$$

$x>2$ のとき $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $x\geqq 2$ で単調に増加する。

また　　$f(2)=\frac{4-4}{8}-\log 1=0$

よって，$x>2$ のとき　　$f(x)>f(2)=0$

したがって　　$\log\frac{x}{2}<\frac{x^2-4}{4x}$

(2) $f(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$ とすると　　$f'(x)=-\sin x+x$，$f''(x)=-\cos x+1$

n が整数のとき，$x=2n\pi$ ならば　$f''(x)=0$

$x\neq 2n\pi$ ならば　$f''(x)>0$

よって，$f'(x)$ は増加関数である。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f'(x)>f'(0)=0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって　　$1-\frac{x^2}{2}<\cos x$　……①

次に，$g(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x$ とすると

$$g'(x)=-x+\frac{x^3}{6}+\sin x,\quad g''(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\cos x=f(x)$$

ゆえに，$x>0$ のとき　　$g''(x)>0$

よって，$g'(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$g'(x)>g'(0)=0$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$g(x)>g(0)=0$

したがって　　$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$　……②

①，② から，与えられた不等式は成り立つ。

(3) $f(x)=\log(1+x)-\left(x+x\log\frac{2}{x+2}\right)$ とすると

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1-\log\frac{2}{x+2}+\frac{x}{x+2}=\frac{1}{1+x}+\log\frac{x+2}{2}-\frac{2}{x+2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{x(x^2+5x+5)}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$x>0$ のとき　　$f''(x)>0$

よって，$f'(x)$ は $x\geqq 0$ で増加するから，$x>0$ のとき　　$f'(x)>f'(0)=0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加するから，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき　　$\log(1+x)>x+x\log\frac{2}{x+2}$

2

解答　略

解説

与えられた不等式の各辺を b (>0) で割ると

$\log\frac{a}{b}\leqq\frac{a}{b}-1\leqq\frac{a}{b}\log\frac{a}{b}$ であり，$\frac{a}{b}=t$ とおくと　　$t>0$

ゆえに，不等式は　　$\log t\leqq t-1\leqq t\log t$ $(t>0)$　……①

$f(t)=t-1-\log t$ とおくと　　$f'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=1$

$t>0$ における $f(t)$ の増減表は，右のようになる。

t	0	…	1	…
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小 0	↗

よって，$t>0$ のとき　　$f(t)\geqq 0$

次に，$g(t)=t\log t-t+1$ とおくと　　$g'(t)=\log t+t\cdot\frac{1}{t}-1=\log t$

$f(t)$ と同様に，$g(t)$ は $t=1$ で極小かつ最小で　　$g(1)=0$

よって，$t>0$ のとき　　$g(t)\geqq 0$

以上から，① が成り立ち，与えられた不等式は成り立つ。

3

解答　(1) $a<-\frac{1}{e}$ のとき 0 個，$a=-\frac{1}{e}$ のとき 1 個，$-\frac{1}{e}<a<0$ のとき 2 個，

$a\geqq 0$ のとき 1 個

(2) $a<27$ のとき 1 個，$a=27$ のとき 2 個，$a>27$ のとき 3 個

(3) $a<\frac{27}{4}$ のとき 1 個，$a=\frac{27}{4}$ のとき 2 個，$\frac{27}{4}<a$ のとき 3 個

(4) $a<-2e$ のとき 0 個；$a=-2e$，$\frac{6}{e^3}<a$ のとき 1 個；

$-2e<a\leqq 0$，$a=\frac{6}{e^3}$ のとき 2 個；$0<a<\frac{6}{e^3}$ のとき 3 個

解説

(1) 与えられた方程式より　　$x\log x=a$

$f(x)=x\log x$ とすると　　$f'(x)=\log x+1$

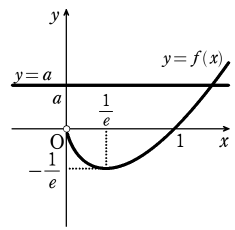
$f'(x)=0$ とすると　　$x=\frac{1}{e}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{e}$	…
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↘	極小 $-\frac{1}{e}$	↗

また　　$\lim_{x\to+0}f(x)=0$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する。

したがって　　$a<-\frac{1}{e}$ のとき　　0 個

$a=-\frac{1}{e}$ のとき　　1 個

$-\frac{1}{e}<a<0$ のとき　　2 個

$a\geqq 0$ のとき　　1 個

(2) 与えられた方程式から　　$x^3=a(x-2)$

この方程式は $x=2$ を解にもたないから，次の方程式と解が一致する。

$$\frac{x^3}{x-2}=a$$

$f(x)=\frac{x^3}{x-2}$ とすると

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3\cdot 1}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	／	↘	極小 27	↗

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 3$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

また　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=\infty$

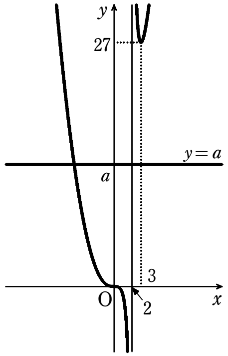
よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する。

したがって　$a<27$ のとき　1 個

$a=27$ のとき　2 個

$a>27$ のとき　3 個



(3)　$x=-1$ は方程式の解ではないから　　$x^3-ax-a=0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^3}{x+1}=a$

よって，求める実数解の個数は，関数 $y=\dfrac{x^3}{x+1}$ …… ① のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数に等しい。

① について　　$y'=\dfrac{3x^2(x+1)-x^3\cdot 1}{(x+1)^2}$
$$=\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	／	$+$	0	$+$
y	↘	$\frac{27}{4}$	↗	／	↗	0	↗

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ -\dfrac{3}{2}$

y の増減表は右のようになる。

また　$\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，　$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\infty$

$\lim\limits_{x\to-1+0}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-1-0}y=\infty$

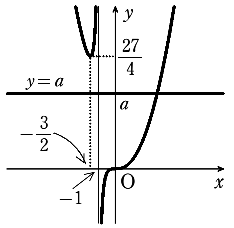
よって，① のグラフは図のようになる。

直線 $y=a$ との共有点の個数を調べると，求める実数解の個数は

$a<\dfrac{27}{4}$ のとき 1 個，

$a=\dfrac{27}{4}$ のとき 2 個，

$\dfrac{27}{4}<a$ のとき 3 個



(4)　$x^2-3=ae^x \Longleftrightarrow e^{-x}(x^2-3)=a$

よって，求める実数解の個数は，関数 $y=e^{-x}(x^2-3)$ …… ① のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数に等しい。

① について　　$y'=-e^{-x}(x^2-3)+e^{-x}\cdot 2x$
$$=-e^{-x}(x+1)(x-3)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-2e$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$

y の増減表は右のようになる。

また　$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}y=0$

よって，① のグラフは図のようになる。

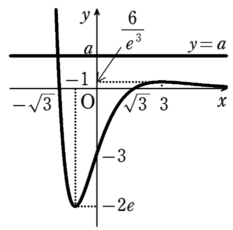
直線 $y=a$ との共有点の個数を調べると，求める実数解の個数は

$a<-2e$ のとき 0 個；

$a=-2e$，$\dfrac{6}{e^3}<a$ のとき 1 個；

$-2e<a\leqq 0$，$a=\dfrac{6}{e^3}$ のとき 2 個；

$0<a<\dfrac{6}{e^3}$ のとき 3 個



$\boxed{4}$

解答　$\sqrt{5}$

解説

$\sqrt{x+1}>0$ であるから，与えられた不等式は $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}\leqq k$ と同値である。

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}}$ $(x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+1}-(\sqrt{x}+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{(x+1)-(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}\,(x+1)}$$
$$=\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}\,(x+1)}$$

よって，$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{1}{4}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

ゆえに，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{4}$ のとき極大かつ最大となり，

最大値は　$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{5}$

よって，不等式が成り立つための条件は　　$\sqrt{5}\leqq k$

したがって，k の最小値は　　$\sqrt{5}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$　　(2)　$y=(1-t)e^{-t}x+t^2e^{-t}$

(3)　接線の方程式，接点の座標の順に

$y=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x+\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)$，　　$y=2ex+e$，$(-1,\ -e)$

(4)　$a<0$ のとき 0 本，$a=0$，$\dfrac{4}{e^2}<a$ のとき 1 本，$0<a<\dfrac{4}{e^2}$ のとき 3 本，

$a=\dfrac{4}{e^2}$ のとき 2 本

解説

(1)　$y=xe^{-x}$ より　　$y'=e^{-x}+xe^{-x}\cdot(-1)=(1-x)e^{-x}$

$$y''=-e^{-x}+(1-x)e^{-x}\cdot(-1)=(x-2)e^{-x}$$

$y''=0$ とすると　　$x=2$

$x<2$ のとき　$y''<0$，　　$x>2$ のとき　$y''>0$

よって，曲線 C は $x<2$ で上に凸であり，$x>2$ で下に凸である。

$x=2$ のとき　　$y=2e^{-2}=\dfrac{2}{e^2}$

よって，変曲点の座標は　　$\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$

(2)　点 $(t,\ te^{-t})$ における曲線 C の接線の方程式は

$y-te^{-t}=(1-t)e^{-t}(x-t)$

よって　$y=(1-t)e^{-t}x+t^2e^{-t}$　…… ①

(3)　① が点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るとき　　$0=(1-t)e^{-t}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+t^2e^{-t}$

よって　　$(2t^2+t-1)e^{-t}=0$　　　$e^{-t}\neq 0$ であるから　　$2t^2+t-1=0$

よって　　$(2t-1)(t+1)=0$　　　ゆえに　　$t=\dfrac{1}{2},\ -1$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　　接線の方程式は　$y=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x+\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$，　接点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)$

$t=-1$ のとき　　接線の方程式は　$y=2ex+e$，　接点の座標は　$(-1,\ -e)$

(4)　① が点 $(0,\ a)$ を通るとき　　$a=t^2e^{-t}$　…… ②

点 $(0,\ a)$ から曲線 C に引ける接線の本数は，t の方程式 ② の実数解の個数に一致する。

$f(t)=t^2e^{-t}$ とすると　　$f'(t)=2te^{-t}+t^2e^{-t}\cdot(-1)=t(2-t)e^{-t}$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=0,\ 2$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

$f(t)$ の増減表は右のようになる。

$\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^{-t}=0$ であるから，$y=f(t)$ のグラフの概形は，右図のようになる。

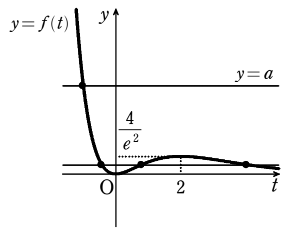
② の実数解 t の個数は，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数であるから，求める接線の本数は

$a<0$ のとき　0 本

$a=0$，$\dfrac{4}{e^2}<a$ のとき　1 本

$0<a<\dfrac{4}{e^2}$ のとき　3 本

$a=\dfrac{4}{e^2}$ のとき　　2 本



$\boxed{1}$

解答　略

解説

$f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ とおくと

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\ f''(x)=-\sin x+x,\ f'''(x)=-\cos x+1$$

よって，$x\geqq 0$ のとき $f'''(x)\geqq 0$ より，$f''(x)$ は単調に増加し，$f''(0)=0$ であるから
$f''(x)\geqq 0$

ゆえに，$x\geqq 0$ のとき $f'(x)$ は単調に増加し，$f'(0)=1-1=0$ であるから　$f'(x)\geqq 0$

したがって，$x\geqq 0$ のとき $f(x)$ は単調に増加し，$f(0)=0$ であるから　$f(x)\geqq 0$

以上から，$x\geqq 0$ のとき　$\sin x\geqq x-\dfrac{x^3}{6}$　……①

次に，$g(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\sin x$ とおくと

$$g'(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x,\ g''(x)=-x+\frac{x^3}{6}+\sin x$$

$x\geqq 0$ のとき，① から　$g''(x)\geqq 0$

よって，$x\geqq 0$ のとき $g'(x)$ は単調に増加し，$g'(0)=1-1=0$ であるから　$g'(x)\geqq 0$

したがって，$x\geqq 0$ のとき $g(x)$ は単調に増加し，$g(0)=0$ であるから　$g(x)\geqq 0$

以上から，$x\geqq 0$ のとき　$x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}\geqq\sin x$　……②

①，② から　$x-\dfrac{x^3}{6}\leqq\sin x\leqq x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$b<2a$，$b>e^a-e^{-a}$ のとき1個；$b=2a$，e^a-e^{-a} のとき2個；
$2a<b<e^a-e^{-a}$ のとき3個

(2)　$b<2a$，$b>e^a-e^{-a}$ のとき1本；$b=2a$，e^a-e^{-a} のとき2本；
$2a<b<e^a-e^{-a}$ のとき3本

解説

(1)　$f(t)=(a-t+1)e^t+(a-t-1)e^{-t}$ とすると　$f'(t)=(a-t)(e^t-e^{-t})$

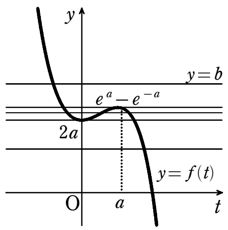
$f'(t)=0$ とすると　$a-t=0$，$e^t-e^{-t}=0$　すなわち　$e^{2t}=1$

$a-t=0$ から　$t=a$　　$e^{2t}=1$ から　$t=0$

また，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}te^{-t}=\lim_{t\to-\infty}te^t=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=-\infty$

よって，$f(t)$ の増減表は左下のようになり，$y=f(t)$ のグラフは右下の図のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 $2a$	↗	極大 e^a-e^{-a}	↘



方程式 $f(t)=b$ の実数解の個数は，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=b$ との共有点の個数を調べて

$b<2a$，$b>e^a-e^{-a}$ のとき1個；

$b=2a$，e^a-e^{-a} のとき2個；

$2a<b<e^a-e^{-a}$ のとき3個

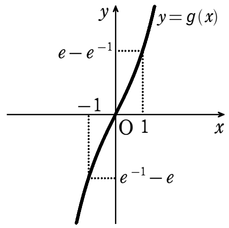
(2)　$g(x)=e^x-e^{-x}$ とし，曲線 $y=g(x)$ 上の接点を $(t,\ e^t-e^{-t})$ とする。

$g'(x)=e^x+e^{-x}$ から，接線の方程式は　$y-(e^t-e^{-t})=(e^t+e^{-t})(x-t)$

この直線が点 $(a,\ b)$ を通るから　$b=(a-t+1)e^t+(a-t-1)e^{-t}$　……①

ここで　$g(-x)=-g(x)$，$g'(x)=e^x+e^{-x}>0$，$g''(x)=e^x-e^{-x}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$

よって，曲線 $y=g(x)$ は，原点に関して対称で，単調に増加し，$x<0$ で $g''(x)<0$ より上に凸，$0<x$ で $g''(x)>0$ より下に凸であるから，曲線 $y=g(x)$ 上の接線について，接点が異なれば接線も異なる。



よって，t の方程式 ① の実数解の個数が接線の本数に一致するから，(1) より

$b<2a$，$b>e^a-e^{-a}$ のとき1本；

$b=2a$，e^a-e^{-a} のとき2本；

$2a<b<e^a-e^{-a}$ のとき3本

1

解答　(1)　$v=-\pi$，$\alpha=\sqrt{3}\,\pi^2$　　(2)　速さ 5，加速度の大きさ 5

解説

(1)　$v=\dfrac{dx}{dt}=2\left\{-\sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\pi\right\}=-2\pi\sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=-2\pi\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\pi=-2\pi^2\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$t=\dfrac{2}{3}$ を代入して　　$v=-\pi$，$\alpha=\sqrt{3}\,\pi^2$

(2)　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(3\cos t-4\sin t,\ 4\cos t+3\sin t)$

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(-3\sin t-4\cos t,\ -4\sin t+3\cos t)$

よって　$|\vec{v}|=\sqrt{(3\cos t-4\sin t)^2+(4\cos t+3\sin t)^2}=\sqrt{25(\cos^2 t+\sin^2 t)}$

$=\sqrt{25\cdot 1}=5$

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-3\sin t-4\cos t)^2+(-4\sin t+3\cos t)^2}=\sqrt{25(\sin^2 t+\cos^2 t)}$

$=\sqrt{25\cdot 1}=5$

したがって　　速さ 5，加速度の大きさ 5

2

解答　(1)　(ア)　$(1+2x)^p \fallingdotseq 1+2px$　　(イ)　$\log(e+x)\fallingdotseq 1+\dfrac{x}{e}$　　(2)　0.857

解説

(1)　(ア)　$f(x)=x^p$ とすると　　$f'(x)=px^{p-1}$

よって　　$f(1)=1$，$f'(1)=p$

$x\fallingdotseq 0$ のとき，$2x\fallingdotseq 0$ であるから

$(1+2x)^p\fallingdotseq f(1)+f'(1)\cdot 2x=1+2px$

(イ)　$f(x)=\log x$ とすると　　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

よって　　$f(e)=1$，$f'(e)=\dfrac{1}{e}$

ゆえに　　$\log(e+x)\fallingdotseq f(e)+f'(e)x=1+\dfrac{x}{e}$

別解　(ア)　$f(x)=(1+2x)^p$ とすると　　$f'(x)=2p(1+2x)^{p-1}$

よって　　$f(0)=1$，$f'(0)=2p$

ゆえに　　$f(x)\fallingdotseq 1+2px$

(イ)　$f(x)=\log(e+x)$ とすると　　$f'(x)=\dfrac{1}{e+x}$

よって　　$f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{e}$

ゆえに　　$f(x)\fallingdotseq 1+\dfrac{x}{e}$

(2)　$\sin 59^\circ=\sin(60^\circ-1^\circ)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{180}\right)$

$f(x)=\sin x$ とすると　　$f'(x)=\cos x$

よって　　$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$\sin 59^\circ=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{180}\right)\fallingdotseq f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{\pi}{180}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}\fallingdotseq\dfrac{1.732}{2}-\dfrac{3.142}{360}$

$\fallingdotseq 0.8660-0.0087=0.8573\fallingdotseq 0.857$

3

解答　(1)　$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$　　(2)　$0<x\leqq 4$ で単調に減少し，$4\leqq x$ で単調に増加する

(3)　略　　(4)　略

解説

(1)　真数条件から　　$x>0$

このとき　　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$

(2)　$f'(x)=0$ とすると　　$x=4$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2-\log 4$	↗

よって，$f(x)$ は，$0<x\leqq 4$ で単調に減少し，$4\leqq x$ で単調に増加する。

(3)　(2) から，$x>0$ のとき　　$f(x)\geqq f(4)=2-\log 4$

$2<e<3$ であるから　　$2-\log 4=\log e^2-\log 4>0$

よって，$x>0$ のとき　　$f(x)>0$

(4)　$x\longrightarrow\infty$ について考えるから，$x>1$ としてよい。

このとき，(3) から　　$0<\log x<\sqrt{x}$

よって　　$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$

4

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)$ とおく．

$f'(x)=\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2$

$f''(x)=-\sin x+x$

$f'''(x)=-\cos x+1\geqq 0$

ゆえに，$f''(x)$ は単調に増加する．

$f''(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f''(x)>0$

よって，$f'(x)$ は $x>0$ において単調に増加する．

$f'(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x>0$ において単調に増加する．

$f(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>0$

すなわち　$x-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x$　……①

$x>0$ のとき $f''(x)>0$ であるから　$\sin x<x$　……②

①，② から　$x-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x<x$

(2)　(1)より，$k=1$，2，……，n のとき　$\dfrac{\sqrt{k}}{n}-\dfrac{k\sqrt{k}}{6n^3}<\sin\left(\dfrac{\sqrt{k}}{n}\right)<\dfrac{\sqrt{k}}{n}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k}}{n}\left(\dfrac{\sqrt{k}}{n}-\dfrac{k\sqrt{k}}{6n^3}\right)<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k}}{n}\sin\left(\dfrac{\sqrt{k}}{n}\right)<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k}}{n}\cdot\dfrac{\sqrt{k}}{n}$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{6n^4}\right)<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k}}{n}\sin\left(\dfrac{\sqrt{k}}{n}\right)<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{6n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n(n+1)}{2n^2}-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{36n^4}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{36n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\right\}=\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$

よって，はさみうちの原理から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k}}{n}\sin\left(\dfrac{\sqrt{k}}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$

5

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$\sqrt{e}$

解説

(1)　$f(x)=x-\log(1+x)$ とおく。

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$

$f'(x)=0$ のとき　　$x=0$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

ゆえに，$f(x)$ は $x=0$ で最小値 0 をとる。

したがって，$x>-1$ のとき，$f(x)\geqq 0$

すなわち $\log(1+x)\leqq x$ が成り立つ。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

(2)　$g(x)=\log(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ とおく。　　$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}+x-1=\dfrac{x^2}{1+x}$

よって，$x\geqq 0$ のとき，$g'(x)\geqq 0$ より，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

このことと，$g(0)=0$ より，$x\geqq 0$ のとき $g(x)\geqq 0$ すなわち $x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)$ が成り立つ。

(3)　すべての自然数 n に対し $a_n>0$ であるから，両辺の自然対数をとると

$\displaystyle\log a_n=\log\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$

ここで，(1) と (2) の不等式を用いると，$x\geqq 0$ のとき

$x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)\leqq x$

が成り立つから，$x=\dfrac{k}{n^2}>0$ とおくと　　$\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^4}\leqq\log\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)\leqq\dfrac{k}{n^2}$

ゆえに　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^4}\right)\leqq\log a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}$

ここで　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^4}\right)=\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-\dfrac{1}{2n^4}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{12n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$

また　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

よって，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}$

であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{2}$

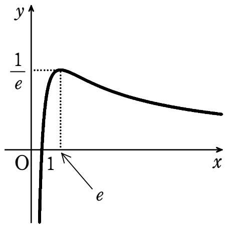
したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{e}$

6

解答　(1)　$x=e$ で極大値 $\frac{1}{e}$，極小値はない

(2)　［図］

(3)　$e^{\pi}>\pi^{e}$



解説

(1)　$f(x)=\frac{\log x}{x}$ から　$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ のとき　$1-\log x=0$　すなわち　$x=e$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

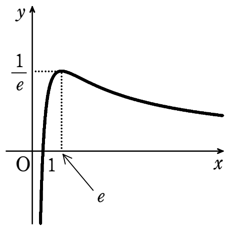
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\frac{1}{e}$	↘

ゆえに，$f(x)$ は $x=e$ で極大値 $\frac{1}{e}$ をとる。

極小値はない。

(2)　$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$，$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$ であるから，

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



(3)　(1) の増減表から，$f(x)$ は $x\geqq e$ の範囲で単調に減少する。

これと $e<\pi$ より　$f(e)>f(\pi)$

すなわち　$\frac{\log e}{e}>\frac{\log\pi}{\pi}$

よって　$\pi\log e>e\log\pi$

すなわち　$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$

底 e は 1 より大きいから　$e^{\pi}>\pi^{e}$

7

解答　(1)　$x=e$ のとき極大値 $e^{\frac{1}{e}}$　(2)　略

解説

(1)　$x>0$ であるから，$f(x)>0$ である。

$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると　$\log f(x)=\frac{1}{x}\log x$

両辺を x で微分すると　$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\log x)$

したがって　$f'(x)=f(x)\cdot\frac{1}{x^2}(1-\log x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$

$f'(x)=0$ とすると，$1-\log x=0$ から　$x=e$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘

したがって，$f(x)$ は $x=e$ のとき極大値 $e^{\frac{1}{e}}$ をとる。

(2)　(1) より，関数 $f(x)$ は $x\geqq e$ で単調に減少し，$e<3$ であるから

$f(e)>f(3)$　すなわち　$e^{\frac{1}{e}}>3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$

8

解答　$a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

解説

$a^x\geqq x$ $(x\geqq 0)$ ……①　は $x=0$ のとき成り立つ．

$x>0$ の範囲で ① の両辺の対数をとると　$x\log a\geqq\log x$

したがって，$\log a\geqq\frac{\log x}{x}$ ……②　と変形される．

$f(x)=\frac{\log x}{x}$ とおくと　$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=e$

$x>0$ での $f(x)$ の増減表は右のようになる．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	極大	↘

したがって，$f(x)$ の最大値は $f(e)=\frac{1}{e}$ である．

よって，② が $x>0$ の範囲で常に成り立つための条件は

$\log a\geqq\frac{1}{e}$　すなわち　$a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

これが求める a の値の範囲である．

9

解答　証明略，$-\frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$

解説

$f'(x)=-e^{-x}\cos x+e^{-x}(-\sin x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$f''(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)-e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$x>0$ であるから　$x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$　$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$

以下では，n は自然数とする。

$k=2n-1$ のとき　$\sin\left(\frac{3}{4}\pi+k\pi\right)=\sin\frac{7}{4}\pi<0$　ゆえに　$f''\left(\frac{3}{4}\pi+k\pi\right)<0$

$k=2(n-1)$ のとき　$\sin\left(\frac{3}{4}\pi+k\pi\right)=\sin\frac{3}{4}\pi>0$　ゆえに　$f''\left(\frac{3}{4}\pi+k\pi\right)>0$

よって，$k=2(n-1)$ のとき極小値をとるから　$x_n=\frac{3}{4}\pi+2(n-1)\pi$

ここで　$f(x_n)=e^{-\left\{\frac{3}{4}\pi+2(n-1)\pi\right\}}\cos\left(\frac{3}{4}\pi+2(n-1)\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}(e^{-2\pi})^{n-1}$

よって，数列 $\{f(x_n)\}$ は初項 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$，公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列である。

公比 $e^{-2\pi}$ は $0<e^{-2\pi}<1$ であるから，無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}}{1-e^{-2\pi}}=-\frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$$

10

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　0

解説

(1)　$f(x)=e^x-(1+x)$ とする。　$f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x>0$ で単調に増加する。

さらに，$f(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき　$f(x)>0$　すなわち　$e^x>1+x$

(2)　以下，$x>0$ とする。

$e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)>0$ ……① が成り立つことを n に関する数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき

① は　$e^x-(1+x)>0$

(1) から，この不等式は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)>0$

$g(x)=e^x-\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right\}$ とおくと

$g'(x)=(e^x)'-\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right\}'$

$=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)>0$

よって，$g(x)$ は単調に増加する。

$g(0)=0$ であるから　$g(x)>0$

すなわち　$e^x-\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right\}>0$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して ① は成り立つ。

したがって，$x>0$ のとき $e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$　が成り立つ。

(3)　$x>0$ のとき，(2) から　$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

よって　$\frac{e^x}{x^n}>\frac{x}{(n+1)!}>0$　ゆえに　$0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

$\boxed{1}$

解答 (1) $t=4$ のとき $v=-8$，$\alpha=4$；$t=6$ のとき $v=12$，$\alpha=16$

(2) 速さ，加速度の大きさの順に

① $2\sqrt{1+t^2}$，2　② $\sqrt{4+9e^{2t}}$，$3e^t$　③ $\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$，$\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$

④ a，a

解説

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-20t+24$ ……①，$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=6t-20$ ……②

$x=0$ とすると　$t^3-10t^2+24t=0$

ゆえに　$t(t-4)(t-6)=0$　　よって　$t=0$，4，6

$t>0$ で点Pが原点に戻るのは $t=4$，6 のときである。

したがって，①，②から

$t=4$ のとき　$v=3\cdot4^2-20\cdot4+24=-8$，$\alpha=6\cdot4-20=4$

$t=6$ のとき　$v=3\cdot6^2-20\cdot6+24=12$，$\alpha=6\cdot6-20=16$

(2) ① $\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t$ であるから　$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(2t)^2}=2\sqrt{1+t^2}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$ であるから　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+2^2}=2$

② $\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=3e^t$ であるから　$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(3e^t)^2}=\sqrt{4+9e^{2t}}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=3e^t$ であるから　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+(3e^t)^2}=3e^t$

③ $\dfrac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$，$\dfrac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$ であるから

$|\vec{v}|=\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+(e^t+e^{-t})^2}=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^t+e^{-t}$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^t-e^{-t}$ であるから

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(e^t+e^{-t})^2+(e^t-e^{-t})^2}=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$

④ $\dfrac{dx}{dt}=-a\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=a\cos t$，$a>0$ であるから

$|\vec{v}|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}=a$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-a\sin t$ であるから

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-a\cos t)^2+(-a\sin t)^2}=a$

$\boxed{2}$

解答 (1) (ア) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}$　(イ) $1-\dfrac{x}{2}$　(ウ) x　(エ) $-1+x$

(2) (ア) 0.485　(イ) 0.554　(ウ) 7.071　(エ) 9.990

解説

(1) (ア) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

よって　$f(2)=\dfrac{1}{2}$，$f'(2)=-\dfrac{1}{4}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2+x}\fallingdotseq f(2)+f'(2)x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}$

別解 $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{1}{(2+x)^2}$

$f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f'(0)=-\dfrac{1}{4}$

よって　$f(x)\fallingdotseq\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}$

(イ) $f(x)=\sqrt{x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

よって　$f(1)=1$，$f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$\sqrt{1-x}=\sqrt{1+(-x)}=f(1+(-x))$ であるから

$\sqrt{1-x}\fallingdotseq f(1)+f'(1)\cdot(-x)=1-\dfrac{x}{2}$

別解 $f(x)=\sqrt{1-x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$f(0)=1$，$f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

よって　$f(x)\fallingdotseq1-\dfrac{x}{2}$

(ウ) $f(x)=\sin x$ とすると　$f'(x)=\cos x$

よって　$f(0)=0$，$f'(0)=1$

ゆえに　$\sin x\fallingdotseq f(0)+f'(0)x=x$

(エ) $f(x)=\tan x$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2x}$

よって　$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$，$f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=2$

$x\fallingdotseq0$ のとき $\dfrac{x}{2}\fallingdotseq0$ であるから

$\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\fallingdotseq f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{x}{2}=-1+x$

別解 $f(x)=\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$f(0)=-1$，$f'(0)=1$

よって　$f(x)\fallingdotseq-1+x$

(2) (ア) $\cos61^\circ=\cos(60^\circ+1^\circ)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{180}\right)$

$f(x)=\cos x$ とすると　$f'(x)=-\sin x$

よって　$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$\cos61^\circ=f\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{180}\right)\fallingdotseq f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\dfrac{\pi}{180}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}=0.5-\dfrac{1.732\times3.142}{360}$

$\fallingdotseq0.5000-0.0151=0.4849\fallingdotseq0.485$

別解 $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$ とすると　$f'(x)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

$f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f'(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{180}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{180}\right)\fallingdotseq f(0)+f'(0)\cdot\dfrac{\pi}{180}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}\fallingdotseq0.485$

(イ) $\tan29^\circ=\tan(30^\circ-1^\circ)=\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{180}\right)$

$f(x)=\tan x$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2x}$

よって　$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{4}{3}$

ゆえに　$\tan29^\circ=f\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{180}\right)\fallingdotseq f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\left(-\dfrac{\pi}{180}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{\pi}{180}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{135}$

$=\dfrac{1.732}{3}-\dfrac{3.142}{135}\fallingdotseq0.5773-0.0233=0.554$

別解 $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}$

$f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$f'(0)=-\dfrac{4}{3}$

よって　$\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{180}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{180}\right)\fallingdotseq f(0)+f'(0)\cdot\dfrac{\pi}{180}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\pi}{180}\fallingdotseq0.554$

(ウ) $\sqrt{50}=\sqrt{49+1}=7\sqrt{1+\dfrac{1}{49}}$

$f(x)=\sqrt{x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

よって　$f(1)=1$，$f'(1)=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\sqrt{1+\dfrac{1}{49}}=f\left(1+\dfrac{1}{49}\right)\fallingdotseq f(1)+f'(1)\cdot\dfrac{1}{49}$

$=1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{49}=1+\dfrac{1}{98}$

よって　$\sqrt{50}\fallingdotseq7\left(1+\dfrac{1}{98}\right)=7+\dfrac{1}{14}\fallingdotseq7.071$

別解 $f(x)=\sqrt{1+x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$

よって　$7\sqrt{1+\dfrac{1}{49}}=7f\left(\dfrac{1}{49}\right)\fallingdotseq7\left\{f(0)+f'(0)\cdot\dfrac{1}{49}\right\}$

$=7\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{49}\right)\fallingdotseq7.071$

(エ) $\sqrt[3]{997}=\sqrt[3]{1000-3}=\sqrt[3]{1000(1-0.003)}=10\{1+(-0.003)\}^{\frac{1}{3}}$

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

よって　$f(1)=1$，$f'(1)=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\{1+(-0.003)\}^{\frac{1}{3}}=f(1+(-0.003))\fallingdotseq f(1)+f'(1)\cdot(-0.003)$

$$=1+\frac{1}{3}\cdot(-0.003)=0.999$$

よって　$\sqrt[3]{997}\fallingdotseq 10\times 0.999=9.990$

別解　$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ とすると　$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{3}$$

よって　$10\{1+(-0.003)\}^{\frac{1}{3}}=10f(-0.003)\fallingdotseq 10\{f(0)+f'(0)\cdot(-0.003)\}$

$$=10\left\{1+\frac{1}{3}(-0.003)\right\}=9.990$$

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(x)=\sqrt{x}\log x+1$ とおくと

$$f'(x)=\frac{\log x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\log x+2}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{e^2}$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小	↗

また　$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}>0$

よって，$x>0$ のとき，$f(x)>0$ すなわち $\sqrt{x}\log x>-1$ が成り立つ。

(2)　$x\longrightarrow +0$ のときを考えるから，$0<x<1$ の範囲で考える。

$0<x<1$ のとき，$\sqrt{x}\log x<0$ であるから，(1) より　$-1<\sqrt{x}\log x<0$

両辺に $\sqrt{x}$ を掛けると　$-\sqrt{x}<x\log x<0$

$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{x\to+0}x\log x=0$

4

解答　(1)　略　　(2)　$\frac{1}{2}$

解説

(1)　$f(x)=x-\log(1+x)$ とおくと　$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$

$x>0$ のとき　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

このことと，$f(0)=0$ から，$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

したがって，$x\geqq 0$ のとき　$\log(1+x)\leqq x$

$g(x)=\log(1+x)-(x-x^2)$ とおくと　$g'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-2x)=\frac{x+2x^2}{1+x}$

$x>0$ のとき　$g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

このことと，$g(0)=0$ から，$x\geqq 0$ のとき　$g(x)\geqq 0$

したがって，$x\geqq 0$ のとき　$x-x^2\leqq\log(1+x)$

以上から，$x\geqq 0$ のとき　$x-x^2\leqq\log(1+x)\leqq x$

(2)　$n>0$，$k>0$ であるから　$\frac{k}{n^3}\geqq 0$

よって，(1) の不等式の x を $\frac{k}{n^3}$ としても不等式は成り立つから

$$\frac{k}{n^3}-\left(\frac{k}{n^3}\right)^2\leqq\log\left(1+\frac{k}{n^3}\right)\leqq\frac{k}{n^3}$$

辺々を $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n^2$ まで足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\frac{k}{n^3}-\left(\frac{k}{n^3}\right)^2\right\}\leqq\sum_{k=1}^{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n^3}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k}{n^3}$$

よって　$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\left(\frac{k}{n^3}-\frac{k^2}{n^6}\right)\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n^3}\right)\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k}{n^3}$

ここで　$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k}{n^3}=\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{2}n^2(n^2+1)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k^2}{n^6}=\frac{1}{n^7}\cdot\frac{1}{6}n^2(n^2+1)(2n^2+1)=\frac{1}{6n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(2+\frac{1}{n^2}\right)$$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{k}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\left(\frac{k}{n^3}-\frac{k^2}{n^6}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{6n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(2+\frac{1}{n^2}\right)\right\}=\frac{1}{2}$$

ゆえに，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\log\left(1+\frac{k}{n^3}\right)=\frac{1}{2}$

5

解答　(1)　略　　(2)　$e^{-\frac{1}{4}}$

解説

(1)　$f(x)=-x-\log(1-x)$ とおくと

$$f'(x)=-1+\frac{1}{1-x}=\frac{x}{1-x}$$

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$\frac{x}{1-x}\geqq 0$ であるから　$f'(x)\geqq 0$

よって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ において単調に増加する。

また，$f(0)=0$ であるから　$f(x)\geqq 0$

ゆえに　$\log(1-x)\leqq -x$

$g(x)=\log(1-x)+x^2+x$ とおくと　$g'(x)=-\frac{1}{1-x}+2x+1=\frac{x(2x-1)}{x-1}$

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$\frac{x(2x-1)}{x-1}\geqq 0$ であるから　$g'(x)\geqq 0$

よって，$g(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ において単調に増加する。

また，$g(0)=0$ であるから　$g(x)\geqq 0$　　ゆえに　$-x^2-x\leqq\log(1-x)$

したがって，$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき　$-x^2-x\leqq\log(1-x)\leqq -x$

(2)　$1\leqq k\leqq n$ (k は自然数) のとき　$0<\frac{k}{2n^2}\leqq\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}\leqq\frac{1}{2}$

よって　$1-\frac{k}{2n^2}>0$

ゆえに，$a_n=\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\left(1-\frac{2}{2n^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n}{2n^2}\right)$ の両辺は正であるから，自然対数をとると　$\log a_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)$

ここで，$0\leqq\frac{k}{2n^2}\leqq\frac{1}{2}$ であるから，(1) より

$$-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\left(\frac{k}{2n^2}\right)\leqq\log\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)\leqq-\left(\frac{k}{2n^2}\right)$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\left(\frac{k}{2n^2}\right)\right\}\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}-\left(\frac{k}{2n^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\left(\frac{k}{2n^2}\right)\right\}=-\frac{1}{4n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=-\frac{1}{4n^4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\left(\frac{k}{2n^2}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{24n}-\frac{1+\frac{1}{n}}{4}\right\}=-\frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}-\left(\frac{k}{2n^2}\right)=-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=-\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}-\left(\frac{k}{2n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}-\frac{1+\frac{1}{n}}{4}=-\frac{1}{4}$

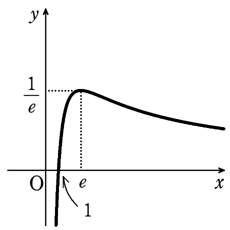
ゆえに，はさみうちの原理から　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1-\frac{k}{2n^2}\right)=-\frac{1}{4}$

すなわち　$\lim_{n\to\infty}\log a_n=-\frac{1}{4}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-\frac{1}{4}}$

6

解答　(1)　［図］　　(2)　略　　(3)　略



解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

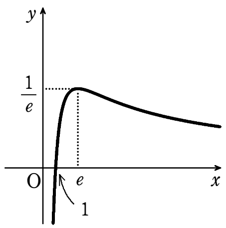
$f'(x)=0$ とすると　$x=e$

よって，$f(x)$ の増減表は左下のようになる。

また　$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は右下の図のようになる。

x	0	…	e	…
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\frac{1}{e}$	↘



(2)　(1) より，$f(x)$ は $x \geqq e$ で単調に減少する。

$e<\pi$ であるから　$f(e)>f(\pi)$　　すなわち　$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log \pi}{\pi}$

両辺に πe を掛けて　$\pi\log e>e\log \pi$　　よって　$\log e^{\pi}>\log \pi^{e}$

底 e は 1 より大きいから　$e^{\pi}>\pi^{e}$

(3)　(1) より，$f(x)$ は $0<x\leqq e$ で単調に増加する。

$e<\pi<4$ より $\sqrt{e}<\sqrt{\pi}<2\,(<e)$ であるから　$f(\sqrt{e})<f(\sqrt{\pi})$

すなわち　$\dfrac{\log\sqrt{e}}{\sqrt{e}}<\dfrac{\log\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$

両辺に $2\sqrt{\pi e}$ を掛けて　$\sqrt{\pi}\log e<\sqrt{e}\log\pi$

よって　$\log e^{\sqrt{\pi}}<\log \pi^{\sqrt{e}}$

底 e は 1 より大きいから　$e^{\sqrt{\pi}}<\pi^{\sqrt{e}}$

7

解答　略

解説

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ であるから，関数 $y=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$ の増減について調べる。

$y=x^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると　$\log y=\dfrac{\log x}{x}$

両辺を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

よって　$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$

$y'=0$ とすると　$x=e$

ゆえに，y の増減表は右のようになる。

x	0	…	e	…
y'	／	$+$	0	$-$
y	／	↗	極大	↘

$0<x\leqq e$ の範囲において y は単調に増加し，さらに

$2<e$ であるから　$2^{\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{e}}$

すなわち　$\sqrt{2}<e^{\frac{1}{e}}$

8

解答　$0<a<1$ または $a=e^{\frac{1}{e}}$ のとき 1 個，

$1<a<e^{\frac{1}{e}}$ のとき 2 個，

$e^{\frac{1}{e}}<a$ のとき 0 個

解説

$0<a<1$ のとき　$a^0=1$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}a^x=0$，関数 $y=a^x$ は単調に減少．

ゆえに，関数 $y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の個数は 1 個．

$1<a$ のとき　$f(x)=a^x-x$ とおくと，$f'(x)=(\log a)a^x-1$

ゆえに，増減表は次のようになる．

x	…	$-\log_a(\log a)$	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x\log a)\left(\frac{e^{x\log a}}{x\log a}-\frac{1}{\log a}\right)$

ここで，$x\log a=t$ とおくと，

$x\longrightarrow+\infty$ のとき $t\longrightarrow+\infty$ であるから

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}t\left(\frac{1}{\frac{t}{e^t}}-\frac{1}{\log a}\right)=+\infty$$

よって，$f(x)$ は $x=-\log_a(\log a)$ のとき最小値

$f(-\log_a(\log a))=\dfrac{1}{\log a}\{1+\log(\log a)\}$ をとる．

したがって，

共有点が 1 個 $\Longleftrightarrow$ 最小値が 0 $\Longleftrightarrow \log a=\dfrac{1}{e}\Longleftrightarrow a=e^{\frac{1}{e}}$

共有点が 2 個 $\Longleftrightarrow$ 最小値が負 $\Longleftrightarrow \log(\log a)<-1$

$\Longleftrightarrow 0<\log a<\dfrac{1}{e}\Longleftrightarrow 1<a<e^{\frac{1}{e}}$

共有点が 0 個 $\Longleftrightarrow$ 最小値が正 $\Longleftrightarrow \log(\log a)>-1\Longleftrightarrow \log a>\dfrac{1}{e}$

$\Longleftrightarrow a>e^{\frac{1}{e}}$

以上から，共有点の個数は，

$0<a<1$ または $a=e^{\frac{1}{e}}$ のとき 1 個，

$1<a<e^{\frac{1}{e}}$ のとき 2 個，

$e^{\frac{1}{e}}<a$ のとき 0 個

9

解答　証明略，$\dfrac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}\,(e^{2\pi}-1)}$

解説

$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f''(x)=e^{-x}(\sin x-\cos x)-e^{-x}(\cos x+\sin x)=-2e^{-x}\cos x$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$　$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$

以下では，n は自然数とする。

$k=2n-1$ のとき　$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)<0$　　ゆえに　$f''\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)>0$

$k=2(n-1)$ のとき　$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)>0$　　ゆえに　$f''\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)<0$

ゆえに，$k=2(n-1)$ のとき極大値をとるから　$x_n=\dfrac{\pi}{4}+2(n-1)\pi$

このとき　$f(x_n)=e^{-\left\{\frac{\pi}{4}+2(n-1)\pi\right\}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2(n-1)\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}(e^{-2\pi})^{n-1}$

よって，$\{f(x_n)\}$ は初項 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$，公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列である。

公比 $e^{-2\pi}$ は $0<e^{-2\pi}<1$ であるから，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}\,(e^{2\pi}-1)}$$

10

解答　(1)　略　　(2)　0

(3)　$x=n-1$ で最大値 $(n-1)^{n-1}e^{-(n-1)}$，変曲点の x 座標は $n-1\pm\sqrt{n-1}$

解説

(1)　$g_n(x)=e^x-\dfrac{x^n}{n!}$ とおく。

すべての自然数 n に対して，$x\geqq 0$ のとき $g_n(x)>0$ が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1]　$n=1$ のとき

$g_1(x)=e^x-x$ であるから　$g_1{}'(x)=e^x-1$　　$x\geqq 0$ より　$g_1{}'(x)\geqq 0$

よって，$g_1(x)$ は単調に増加する。

このことと，$g_1(0)=1>0$ より，$x\geqq 0$ のとき $g_1(x)>0$ が成り立つ。

よって，$n=1$ のときは成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき

$g_k(x)>0$ が成り立つと仮定する。

$g_{k+1}(x)=e^x-\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ であるから　$g_{k+1}{}'(x)=e^x-\dfrac{x^k}{k!}=g_k(x)$

ここで，仮定より $g_k(x)>0$ が成り立つので，$g_{k+1}{}'(x)>0$ となり，$g_{k+1}(x)$ は単調に増加する。

このことと $g_{k+1}(0)=1>0$ より，$x\geqq 0$ のとき $g_{k+1}(x)>0$ が成り立つ。

したがって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して，$x\geqq 0$ のとき $g_n(x)>0$ すなわち $e^x>\dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つ。

(2)　(1) より，$x\geqq 0$ のとき，$e^x>\dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つから，$x>0$ のとき，

$0<x^{n-1}e^{-x}<\dfrac{n!}{x}$　が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{n-1}e^{-x}=0$

(3)　$f(x)=x^{n-1}e^{-x}$ より，$n\geqq 3$ のとき

$f'(x)=(n-1)x^{n-2}e^{-x}-x^{n-1}e^{-x}=x^{n-2}e^{-x}\{(n-1)-x\}$

$f''(x)=-e^{-x}\{(n-1)x^{n-2}-x^{n-1}\}+e^{-x}\{(n-1)(n-2)x^{n-3}-(n-1)x^{n-2}\}$

$=x^{n-3}e^{-x}\{x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)\}$

$x>0$ であるから，$f'(x)=0$ のとき　$x=n-1$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$n-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$(n-1)^{n-1}e^{-(n-1)}$	↘

したがって，$x>0$ の範囲における $f(x)$ の最大値は　$(n-1)^{n-1}e^{-(n-1)}$

また，$f''(x)=0$ のとき

$$x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)=0$$

$$x^2-2(n-1)x+(n-1)^2=n-1$$

$$\{x-(n-1)\}^2=n-1$$

$n\geqq3$ であるから　$x=n-1\pm\sqrt{n-1}$

$x>0$ のとき，$x^{n-3}e^{-x}>0$ であるから，$f''(x)$ の符号は $x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)$ の符号により決まる。

また，$n\geqq3$ であるから，$n-1-\sqrt{n-1}$ と $n-1+\sqrt{n-1}$ は相異なる実数である。

したがって，$x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)$ の符号は，$x=n-1-\sqrt{n-1}$ の前後で正から負に変わり，$x=n-1+\sqrt{n-1}$ の前後で負から正に変わる。

よって，$f(x)$ の変曲点の x 座標は　$x=n-1\pm\sqrt{n-1}$

1

解答　(ア)　$x^2-\dfrac12$　(イ)　$\dfrac54$　(ウ)　$\dfrac{\sqrt{31}}{8}$

解説

$y=\dfrac12\cos2t=\dfrac12(1-2\sin^2t)=\dfrac12(1-2x^2)$ であるから，点Pは曲線 $y+{}^{ア}x^2-\dfrac12=0$ 上を動く。

また　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(\cos t,\ -\sin2t)$

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(-\sin t,\ -2\cos2t)$

$|\vec{v}|^2=(\cos t)^2+(-\sin2t)^2=\cos^2t(1+4\sin^2t)=(1-\sin^2t)(1+4\sin^2t)$

であるから，$p=\sin^2t$ とおくと

$$|\vec{v}|=\sqrt{|\vec{v}|^2}=\sqrt{(1-p)(1+4p)}=\sqrt{-4\left(p-\frac38\right)^2+\frac{25}{16}}$$

$0\leqq p\leqq1$ であるから，$p=\dfrac38$ のとき，$|\vec{v}|$ は最大値 $\sqrt{\dfrac{25}{16}}={}^{イ}\dfrac54$ をとる。

また　$|\vec{\alpha}|^2=(-\sin t)^2+(-2\cos2t)^2=\sin^2t+4(1-2\sin^2t)^2$

よって　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{|\vec{\alpha}|^2}=\sqrt{p+4(1-2p)^2}=\sqrt{16\left(p-\dfrac{15}{32}\right)^2+\dfrac{31}{64}}$

$0\leqq p\leqq1$ であるから，$p=\dfrac{15}{32}$ のとき，$|\vec{\alpha}|$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{31}{64}}={}^{ウ}\dfrac{\sqrt{31}}{8}$ をとる。

2

解答　(1)　$v=r|\omega|$　(2)　略

解説

(1)　OP_0 と x 軸の正の部分 Ox とのなす角を β とする。

出発してから t 秒後の位置を $P(x,\ y)$ とし，$\angle POx=\theta$ とすると

$$\theta=\omega t+\beta$$

よって　$x=r\cos(\omega t+\beta)$，$y=r\sin(\omega t+\beta)$

したがって，Pの速度ベクトル $\vec{v}$，加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は，$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$ の成分をそれぞれ t で微分して

$$\vec{v}=(-r\omega\sin(\omega t+\beta),\ r\omega\cos(\omega t+\beta))$$

$$\vec{\alpha}=(-r\omega^2\cos(\omega t+\beta),\ -r\omega^2\sin(\omega t+\beta))$$

よって　$v=|\vec{v}|=\sqrt{r^2\omega^2\sin^2(\omega t+\beta)+r^2\omega^2\cos^2(\omega t+\beta)}=\sqrt{r^2\omega^2}=r|\omega|$

(2)　$\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=r^2\omega^3\sin(\omega t+\beta)\cos(\omega t+\beta)-r^2\omega^3\cos(\omega t+\beta)\sin(\omega t+\beta)$

$=0$

よって　$\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=0$　かつ　$\vec{v}\neq\vec{0}$，$\vec{\alpha}\neq\vec{0}$

したがって　$\vec{v}\perp\vec{\alpha}$

3

解答　(1)　$h=4$ (cm)　(2)　$v=\dfrac49$ (cm/秒)　(3)　$w=\dfrac29\pi$ (cm²/秒)

解説

(1)　5秒後の水量について　$\dfrac{\pi}{4}(h^2+h)=5\pi$

よって　$h^2+h=20$　　$h>0$ であるから　$h=4$ (cm)

(2)　改めて t 秒後の水面の高さを h cm とすると

$\dfrac{\pi}{4}(h^2+h)=\pi t$　　整理して　$h^2+h=4t$

この両辺を t で微分すると　$(2h+1)\dfrac{dh}{dt}=4$

(1) より，$t=5$ のとき $h=4$ であるから　$(2\cdot4+1)\dfrac{dh}{dt}=4$

よって　$v=\dfrac{dh}{dt}=\dfrac49$ (cm/秒)

(3)　t 秒後の水面の面積を S cm² とすると　$S=\dfrac{\pi}{2}\left(h+\dfrac12\right)$

これを t で微分して　$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{dh}{dt}$

(2) より，$t=5$ のとき $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac49$ であるから　$w=\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac49=\dfrac29\pi$ (cm²/秒)

4

解答　(1)　0　(2)　1　(3)　$a=0$，$b=1$　(4)　$A=1$，$B=0$，$C=\dfrac12$

解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

よって　$f'(1)=0$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}=1$

(3)　$f''(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2-2x+2}=\dfrac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$

よって，x が1に十分近いとき

$$f'(x)\fallingdotseq f'(1)+f''(1)(x-1)=0+1\cdot(x-1)=x-1$$

したがって　$a=0$，$b=1$

別解　x が1に十分近いとき，(2) から　$\dfrac{f'(x)}{x-1}\fallingdotseq1$

よって　$f'(x)\fallingdotseq x-1$　　ゆえに　$a=0$，$b=1$

(4)　(3) の結果から，x が1に十分近いとき　$f'(x)\fallingdotseq x-1$

積分すると　$f(x)\fallingdotseq\dfrac12(x-1)^2+K$　(K は積分定数)

$f(1)=1$ から　$K=1$　　よって　$f(x)\fallingdotseq\dfrac12(x-1)^2+1$

したがって　$A=1$，$B=0$，$C=\dfrac12$

5

解答　(1)　略　(2)　略

(3)　$a>\dfrac{1}{2e}$ のとき 0個；$a\leqq0$，$a=\dfrac{1}{2e}$ のとき 1個；$0<a<\dfrac{1}{2e}$ のとき 2個

解説

(1)　$f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{e}-\log x$ $(x>0)$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{e\sqrt{x}}-\dfrac1x=\dfrac{\sqrt{x}-e}{ex}$

$f'(x)=0$ とすると　$\sqrt{x}-e=0$

よって　$x=e^2$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	0	↗

ゆえに，$f(x)$ は $x=e^2$ で最小値 0 をとる。

したがって，$x>0$ のとき，$f(x)\geqq 0$　すなわち　$\log x\leqq\dfrac{2\sqrt{x}}{e}$　が成り立つ。

(2)　$x\geqq 1$ において，(1) より　　$0\leqq\log x\leqq\dfrac{2\sqrt{x}}{e}$

各辺を $x^2\,(>0)$ で割ると　　$0\leqq\dfrac{\log x}{x^2}\leqq\dfrac{2}{ex\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{ex\sqrt{x}}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$

(3)　$e^{ax^2}=x$ ……①　とする。

$e^{ax^2}>0$ であるから，① より　　$x>0$

よって，① の両辺の自然対数をとると　　$\log e^{ax^2}=\log x$

すなわち　　$ax^2=\log x$　　　よって　　$a=\dfrac{\log x}{x^2}$　……②

求める実数解の個数は，② の異なる実数解の個数と一致する。

$g(x)=\dfrac{\log x}{x^2}\ (x>0)$ とおくと　　$g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\log x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

$g'(x)=0$ とすると，$1-2\log x=0$ から

　$x=\sqrt{e}$

$g(x)$ の増減表は右のようになる。

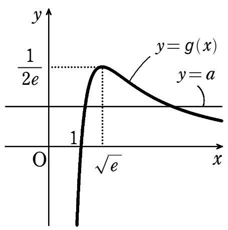
x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(x)$	／	$+$	0	$-$
$g(x)$	／	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘

また　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=-\infty$

(2) より　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=0$

よって，$y=g(x)$ のグラフは右の図のようになる。

② の異なる実数解の個数は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数と一致する。



　$a>\dfrac{1}{2e}$ のとき　0 個

　$a\leqq 0,\ a=\dfrac{1}{2e}$ のとき　1 個

　$0<a<\dfrac{1}{2e}$ のとき　2 個

6

解答　証明略，0

解説

(前半)　$F(x)=\sin x-x\cos x$ とおくと

　$F'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

ゆえに，$0<x<\pi$ のとき　　$F'(x)>0$

よって，$F(x)$ は $0\leqq x\leqq\pi$ で単調に増加する。

このことと，$F(0)=0$ から，$0<x<\pi$ のとき　　$F(x)>0$

ゆえに，$0<x<\pi$ のとき　　$x\cos x<\sin x$　……①

(後半)　$x\longrightarrow+0$ であるから，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

このとき，① および $\sin x<x$，$x^2>0$ であることから

$$0<\frac{x-\sin x}{x^2}<\frac{x-x\cos x}{x^2}$$

$\dfrac{x-x\cos x}{x^2}=\dfrac{1-\cos x}{x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ であり，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-x\cos x}{x^2}=0$

したがって　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$

7

解答　(1)　$x=e$ で最大値 $\dfrac{1}{e}$　　(2)　$n=1,\ 2$

解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　　$\log x=1$　　　よって　$x=e$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

ゆえに，$f(x)$ は $x=e$ で最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

(2)　自然数 n が $n^{n+1}<(n+1)^n$ ……① を満たすとき，

両辺の自然対数をとると

　$(n+1)\log n<n\log(n+1)$

両辺を $n(n+1)\,(>0)$ で割ると　　$\dfrac{\log n}{n}<\dfrac{\log(n+1)}{n+1}$　……②

すなわち，① は $f(n)<f(n+1)$ と同値である。

(1) の増減表から，$f(x)$ は $0<x<e$ で増加し，$x>e$ で減少する。

よって，$n>e$ のとき，不等式 ② は成り立たない。

したがって，$0<n\leqq e$ であることが必要である。

n は自然数であり，$e=2.7\cdots\cdots$ であるから　　$n=1,\ 2$

[1]　$n=1$ のとき

　(① の左辺)$=1^2=1$，　(① の右辺)$=2^1=2$

　よって，不等式 ① は成り立つ。

[2]　$n=2$ のとき

　(① の左辺)$=2^3=8$，　(① の右辺)$=3^2=9$

　よって，不等式 ① は成り立つ。

[1]，[2] から，求める自然数 n は　　$n=1,\ 2$

参考　[1] は，次のように考えてもよい。

　$n=1$ のとき，$n+1=2$ であり　　$0<n<n+1<e$

　$f(x)$ は $0<x<e$ において増加するから　　$f(n)<f(n+1)$

　よって，② すなわち ① が成り立つ。

　なお，[2] の $n=2$ のときは，$0<n<e<n+1$ であるから，この方法は使えない。

　解答のように，$n=2$ を代入して調べるのがよい。

8

解答　略

解説

$y=x^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると　　$\log y=\log x^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\log x}{x}$

両辺を x で微分すると　　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

よって　　$y'=\dfrac{x^{\frac{1}{x}}(1-\log x)}{x^2}$

$x>e$ のとき $1-\log x<0$ であるから　　$y'<0$

したがって，y は $x>e$ において単調に減少する。

よって，$e<a<b$ のとき　　$a^{\frac{1}{a}}>b^{\frac{1}{b}}$

両辺を ab 乗すると　　$a^b>b^a$

9

解答　$\dfrac{2^a-2a}{a-1}<\dfrac{2^b-2b}{b-1}$

解説

$f(x)=\dfrac{2^x-2x}{x-1}$ とおき，$0<x<1$ における増減を調べる。

$$f'(x)=\frac{(2^x\log 2-2)(x-1)-(2^x-2x)}{(x-1)^2}=\frac{\{(x-1)\log 2-1\}2^x+2}{(x-1)^2}$$

この分子を $g(x)=\{(x-1)\log 2-1\}2^x+2$ とおくと

　$g'(x)=(\log 2)2^x+\{(x-1)\log 2-1\}\cdot 2^x\log 2$

　　$=(x-1)2^x(\log 2)^2$

$0<x<1$ のとき $g'(x)<0$ であるから，$g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において単調に減少する。

よって，$0<x<1$ のとき

　$g(1)<g(x)<g(0)$　すなわち　$0<g(x)<1-\log 2$

よって，$g(x)>0$ であるから　　$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}>0$

ゆえに，$f(x)$ は $0<x<1$ において単調に増加する。

したがって，$0<a<b<1$ のとき

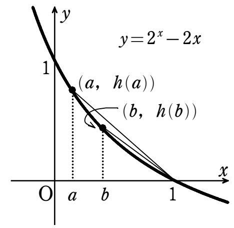
　$f(a)<f(b)$　すなわち　$\dfrac{2^a-2a}{a-1}<\dfrac{2^b-2b}{b-1}$

参考　$h(x)=2^x-2x$ とおくと

　$h'(x)=2^x\log 2-2$，　$h''(x)=2^x(\log 2)^2$

　$0<x<1$ のとき $h''(x)>0$ であるから，$y=h(x)$ のグラフはこの区間で下に凸である。

　$\dfrac{2^x-2x}{x-1}$ すなわち $\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$ は点 $(x,\ h(x))$ と点 $(1,\ 0)$ を通る直線の傾きであり，図からもこの傾きが単調に増加することがわかる。



10

解答　(1)　$f'(x)=\dfrac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}$　　(2)　略

　(3)　順に $\left(\dfrac{1}{15}\right)^{\frac{1}{14}}$，$\left(\dfrac{1}{13}\right)^{\frac{1}{12}}$，$\left(\dfrac{1}{11}\right)^{\frac{1}{10}}$

解説

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(1+x)}{x}$ から

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}\cdot x-\log(1+x)}{x^2}=\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}$$

(2)　$g(x)=x-(1+x)\log(1+x)$ とおく。

$x>0$ のとき，$x^2>0$，$1+x>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号に一致する。

$$g'(x)=1-\{\log(1+x)+1\}=-\log(1+x)$$

$x>0$ のとき，$\log(1+x)>0$ であるから　　$g'(x)<0$

よって，$x>0$ で $g(x)$ は単調に減少し，$g(0)=0$ であるから，

$x>0$ のとき　　$g(x)<0$　　　すなわち　　$f'(x)<0$

よって，$x>0$ で $f(x)$ は単調に減少する。

ゆえに，$0<x<y$ のとき　　$f(x)>f(y)$

すなわち　　$\dfrac{1}{x}\log(1+x)>\dfrac{1}{y}\log(1+y)$

(3)　$a=\left(\dfrac{1}{11}\right)^{\frac{1}{10}}$，$b=\left(\dfrac{1}{13}\right)^{\frac{1}{12}}$，$c=\left(\dfrac{1}{15}\right)^{\frac{1}{14}}$ とおくと

$$\log a=\frac{1}{10}\cdot(-\log 11)=-f(10),\ \log b=\frac{1}{12}\cdot(-\log 13)=-f(12)$$

$$\log c=\frac{1}{14}\cdot(-\log 15)=-f(14)$$

(2) から　　$f(10)>f(12)>f(14)>0$

よって　　$-f(10)<-f(12)<-f(14)$

すなわち　　$\log a<\log b<\log c$　　ゆえに　　$a<b<c$

したがって，大きい方から順に　　$\left(\dfrac{1}{15}\right)^{\frac{1}{14}}$，$\left(\dfrac{1}{13}\right)^{\frac{1}{12}}$，$\left(\dfrac{1}{11}\right)^{\frac{1}{10}}$

$\boxed{11}$

解答　(1)　略

(2)　$a<-\dfrac{4}{e^2}$，$a=0$ のとき　1本，$a=-\dfrac{4}{e^2}$ のとき　2本，

$-\dfrac{4}{e^2}<a<0$ のとき　3本，$a>0$ のとき　0本

解説

(1)　$f(t)=e^t-\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}\right)$ $(t\geqq 0)$ とおくと

$$f'(t)=e^t-1-t-\frac{t^2}{2},\ f''(t)=e^t-1-t,\ f'''(t)=e^t-1$$

$t>0$ のとき $f'''(t)>0$ であるから，$f''(t)$ は単調に増加する。

$f''(0)=0$ であるから，$t>0$ のとき　　$f''(t)>0$

よって，$f'(t)$ は単調に増加する。

$f'(0)=0$ であるから，$t>0$ のとき　　$f'(t)>0$

ゆえに，$f(t)$ は単調に増加する。

$f(0)=0$ であるから，$t>0$ のとき　　$f(t)>0$

したがって，$t>0$ のとき　　$e^t>1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}$

別解　$F(t)=e^{-t}\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}\right)$ $(t\geqq 0)$ とおくと

$$F'(t)=-e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right)+e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)=-\frac{t^3e^{-t}}{6}$$

$t>0$ のとき $F'(t)<0$ であるから，$F(t)$ は単調に減少する。

$F(0)=1$ であるから　　$F(t)<1$

よって　　$e^{-t}\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}\right)<1$

両辺に $e^t\,(>0)$ を掛けて　　$e^t>1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}$

(2)　$y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$ であるから，接点の座標を $(t,\ te^t)$ とおくと，接線の方程式は　　$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)$

すなわち　　$y=(t+1)e^tx-t^2e^t$

これが点 $(0,\ a)$ を通るとき　　$a=-t^2e^t$　…… ①

求める接線の本数は，t についての方程式 ① の実数解の個数に等しい。

$g(t)=-t^2e^t$ とおくと

$$g'(t)=-2te^t-t^2e^t=-t(t+2)e^t$$

$g'(t)=0$ とすると　　$t=-2,\ 0$

よって，$g(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	$-\dfrac{4}{e^2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$

ここで，$-t=s$ とおくと

$$\lim_{t\to-\infty}g(t)=\lim_{s\to\infty}\left(-\frac{s^2}{e^s}\right)$$

$s>0$ のとき，(1) で示した不等式から　　$\dfrac{1}{e^s}<\dfrac{1}{1+s+\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{s^3}{6}}$

よって　　$0<\dfrac{s^2}{e^s}<\dfrac{s^2}{1+s+\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{s^3}{6}}$

$\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{1+s+\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{s^3}{6}}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{s}{6}}=0$ であるから，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{e^s}=0$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}g(t)=0$

また　　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=-\infty$

したがって，$y=g(t)$ のグラフは右の図のようになる。

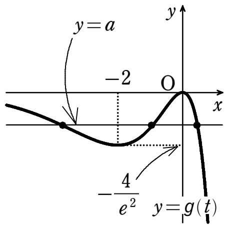
よって，求める接線の本数は

$a<-\dfrac{4}{e^2}$，$a=0$ のとき　　1本

$a=-\dfrac{4}{e^2}$ のとき　　2本

$-\dfrac{4}{e^2}<a<0$ のとき　　3本

$a>0$ のとき　　0本



$\boxed{12}$

解答　(1)　$k=1$　　(2)　$x_n=\left(2n-\dfrac{7}{4}\right)\pi$　　(3)　$\dfrac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$

解説

(1)　$f(x)=e^{-kx}\sin x$ から

$$f'(x)=-ke^{-kx}\sin x+e^{-kx}\cos x=e^{-kx}(-k\sin x+\cos x)$$

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大となるから　　$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

よって　　$-k\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}=0$　　すなわち　　$-\dfrac{k}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$

ゆえに　　$k=1$

逆に，$k=1$ のとき　　$f(x)=e^{-x}\sin x$

$$f'(x)=e^{-x}(-\sin x+\cos x)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\quad\cdots\cdots\ ①$$

$x=\dfrac{\pi}{4}$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に変わるから，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大となり，

$k=1$ は条件を満たす。

したがって　　$k=1$

(2)　① から，$x-\dfrac{\pi}{4}=2k\pi$ (k は整数) すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ の前後で，$f'(x)$ の符号が正から負に変わるから，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ で極大となる。

よって，$x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{\pi}{4}+2\pi$，$x_3=\dfrac{\pi}{4}+4\pi$，…… であるから

$$x_n=\frac{\pi}{4}+2(n-1)\pi=\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi$$

(3)　$f(x_n)=e^{-x_n}\sin x_n=e^{-\frac{\pi}{4}-2(n-1)\pi}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot(e^{-2\pi})^{n-1}$

$0<e^{-2\pi}<1$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ は収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$$

$\boxed{13}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(x)=x\log x-(x-1)\log(x+1)$ とおくと

$$f'(x)=\log x+1-\log(x+1)-\frac{x-1}{x+1}$$

$$=\log x-\log(x+1)+\frac{2}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1-x}{x(x+1)^2}$$

$x\geqq 1$ のとき $f''(x)\leqq 0$ であるから，$f'(x)$ は単調に減少する。

また　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right)=0$

したがって　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。　　また　$f(1)=0$

ゆえに，$x\geqq 1$ のとき $f(x)\geqq 0$ である。

よって，$x\geqq 1$ のとき　$x\log x\geqq(x-1)\log(x+1)$　が成り立つ。

(2)　自然数 n に対して　$(n!)^2\geqq n^n$ …… ①　とする。

[1]　$n=1$ のとき　　左辺 $=(1!)^2=1$，　右辺 $=1^1=1$

よって，左辺≧右辺であり，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$(k!)^2 \geqq k^k \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つと仮定する。

(1) の結果から，$k \geqq 1$ のとき $k^k \geqq (k+1)^{k-1}$ が成り立つ。

これと ② から　$(k!)^2 \geqq (k+1)^{k-1}$

よって　$\{(k+1)!\}^2=\{(k+1)\cdot k!\}^2=(k+1)^2\cdot(k!)^2$

$$\geqq (k+1)^2(k+1)^{k-1}=(k+1)^{k+1}$$

したがって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] により，すべての自然数 n に対して ① が成り立つ。

$\boxed{1}$

解答　$\vec{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}},\ \dfrac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)$，$\vec{\alpha}=\left(-\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2},\ \dfrac{e^s}{(1+e^{2s})^2}\right)$，最大値は $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

解説

$y=e^x$ の両辺を t で微分すると　$\dfrac{dy}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$

よって　$|\vec{v}|^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(e^x\dfrac{dx}{dt}\right)^2=(1+e^{2x})\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$

Pの速さが1であるから　$(1+e^{2x})\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=1$

x 座標が増加する向きに移動しているから　$\dfrac{dx}{dt}>0$

ゆえに　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$　……①

よって　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

したがって，Pが点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}},\ \frac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)$$

① の両辺を t で微分すると

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$=-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

また　$\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(e^x\dfrac{dx}{dt}\right)=e^x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+e^x\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^2}$

したがって，Pが点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度 $\vec{\alpha}$ は

$$\vec{\alpha}=\left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2},\ \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2}\right)$$

また，$|\vec{\alpha}|^2=\dfrac{e^{4x}}{(1+e^{2x})^4}+\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^4}=\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}$

ここで，$e^{2x}=z$ とおくと　$z>0$　　また　$|\vec{\alpha}|^2=\dfrac{z}{(1+z)^3}$

$f(z)=\dfrac{z}{(1+z)^3}$ とおくと　$f'(z)=\dfrac{(1+z)^3-z\cdot 3(1+z)^2}{(1+z)^6}=\dfrac{1-2z}{(1+z)^4}$

$f'(z)=0$ とすると　$z=\dfrac{1}{2}$

$f(z)$ の増減表は右のようになる。

z	0	…	$\frac{1}{2}$	…
$f'(z)$		+	0	−
$f(z)$		↗	極大	↘

よって，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大となるから，$|\vec{\alpha}|$ の

最大値は　$\sqrt{f\left(\dfrac{1}{2}\right)}=\sqrt{\dfrac{4}{27}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a=1$　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　0.095

解説

(1)　$f'(x)=2x-4+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2-2x+1)}{x}=\dfrac{2(x-1)^2}{x}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$　　よって　$a=1$

(2)　$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	1	…
$f'(x)$		+	0	+
$f(x)$		↗	0	↗

よって，$x>a\ (=1)$ のとき　$f(x)>0$

(3)　$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと

$$h'(x)=2(x-1)^2-\frac{2(x-1)^2}{x}=\frac{2(x-1)^3}{x}$$

$h'(x)=0$ とすると　$x=1$

$x>0$ における $h(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	1	…
$h'(x)$		−	0	+
$h(x)$		↘	0	↗

よって，$x>0$，$x\fallingdotseq 1$ のとき　$h(x)>0$

したがって，$x>0$，$x\fallingdotseq 1$ のとき　$f(x)<g(x)$

(4)　$f(x)=(x-1)(x-3)+2\log x$

(2) より，$x>1$ のとき $f(x)>0$ であるから

$$\log x>-\frac{1}{2}(x-1)(x-3)\quad\cdots\cdots ①$$

(3) より，$x>0$，$x\fallingdotseq 1$ のとき $f(x)<g(x)$ であるから

$$(x-1)(x-3)+2\log x<\frac{2}{3}(x-1)^3$$

よって　$\log x<\dfrac{1}{3}(x-1)^3-\dfrac{1}{2}(x-1)(x-3)$　……②

したがって，①，② から

$$-\frac{1}{2}(1.1-1)(1.1-3)<\log 1.1<\frac{1}{3}(1.1-1)^3-\frac{1}{2}(1.1-1)(1.1-3)$$

ゆえに　$0.095<\log 1.1<0.0954$

したがって　$\log 1.1\fallingdotseq 0.095$

$\boxed{3}$

解答　$a\leqq -\dfrac{9}{8}$，$2\leqq a$

解説

$f'(x)=a-\sin x+\cos 2x=a-\sin x+(1-2\sin^2 x)=-2\sin^2 x-\sin x+a+1$

$f(x)$ が極値をもたないのは，すべての x について $f'(x)\geqq 0$，またはすべての x について $f'(x)\leqq 0$ が成り立つときである。

すなわち，すべての x について $2\sin^2 x+\sin x-1\leqq a$，またはすべての x について $2\sin^2 x+\sin x-1\geqq a$ が成り立つときである。

$g(x)=2\sin^2 x+\sin x-1$ とおくと　$g(x)=2\left(\sin x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

$-1\leqq \sin x\leqq 1$ であるから，$g(x)$ は

$\sin x=-\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{8}$，

$\sin x=1$　のとき最大値 2

をとる。

よって　$-\dfrac{9}{8}\leqq g(x)\leqq 2$

したがって，求める a の値の範囲は　$a\leqq -\dfrac{9}{8}$，$2\leqq a$

別解　$f''(x)=-\cos x-4\sin x\cos x=-\cos x(4\sin x+1)$

$f'(x)$ の周期は 2π であるから，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で考える。

α を $\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$，$\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ を満たす角とする。

$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，$f''(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{\pi}{2}$，α，$\dfrac{3}{2}\pi$，$3\pi-\alpha$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における $f'(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$3\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	

$f'(0)=f'(2\pi)=a+1$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a-2$，$f'(\alpha)=f'(3\pi-\alpha)=a+\dfrac{9}{8}$，$f'\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=a$ であるから，すべての x について $f'(x)\leqq 0$，またはすべての x について $f'(x)\geqq 0$ となるとき　$a+\dfrac{9}{8}\leqq 0$ または $a-2\geqq 0$

ゆえに，求める a の値の範囲は　　$a\leqq -\dfrac{9}{8}$，$2\leqq a$

4

解答　$p>0$ かつ $q>-\log p-1$

解説

直線 $y=px+q$ が関数 $y=\log x$ のグラフと共有点をもたないための必要十分条件は，方程式 $px+q=\log x$ が $x>0$ で解をもたない，すなわち，関数 $y=px+q-\log x$ のグラフが $x>0$ で x 軸と共有点をもたないことである。

$f(x)=px+q-\log x$ とおくと　　$f'(x)=p-\dfrac{1}{x}$

[1]　$p\leqq 0$ のとき

$x>0$ であるから　　$f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は単調に減少する。

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは必ず x 軸と共有点をもつ。

したがって，不適である。

[2]　$p>0$ のとき

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{1}{p}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないための条件は $f\left(\dfrac{1}{p}\right)>0$ であるから

$$1+q+\log p>0$$

すなわち　　　$q>-\log p-1$

以上から，求める条件は　　　$p>0$　かつ　$q>-\log p-1$

別解　$p=0$ とすると，$y=px+q$ は $y=q$ となる。

$p<0$ とすると，$y=px+q$ について　　$x=0$ のとき　$y=q$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}(px+q)=-\infty$$

また　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\log x=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$

ゆえに，$p\leqq 0$ のとき，直線 $y=px+q$ と $y=\log x$ のグラフは共有点をもつ。

よって，$p>0$ が必要である。

$p>0$ のとき，p を固定して直線 $y=px+q$ と $y=\log x$ のグラフが接するときの q の値を q_0 とすると，求める必要十分条件は $p>0$ かつ $q>q_0$ である。

直線 $y=px+q$ と $y=\log x$ のグラフが $x=\alpha$ で接するとすると

$$p\alpha+q=\log\alpha,\quad p=\frac{1}{\alpha}$$

よって　　　$\alpha=\dfrac{1}{p}$，$q=-\log p-1$

したがって，求める必要十分条件は　　　$p>0$　かつ　$q>-\log p-1$

5

解答　$0<a<\dfrac{1}{e}$ のとき３本，$a=\dfrac{1}{e}$ のとき２本，$a>\dfrac{1}{e}$ のとき１本

解説

真数は正であるから　　$x>0$

$y=x\log x$ より $y'=\log x+1$ であるから，曲線 C_1 上の点 $(t,\ t\log t)$ における接線の方程式は　　$y=(\log t+1)x-t$

この直線が曲線 C_2 にも接するための条件は，$ax^2=(\log t+1)x-t$ すなわち

$ax^2-(\log t+1)x+t=0$ ……① が重解をもつことである。

① の判別式を D とおくと　　$D=0$

よって　　$(\log t+1)^2-4at=0$

$4t>0$ であるから　　$a=\dfrac{(\log t+1)^2}{4t}$　……②

曲線 C_1 に異なる２点で接する直線は存在しないから，曲線 C_1 と曲線 C_2 の両方に接する直線の本数は，② を満たす実数 t $(t>0)$ の個数に等しい。

$f(t)=\dfrac{(\log t+1)^2}{4t}$ とおくと

$$f'(t)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2t(\log t+1)\cdot\dfrac{1}{t}-(\log t+1)^2}{t^2}=-\frac{(\log t+1)(\log t-1)}{4t^2}$$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=e$，$\dfrac{1}{e}$

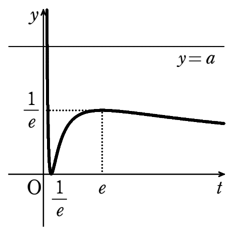
よって，$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(t)$	／	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	／	↘	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

また　$\displaystyle\lim_{t\to+0}f(t)=\infty$，

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{(\log t)^2}{t}\cdot\left(1+\frac{1}{\log t}\right)^2\right\}=0$$

ゆえに，$y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。



曲線 C_1 と曲線 C_2 の両方に接する直線の本数，すなわち ② の実数解の個数は，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しいから，

$0<a<\dfrac{1}{e}$ のとき　３本，

$a=\dfrac{1}{e}$ のとき　２本，

$a>\dfrac{1}{e}$ のとき　１本

6

解答　(1)　$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0)=0$，$f'''(x)=e^x$　　(2)　略　　(3)　略

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$　　(5)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{2x}-1-2xe^x}{x^2}=0$

解説

(1)　$f'(x)=e^x-1-x$，$f''(x)=e^x-1$，$f'''(x)=e^x$

よって　　$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0)=0$

(2)　$x>0$ のとき $f'''(x)>0$ であるから，$f''(x)$ は単調に増加する。

$f''(0)=0$ であるから　　$f''(x)>0$　　　よって，$f'(x)$ は単調に増加する。

$f'(0)=0$ であるから　　$f'(x)>0$　　　よって，$f(x)$ は単調に増加する。

$f(0)=0$ であるから　　$f(x)>0$

(3)　$g(x)=x^3-f(x)$ とおくと

$$g'(x)=3x^2-f'(x),\quad g''(x)=6x-f''(x),\quad g'''(x)=6-f'''(x)=6-e^x$$

また，(1) から　　$g(0)=g'(0)=g''(0)=0$

$g'''(x)$ は単調に減少し，$2<e<3$ より $g'''(1)=6-e>0$ であるから，$0<x<1$ のとき

$$g'''(x)>0$$

(2) と同様に考えることにより，$g(x)>0$ が示される。

よって，$0<x<1$ のとき　　$f(x)<x^3$

(4)　(2)，(3) から，$0<x<1$ のとき　　$0<f(x)<x^3$

よって　　$x+\dfrac{x^2}{2}<e^x-1<x+\dfrac{x^2}{2}+x^3$

各辺を x で割ると　　$1+\dfrac{x}{2}<\dfrac{e^x-1}{x}<1+\dfrac{x}{2}+x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(1+\frac{x}{2}\right)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(1+\frac{x}{2}+x^2\right)=1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

また，$0<f(x)<x^3$ から　　$\dfrac{x^2}{2}<e^x-1-x<\dfrac{x^2}{2}+x^3$

各辺を x^2 で割ると　　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{e^x-1-x}{x^2}<\dfrac{1}{2}+x$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(5)　$(e^x-1-x)^2=e^{2x}+1+x^2-2e^x+2x-2xe^x$ であるから

$$e^{2x}-1-2xe^x=(e^x-1-x)^2+2(e^x-1-x)-x^2$$

よって　　$\dfrac{e^{2x}-1-2xe^x}{x^2}=\left(\dfrac{e^x-1}{x}-1\right)^2+2\cdot\dfrac{e^x-1-x}{x^2}-1$

したがって，(4) から　　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{2x}-1-2xe^x}{x^2}=(1-1)^2+2\cdot\frac{1}{2}-1=0$

7

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}-2=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$

$0<x<1$ のとき $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $0<x<1$ において単調に増加する。

また，$f(0)=0$ であるから，$0<x<1$ のとき　　$f(x)>0$

(2)　$g'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2x(1+x)^2-2x^2(1+x)}{(1+x)^4}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2x(1-x)^2+2x^2(1-x)}{(1-x)^4}$

$$=\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{x}{3(1+x)^3}-\frac{x}{3(1-x)^3}=\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{-6x^2-2x^4}{3(1-x^2)^3}=\frac{2x^4(3x^2-7)}{3(1-x^2)^3}$$

$0<x<1$ のとき $g'(x)<0$ であるから，$g(x)$ は $0<x<1$ において単調に減少する。

また，$g(0)=0$ であるから，$0<x<1$ のとき　$g(x)<0$

(3) (1)，(2) から，$0<x<1$ のとき

$$0<\log(1+x)-\log(1-x)-2x<\frac{x^2}{6(1-x)^2}-\frac{x^2}{6(1+x)^2} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

k を自然数とすると，$0<\frac{1}{2k}<1$ であるから，① において $x=\frac{1}{2k}$ とすると

$$0<\log\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\log\left(1-\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{k}<\frac{1}{6(2k-1)^2}-\frac{1}{6(2k+1)^2}$$

すなわち　$0<\log(2k+1)-\log(2k-1)-\frac{1}{k}<\frac{1}{6(2k-1)^2}-\frac{1}{6(2k+1)^2}$

よって，$k=1，2，\cdots\cdots，n$ について各辺を足し合わせると

$$0<\log(2n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\frac{1}{6}-\frac{1}{6(2n+1)^2}$$

8

解答　(1) $y'=-\log x-1$　(2) $f'(x)=-(\log x+1)x^{-x}$　(3) $x=\frac{1}{e}$ で極大値 $e^{\frac{1}{e}}$

(4) $f''(x)=\left\{(\log x+1)^2-\frac{1}{x}\right\}x^{-x}$　(5) 略　(6) 略

解説

(1) $y'=-\log x-x\cdot\frac{1}{x}=-\log x-1$

(2) $x>0$ であるから　$f(x)=x^{-x}>0$

両辺の自然対数をとると　$\log f(x)=-x\log x$

両辺を x で微分すると　$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\log x-1$

したがって　$f'(x)=-(\log x+1)x^{-x}$

(3) $f'(x)=0$ とすると　$\log x+1=0$

すなわち　$x=\frac{1}{e}$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘

したがって，$f(x)$ は $x=\frac{1}{e}$ で極大値 $e^{\frac{1}{e}}$ をとる。

(4) $f''(x)=-\frac{1}{x}\cdot x^{-x}-(\log x+1)\{-(\log x+1)x^{-x}\}$

$$=\left\{(\log x+1)^2-\frac{1}{x}\right\}x^{-x}$$

(5) $g(x)=(\log x+1)^2-\frac{1}{x}$ から

$$g'(x)=2(\log x+1)\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x\log x+2x+1}{x^2}$$

$h(x)=2x\log x+2x+1$ とおくと　$h'(x)=2\log x+2x\cdot\frac{1}{x}+2=2(\log x+2)$

$h'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{e^2}$

よって，$x>0$ における $h(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$
$h'(x)$	／	$-$	0	$+$
$h(x)$	／	↘	$1-\frac{2}{e^2}$	↗

ゆえに，$x>0$ において，$h(x)$ の最小値は $1-\frac{2}{e^2}$ (>0) であるから，$x>0$ において

$$g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}>0$$

したがって，$x>0$ において，$g(x)$ は単調増加である。

(6) $f''(x)=g(x)x^{-x}$ である。

$x>0$ において，$x^{-x}>0$ であるから，方程式 $g(x)=0$ がただ１つの解をもつことを示せばよい。

(5) より，$x>0$ において，$g(x)$ は単調増加である。

また　$g\left(\frac{1}{e}\right)=-e<0$，$g(e)=4-\frac{1}{e}>0$

よって，方程式 $g(x)=0$ は $x>0$ において，ただ１つの解をもつ。

したがって，方程式 $f''(x)=0$ は $x>0$ において，ただ１つの解をもつ。

9

解答　(1) 略　(2) $x=1$ で最小値 $\frac{2}{e}$

解説

(1) $f(x)=\log e^x-\log x^2e^{\frac{1}{x}}=x-2\log x-\frac{1}{x}$

よって　$f'(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqq 0$

ゆえに，関数 $f(x)$ は区間 $x>0$ で単調に増加する。

よって，$0<x<1$ のとき $f(x)<f(1)$ であるから

$\log\frac{e^x}{x^2e^{\frac{1}{x}}}<\log 1$　すなわち　$\frac{e^x}{x^2e^{\frac{1}{x}}}<1$

両辺に $x^2e^{\frac{1}{x}}$ (>0) を掛けると　$e^x<x^2e^{\frac{1}{x}}$

したがって，区間 $0<x<1$ で不等式 $e^x<x^2e^{\frac{1}{x}}$ が成り立つ。

(2) $g'(x)=-e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{x^2e^{\frac{1}{x}}}=\frac{e^x-x^2e^{\frac{1}{x}}}{e^xx^2e^{\frac{1}{x}}}$

(1) から，$0<x<1$ のとき　$g'(x)<0$

同様に，$x>1$ のとき　$g'(x)>0$

$g'(x)=0$ とすると　$x=1$

$x>0$ における $g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	／	$-$	0	$+$
$g(x)$	／	↘	$\frac{2}{e}$	↗

よって，$g(x)$ は $x=1$ で最小値 $\frac{2}{e}$ をとる。

10

解答　(1) 略　(2) (ア) 略　(イ) $n=5$

解説

(1) $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ とおくと　$f'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}$

$x>0$ のとき $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。

また，$f(0)=0$ であるから　$f(x)>0$

よって　$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)$　……①

$g(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log(1+x)$ とおくと　$g'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}$

$x>0$ のとき $g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は単調に増加する。

また，$g(0)=0$ であるから　$g(x)>0$

よって　$\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$　……②

①，② から　$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

(2) (ア) $\frac{1}{n}>0$ であるから，(1) において $x=\frac{1}{n}$ とすると

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}$$

各辺を n 倍すると　$1-\frac{1}{2n}<n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}$

すなわち　$1-\frac{1}{2n}<\log a_n<1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}$

(イ) 不等式 $e^{0.9}<a_n$ の両辺は正であるから，自然対数をとると　$0.9<\log a_n$

これを満たす最小の自然数 n を求める。

(ア) において $n=1，2，3，4，5$ とすると

$\frac{1}{2}<\log a_1<\frac{5}{6}$，$\frac{3}{4}<\log a_2<\frac{5}{6}$，$\frac{5}{6}<\log a_3<\frac{47}{54}$，$\frac{7}{8}<\log a_4<\frac{43}{48}$

$\frac{9}{10}<\log a_5<\frac{137}{150}$

すなわち　$0.5<\log a_1<0.83\cdots\cdots$，$0.75<\log a_2<0.83\cdots\cdots$，

$0.83\cdots\cdots<\log a_3<0.87\cdots\cdots$，$0.875<\log a_4<0.89\cdots\cdots$，

$0.9<\log a_5<0.91\cdots\cdots$

よって，求める最小の自然数 n は　5

1

解答　(ア)　$-px+p^2+\log p$　　(イ)　$p+q+\dfrac{\log q-\log p}{q-p}$　　(ウ)　$2p+\dfrac{1}{p}$

(エ)　$-p^2-1+\log p$

解説

$y=\log x$ から　$y'=\dfrac{1}{x}$

点 P における法線の方程式は

$y-\log p=-p(x-p)$　すなわち　$y=-px+p^2+\log p$

同様にして，点 Q における法線の方程式は　$y=-qx+q^2+\log q$

$-px+p^2+\log p=-qx+q^2+\log q$ とすると，$p\neq q$ から　$x=p+q+\dfrac{\log q-\log p}{q-p}$

よって　$\displaystyle\lim_{q\to p+0}\left(p+q+\frac{\log q-\log p}{q-p}\right)=2p+\frac{1}{p}$

$\left(f(x)=\log x \text{ とおくと，} \displaystyle\lim_{q\to p+0}\frac{\log q-\log p}{q-p}=f'(p) \text{ から}\right)$

このとき　$y=-p\left(2p+\dfrac{1}{p}\right)+p^2+\log p=-p^2-1+\log p$

2

解答　(1)　$y=\dfrac{2}{m}x+2\log m-2$　　(2)　$\dfrac{2}{m}$　　(3)　$\dfrac{2n-2m}{mn+4}$　　(4)　$m=1$，$n=6$

解説

(1)　$y=2\log x$ から　$y'=\dfrac{2}{x}$

よって，直線 ℓ_1 の方程式は　$y-2\log m=\dfrac{2}{m}(x-m)$

すなわち　$y=\dfrac{2}{m}x+2\log m-2$

(2)　ℓ_1 と x 軸とのなす角が α であるから，$\tan\alpha$ は ℓ_1 の傾きに等しい。

よって　$\tan\alpha=\dfrac{2}{m}$

(3)　同様に考えると，ℓ_2 の方程式は $y=\dfrac{2}{n}x+2\log n-2$ であるから

$$\tan\beta=\frac{2}{n}$$

よって，加法定理から　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2n-2m}{mn+4}$

(4)　$0<m<n$ から　$0<\dfrac{2}{n}<\dfrac{2}{m}$

よって，$\tan\alpha>\tan\beta$ から　$\alpha>\beta$

2 直線 ℓ_1，ℓ_2 のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ のとき

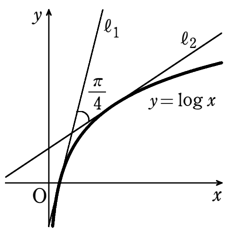
$$\tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{\pi}{4}$$

すなわち　$\dfrac{2n-2m}{mn+4}=1$

両辺に $mn+4$ を掛けて整理すると

$$(m-2)(n+2)=-8$$

これを満たす自然数 m，n $(m<n)$ の組は　$m=1$，$n=6$



3

解答　(1)　$(e^a,\ 2a)$　　(2)　$\tan\theta=\dfrac{e^a}{e^{2a}+2}$　　(3)　$0<\tan\theta\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解説

(1)　C_1，C_2 の方程式から y を消去すると　$2\log x=\log x+a$

よって　$\log x=a$　　ゆえに　$x=e^a$

したがって，点 P の座標は　$(e^a,\ 2a)$

(2)　$y=2\log x$ から　$y'=\dfrac{2}{x}$

$y=\log x+a$ から　$y'=\dfrac{1}{x}$

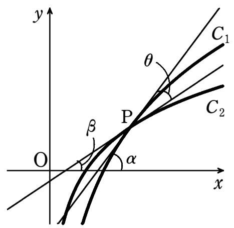
点 P における C_1，C_2 の接線と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると

$$\tan\alpha=\frac{2}{e^a},\ \tan\beta=\frac{1}{e^a}$$

$\theta=\alpha-\beta$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{e^a}-\dfrac{1}{e^a}}{1+\dfrac{2}{e^a}\cdot\dfrac{1}{e^a}}=\frac{e^a}{e^{2a}+2}$$



(3)　$e^a=t$ とおく。

a が実数全体を動くとき，t のとりうる値の範囲は　$t>0$

(2) より　$\tan\theta=\dfrac{e^a}{e^{2a}+2}=\dfrac{t}{t^2+2}$

$f(t)=\dfrac{t}{t^2+2}$ とすると　$f'(t)=\dfrac{t^2+2-t\cdot 2t}{(t^2+2)^2}=\dfrac{2-t^2}{(t^2+2)^2}$

$f'(t)=0$ とすると，$t>0$ から　$t=\sqrt{2}$

$f(t)$ の増減表は右のようになる。

また，$\displaystyle\lim_{t\to+0}f(t)=0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=0$ であるから，

$f(t)$ のとる値の範囲は　$0<f(t)\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

よって，$\tan\theta$ のとる値の範囲は　$0<\tan\theta\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

t	0	…	$\sqrt{2}$	…
$f'(t)$	／	$+$	0	$-$
$f(t)$	／	↗	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	↘

4

解答　(1)　$\left(t+\dfrac{r}{\sqrt{1+\cos^2 t}},\ \sin t+\dfrac{r\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\right)$　　(2)　$r=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

解説

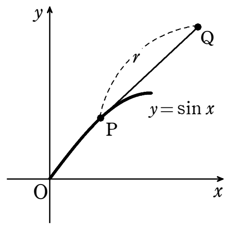
(1)　$y=\sin x$ から　$y'=\cos x$

よって，点 P における接線の傾きは $\cos t$ であり，

$\mathrm{PQ}=r$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{r}{\sqrt{1+\cos^2 t}}(1,\ \cos t)$$

ゆえに　$\mathrm{Q}\left(t+\dfrac{r}{\sqrt{1+\cos^2 t}},\ \sin t+\dfrac{r\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\right)$



(2)　$f(t)=\sin t+\dfrac{r\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$ とおくと

$$f'(t)=\cos t+\frac{r}{1+\cos^2 t}\left\{-\sin t\sqrt{1+\cos^2 t}-\cos t\cdot\frac{-2\sin t\cos t}{2\sqrt{1+\cos^2 t}}\right\}$$

$$=\cos t-\frac{r\sin t}{(1+\cos^2 t)\sqrt{1+\cos^2 t}}$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos t$ は単調に減少し，$\dfrac{r\sin t}{(1+\cos^2 t)\sqrt{1+\cos^2 t}}$ は単調に増加するから，$f'(t)$ は単調に減少する。

また，$f'(0)=1>0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-r<0$ であるから，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(c)=0$ となる c がただ 1 つ存在する。

このとき，$f(t)$ の増減表は右のようになり，$f(t)$ は $t=c$ で最大となる。

t	0	…	c	…	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

よって，$c=\dfrac{\pi}{4}$ であるから　$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

すなわち　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}r}{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}}=0$

ゆえに　$r=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$　　これは $r>0$ を満たす。

5

解答　略

解説

$f(x)=\log x$ とおく。

$f(x)$ は $x>0$ において微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\log b-\log a}{b-a}=\frac{1}{c},\ 0<a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する。

逆数をとると　$\dfrac{b-a}{\log b-\log a}=c$，$0<a<c<b$

したがって　$a<\dfrac{b-a}{\log b-\log a}<b$

別解　不等式 $a<\dfrac{b-a}{\log b-\log a}<b$ を変形すると，$0<a<b$ より

$$\frac{1}{b}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

すなわち　$\dfrac{b-a}{b}<\log b-\log a<\dfrac{b-a}{a}$

よって　$1-\frac{a}{b}<\log\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$

$\frac{b}{a}=t$ とおくと，$t>1$ で　$1-\frac{1}{t}<\log t<t-1$

よって，$f(t)=\log t-\left(1-\frac{1}{t}\right)$ とおくと　$f'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$

$t>1$ のとき，常に $f'(t)>0$ であるから，$t>1$ において $f(t)$ は単調に増加する。

これと $f(1)=0$ から，$t>1$ において　$f(t)>0$

すなわち　$1-\frac{1}{t}<\log t$　……①

また，$g(t)=t-1-\log t$ とおくと　$g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$

$t>1$ のとき，常に $g'(t)>0$ であるから，$t>1$ において $g(t)$ は単調に増加する。

これと $g(1)=0$ から，$t>1$ において　$g(t)>0$

すなわち　$\log t<t-1$　……②

①，② から，$t>1$ において，$1-\frac{1}{t}<\log t<t-1$ が成り立つから，$0<a<b$ のとき，

$a<\frac{b-a}{\log b-\log a}<b$ が成り立つ。

6

解答　(1)　$x=-3$ のとき極小値 $\frac{1}{36}e^{\frac{3}{4}}$，$x=0$ のとき極小値 $\frac{1}{18}$，

$x=6$ のとき極小値 $\frac{1}{36}e^{\frac{3}{2}}$

(2)　$x=0$ のとき最小値 $\frac{1}{18}$

解説

(1)　[1]　$x\geqq 0$ のとき

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$$

$x>0$ のとき

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}(x^2-3x+18)-e^{\frac{1}{4}x}(2x-3)}{(x^2-3x+18)^2}=\frac{e^{\frac{1}{4}x}(x-5)(x-6)}{4(x^2-3x+18)^2}$$

[2]　$x<0$ のとき

$$f(x)=\frac{e^{-\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}(x^2-3x+18)-e^{-\frac{1}{4}x}(2x-3)}{(x^2-3x+18)^2}=-\frac{e^{-\frac{1}{4}x}(x+2)(x+3)}{4(x^2-3x+18)^2}$$

ゆえに，増減表は次のようになる．

x	…	-3	…	-2	…	0	…	5	…	6	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

極小値 $f(-3)=\frac{e^{\frac{3}{4}}}{9+9+18}=\frac{1}{36}e^{\frac{3}{4}}$

極小値 $f(0)=\frac{e^0}{18}=\frac{1}{18}$

極小値 $f(6)=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{36-18+18}=\frac{1}{36}e^{\frac{3}{2}}$

(2)　最小値は，3 つの極小値の最小のものである．

$36f(-3)=e^{\frac{3}{4}}$，$36f(0)=2$，$36f(6)=e^{\frac{3}{2}}>e^{\frac{3}{4}}$

ここで　$\left(e^{\frac{3}{4}}\right)^4=e^3>2.7^3=19.683$，$2^4=16$

ゆえに　$2<e^{\frac{3}{4}}$

よって，最小値は　$f(0)=\frac{1}{18}$

7

解答　(1)　$\sqrt{3}$　(2)　$S=3\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$

(3)　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$f(x)=x^3-4x^2+6x-3$

解説

(1)　方程式 $f(x)=0$ は実数を係数にもつ方程式であるから，虚数 α を解にもつことより，その共役な複素数 $\overline{\alpha}$ も解にもつ。

よって　$\beta=\overline{\alpha}$

ゆえに，方程式 $f(x)=0$ は 1，α，$\overline{\alpha}$ を解にもつ。

$f(x)$ の定数項は -3 であるから，3 次方程式の解と係数の関係により　$1\cdot\alpha\cdot\overline{\alpha}=3$

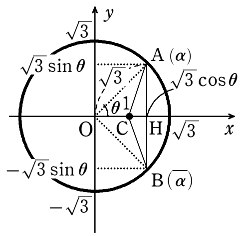
すなわち　$|\alpha|^2=3$

$|\alpha|>0$ であるから　$|\alpha|=\sqrt{3}$

(2)　(1) より，$|\alpha|=\sqrt{3}$ であるから　$\alpha=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)$

α の実部は 1 より大きく，α の虚部は正であるから，

点 A，B，C の位置関係は右の図のようになる。



線分 AB と実軸の交点を H とすると

CH$=\sqrt{3}\cos\theta-1$

また　AB$=2\sqrt{3}\sin\theta$

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta\cdot(\sqrt{3}\cos\theta-1)$$

$$=3\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$$

(3)　α の実部は 1 より大きいから　$\sqrt{3}\cos\theta>1$

よって　$\cos\theta>\frac{1}{\sqrt{3}}$　……①

γ を $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ を満たす実数とすると　$0<\theta<\gamma$

また，(2) より，$S=\frac{3}{2}\sin 2\theta-\sqrt{3}\sin\theta$ であるから

$$\frac{dS}{d\theta}=3\cos 2\theta-\sqrt{3}\cos\theta=3(2\cos^2\theta-1)-\sqrt{3}\cos\theta$$

$$=6\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3=(2\cos\theta-\sqrt{3})(3\cos\theta+\sqrt{3})$$

$\frac{dS}{d\theta}=0$ とすると，① より　$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<\gamma$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{6}$

$0<\theta<\gamma$ における S の増減表は右のようになる。

θ	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	γ
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		↗	極大	↘	

よって，S を最大にする θ は　$\theta=\frac{\pi}{6}$

このとき　$\alpha=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\beta=\overline{\alpha}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

したがって，3 次方程式の解と係数の関係により，

$f(x)$ の 2 次の係数は

$$-(\alpha+\beta+1)=-\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1\right\}=-4$$

$f(x)$ の 1 次の係数は

$$\alpha\beta+\beta\cdot 1+1\cdot\alpha=\alpha\overline{\alpha}+\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$

$$=|\alpha|^2+3=3+3=6$$

ゆえに　$f(x)=x^3-4x^2+6x-3$

8

解答　(1)　$S(\theta)=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)^2}$　(2)　$S'(\theta)=\frac{2\cos\theta-1}{2(1+\cos\theta)^2}$　(3)　略

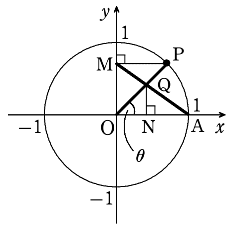
解説

(1)　M と A の座標は，それぞれ $(0,\ \sin\theta)$，$(1,\ 0)$ であるから，直線 MA の方程式は

$y=-x\sin\theta+\sin\theta$　…①

また，直線 OP の方程式は

$y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$　……②



①，② を解いて　$x=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$，$y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

よって，Q の座標は　$\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\ \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$

△OQN は直角三角形であるから

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{ON}\cdot\mathrm{NQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)^2}$$

(2)

$$S'(\theta)=\frac{1}{2}\left\{\frac{(\sin\theta\cos\theta)'(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^4}-\frac{\sin\theta\cos\theta\cdot 2(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)'}{(1+\cos\theta)^4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^3}-\frac{2\sin\theta\cos\theta\cdot(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^3}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cos^2\theta-1)(1+\cos\theta)+2\cos\theta(1-\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)^3}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cos^2\theta-1)+2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{2\cos\theta-1}{2(1+\cos\theta)^2}$$

(3)　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において $S'(\theta)=0$ とすると　$\theta=\frac{\pi}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$S(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大になる．

9

解答　(1)　$f(x)=\dfrac{2at}{t^2-at+1}$

(2)　$t=1$ のとき最大値 $\dfrac{2a}{2-a}$，$t=-1$ のとき最小値 $-\dfrac{2a}{2+a}$

(3)　最大値をとるときの x の値は $x=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，2π，

最小値をとるときの x の値は $x=\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$t=\sin x+\cos x$ から

$$t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x$$

よって　$2\sin x\cos x=t^2-1$

ゆえに　$f(x)=\dfrac{2at}{2+(t^2-1)-at}=\dfrac{2at}{t^2-at+1}$

(2)　$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$ であるから　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

よって　$g(t)=\dfrac{2at}{t^2-at+1}$　$(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

$$g'(t)=2a\cdot\frac{1\cdot(t^2-at+1)-t(2t-a)}{(t^2-at+1)^2}=\frac{-2a(t+1)(t-1)}{(t^2-at+1)^2}$$

$g'(t)=0$ とすると　$t=\pm1$

$g(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$0<a<2$ であるから

$g(1)=\dfrac{2a}{2-a}>0$，

$g(-\sqrt{2})=-\dfrac{2\sqrt{2}\,a}{3+\sqrt{2}\,a}<0$，

$g(\sqrt{2})=\dfrac{2\sqrt{2}\,a}{3-\sqrt{2}\,a}>0$，$g(-1)=-\dfrac{2a}{2+a}<0$

よって，$g(t)$ は $t=1$ のとき最大値 $\dfrac{2a}{2-a}$，$t=-1$ のとき最小値 $-\dfrac{2a}{2+a}$ をとる。

(3)　[1]　$t=1$ すなわち $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ のとき

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$ であるから　$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{9}{4}\pi$

よって　$x=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，2π

[2]　$t=-1$ すなわち $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$ であるから　$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

よって　$x=\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに，$f(x)$ は $x=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，2π のとき最大値をとり，$x=\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値をとる。

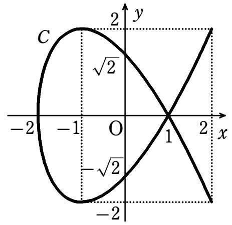
10

解答　(1)　$x=4t^2-2$，$y=8t^3-6t$

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y=(x-1)\sqrt{x+2}$，

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$y=-(x-1)\sqrt{x+2}$

(3)　[図]



解説

(1)　$x=2\cos2\theta=2(2\cos^2\theta-1)=4t^2-2$，

$y=2\cos3\theta=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=8t^3-6t$

(2)　$x=4t^2-2$ から　$t^2=\dfrac{x+2}{4}$

[1]　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$t=\cos\theta\geqq0$ であるから　$t=\sqrt{\dfrac{x+2}{4}}$

これを $y=8t^3-6t$ に代入すると

$$y=8\left(\sqrt{\frac{x+2}{4}}\right)^3-6\sqrt{\frac{x+2}{4}}=(x+2)\sqrt{x+2}-3\sqrt{x+2}=(x-1)\sqrt{x+2}$$

[2]　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$t=\cos\theta\leqq0$ であるから　$t=-\sqrt{\dfrac{x+2}{4}}$

これを $y=8t^3-6t$ に代入すると

$$y=8\cdot\left(-\sqrt{\frac{x+2}{4}}\right)^3-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{x+2}{4}}\right)=-(x-1)\sqrt{x+2}$$

以上から，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y=(x-1)\sqrt{x+2}$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$y=-(x-1)\sqrt{x+2}$

(3)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0\leqq2\theta\leqq\pi$ であるから　$-2\leqq2\cos2\theta\leqq2$

すなわち　$-2\leqq x\leqq2$

さらに，$y=(x-1)\sqrt{x+2}$ から

$$y'=1\cdot\sqrt{x+2}+(x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}},$$

$$y''=\frac{3}{2}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x+2}-(x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$=\frac{3(x+3)}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$$

よって，関数 $y=(x-1)\sqrt{x+2}$ $(-2\leqq x\leqq2)$ の増減，グラフの凹凸は，右の表のようになる。

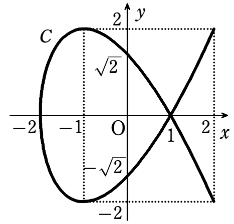
x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y''		$+$	$+$	$+$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

一方，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のときも，$-2\leqq2\cos2\theta\leqq2$

より　$-2\leqq x\leqq2$

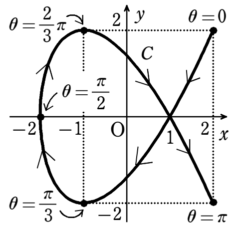
また，$y=-(x-1)\sqrt{x+2}$ のグラフは，$y=(x-1)\sqrt{x+2}$ のグラフと x 軸に関して対称である。

したがって，曲線 C の概形は，右の図のようになる。



参考　$\dfrac{dx}{d\theta}=-4\sin2\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=-6\sin3\theta$ であるから，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における x と y の値の変化は，次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	2	$\leftarrow$	-1	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	2
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	-2



11

解答　(1)　$x\leqq0$，$1<x$　(2)　$a_1=3$，$a_2=3$　(3)　$b_1=\dfrac{3}{2}$，$b_2=\dfrac{3}{2}$

(4)　$x=\dfrac{3}{2}$ で極小値 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　(5)　$y=3x+\dfrac{3}{2}$，$x=1$

(6)　$k\leqq0$，$k=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ のとき 1 個，$k>\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ のとき 2 個，

$0<k<\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ のとき 0 個

解説

(1)　(分母)$\neq0$ であるから　$x\neq1$　……①

また，$\dfrac{x}{x-1}\geqq0$ の両辺に $(x-1)^2\ (>0)$ を掛けて　$x(x-1)\geqq0$

すなわち　$x\leqq0$，$1\leqq x$　……②

よって，①，② から，$f(x)$ の定義域は　$x\leqq0$，$1<x$

(2)　$\dfrac{f(x)}{x}=3\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=3\sqrt{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=3$　ゆえに　$a_1=3$，$a_2=3$

(3) $f(x)-3x=3x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-1\right)=3x\cdot\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-1}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}$

$$=\frac{\dfrac{3x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}=\frac{\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}+1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-3x\}=\frac{3}{2}$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-3x\}=\frac{3}{2}$

ゆえに　$b_1=\dfrac{3}{2}$，$b_2=\dfrac{3}{2}$

(4) $\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\right)'=\dfrac{\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}=-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ であるから

$$f'(x)=3\left\{\sqrt{\frac{x}{x-1}}-\frac{x}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right\}$$
$$=3\left\{\frac{|x|}{\sqrt{x(x-1)}}-\frac{x}{2(x-1)^2}\cdot\frac{|x-1|}{\sqrt{x(x-1)}}\right\}$$
$$=\frac{3\{2|x|(x-1)^2-x|x-1|\}}{2(x-1)^2\sqrt{x(x-1)}}$$

$x>1$ のとき　$f'(x)=\dfrac{3x(2x-3)}{2(x-1)\sqrt{x(x-1)}}$

$x<0$ のとき　$f'(x)=\dfrac{3x(3-2x)}{2(x-1)\sqrt{x(x-1)}}$

よって，$x\leqq 0$，$1<x$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$				$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0			↘	極小	↗

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=3\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ であるから，$f(x)$ は $x=\dfrac{3}{2}$ のとき極小値 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ をとる。

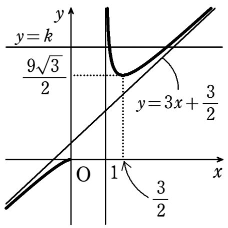
(5) (3) より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)-\left(3x+\frac{3}{2}\right)\right\}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left\{f(x)-\left(3x+\frac{3}{2}\right)\right\}=0$

また　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)=\infty$

よって，曲線 $y=f(x)$ の漸近線は　$y=3x+\dfrac{3}{2}$，$x=1$

(6) (4) の増減表と (5) の結果から，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に等しい。



よって　$k\leqq 0$，$k=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ のとき　1 個

$k>\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ のとき　2 個

$0<k<\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ のとき　0 個

12

解答　(1) $x=e^2$ のとき最大値 $\dfrac{2}{e}$，$x=1$ のとき最小値 0　(2) 略　(3) 0

解説

(1) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-(\log x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=e^2$

$x\geqq 1$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘

また，$x>1$ のとき，$\log x>0$，$\sqrt{x}>1$ であるから

$f(x)>0$

よって，$x\geqq 1$ において $f(x)$ は $x=e^2$ のとき最大値 $\dfrac{2}{e}$，$x=1$ のとき最小値 0 をとる。

(2) (1) の結果から，$x\geqq 1$ において　$0\leqq\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\leqq\dfrac{2}{e}$

よって　$0\leqq\dfrac{\log x}{x}\leqq\dfrac{2}{e}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

(3) $x>1$ のとき，(1) から

$$0\leqq\frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}}=\frac{\log x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\log(\log x)}{\log x}\leqq\frac{2}{e}\cdot\frac{\log(\log x)}{\log x}$$

ここで，$x\longrightarrow\infty$ のとき $\log x\longrightarrow\infty$ であるから，(2) より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\log x)}{\log x}=0$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}}=0$

13

解答　(1) $x=e$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$　(2) $0<k<\dfrac{1}{e}$　(3) $1<a<e$

解説

(1) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$1-\log x=0$　よって　$x=e$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

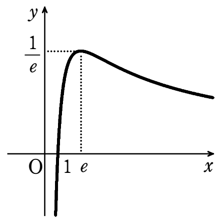
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

ゆえに，$f(x)$ は $x=e$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

よって，(1) の増減表から，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

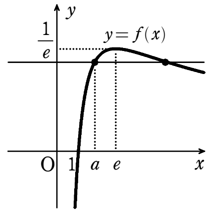


$f(x)=k$ の異なる解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数と一致する。

ゆえに，$f(x)=k$ が 2 つの異なる解をもつような k の値の範囲は　$0<k<\dfrac{1}{e}$

(3) $a>0$，$x>0$ より $x^a=a^x$ の両辺は正であるから，両辺の自然対数をとると　$\log x^a=\log a^x$

よって　$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{\log a}{a}$　…… ①



① が a より大きい解をもつような a の値の範囲を求めればよい。

$x=a$ は ① の解であるから，① が a より大きい解をもつとき，$y=f(x)$ のグラフより ① は異なる 2 つの解をもち，小さい方の解が a である。

よって，求める a の値の範囲は　$1<a<e$

14

解答　(1) $e^t t^{-t}$　(2) 略

解説

(1) $t\fallingdotseq 0$ であるから，$g(x)=e^x x^{-t}$ より

$$g'(x)=e^x x^{-t}-te^x x^{-t-1}$$
$$=e^x x^{-t-1}(x-t)$$

$g'(x)=0$ とすると，$x>0$，$t>0$ から　$x=t$

$x>0$ における $g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	t	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	極小	↗

よって，$g(x)$ は $x=t$ で最小値 $g(t)=e^t t^{-t}$ をとる。

(2) $x>0$ のとき，$e^x>x^t$ は $e^x x^{-t}>1$ と同値である。

よって，すべての正の実数 x に対して $e^x>x^t$ が成り立つための必要十分条件は，$y=g(x)$ の最小値が 1 より大きくなることである。

ゆえに，(1) より　$1<e^t t^{-t}$

両辺に $t^t\ (>0)$ を掛けて　$t^t<e^t$

$e>0$，$t>0$ であるから　$t<e$

15

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) $f(x)=x-2\log x$ とおくと　$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

$x\geqq 1$ において，$f'(x)=0$ とすると　$x=2$

$x\geqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2-2\log 2$	↗

よって，$x\geqq 1$ において，$f(x)$ は $x=2$ で最小値 $2-2\log 2$ をとる。

$e>2$ であるから　$2-2\log 2>2-2\log e=0$

よって，$x\geqq 1$ において $f(x)>0$ が成り立つ。

したがって，$x \geqq 1$ において　$x > 2\log x$

(2) (1) の結果を用いると，$n \geqq 1$ から　$2\log n < n$

両辺に n を掛けると　$2n\log n < n^2$

両辺を n 乗すると　$(2n\log n)^n < n^{2n}$

ここで　$e^{2n\log n} = e^{\log n^{2n}} = n^{2n}$　　よって　$(2n\log n)^n < e^{2n\log n}$

$\boxed{16}$

解答　(1) 略　(2) $x>0$ で単調に減少　(3) $(1+a)^b > (1+b)^a$

解説

(1) $g(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ とおくと

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

$x>0$ のとき，$g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は $x \geqq 0$ で単調に増加する。

よって，$x>0$ のとき　$g(x) > g(0) = 0$

ゆえに，$x>0$ のとき　$\log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$

(2) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} = \dfrac{-g(x)}{x^2}$

(1) から，$x>0$ のとき　$f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は $x>0$ で単調に減少する。

(3) (2) から，$0<a<b$ のとき　$\dfrac{\log(1+a)}{a} > \dfrac{\log(1+b)}{b}$

すなわち　$b\log(1+a) > a\log(1+b)$

よって　$\log(1+a)^b > \log(1+b)^a$

底 $e>1$ であるから　$(1+a)^b > (1+b)^a$

$\boxed{17}$

解答　(1) 略　(2) $\sqrt{5}^{\sqrt{7}} < \sqrt{7}^{\sqrt{5}}$

解説

(1) $a^b = b^a$ の両辺は正であるから，両辺の自然対数をとると　$\log a^b = \log b^a$

すなわち　$b\log a = a\log b$　　よって　$\dfrac{\log a}{a} = \dfrac{\log b}{b}$　…… ①

ここで，$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$\log x = 1$

よって　$x=e$

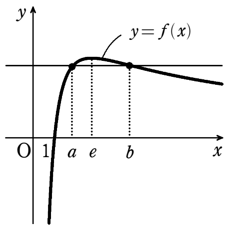
$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$，

$f(1)=0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



したがって，実数 a，b $(a<b)$ が ① を満たしているとき　$1<a<e<b$

(2) $2.7^2 = 7.29$ であるから，$5<7<7.29$ より

$\sqrt{5} < \sqrt{7} < 2.7$

これと $2.7<e$ から　$\sqrt{5} < \sqrt{7} < e$

よって，(1) の増減表により　$f(\sqrt{5}) < f(\sqrt{7})$

すなわち　$\dfrac{\log\sqrt{5}}{\sqrt{5}} < \dfrac{\log\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

ゆえに　$\sqrt{7}\log\sqrt{5} < \sqrt{5}\log\sqrt{7}$

よって　$\log\sqrt{5}^{\sqrt{7}} < \log\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$

底 e は 1 より大きいから　$\sqrt{5}^{\sqrt{7}} < \sqrt{7}^{\sqrt{5}}$

$\boxed{18}$

解答　(1) $x=e$ のとき極大値 $\dfrac{1}{e}$　(2) $a=2$，$b=4$

解説

(1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ から

$f'(x) = \dfrac{(\log x)'\cdot x - \log x\cdot(x)'}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

ゆえに，$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

よって，$f(x)$ は $x=e$ のとき極大値 $\dfrac{\log e}{e} = \dfrac{1}{e}$ をとる.

(2) $a^b = b^a$ (a，b は自然数で $a<b$)

両辺の自然対数をとると　$b\log a = a\log b$

ゆえに　$\dfrac{\log a}{a} = \dfrac{\log b}{b}$

$2<e<3$ であるから，(1) の増減表により $1 \leqq a \leqq 2$ かつ $b \geqq 3$ であることがわかる.

$a=1$ とすると，与式は，$1=b$ となり，不適.

$a=2$ とすると，与式は，$2^b = b^2$ となり，$b=4$ は，これを満たす.

以上により　$a=2$，$b=4$

$\boxed{19}$

解答　(1) $\vec{v}(t) = \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2},\ \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$，$\vec{\alpha}(t) = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2},\ \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$

(2) $\cos\theta(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}}$

解説

(1) $x(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$，$y(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ より

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},\quad \frac{d}{dt}y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},\quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

であるから　$\vec{v}(t) = \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2},\ \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$，$\vec{\alpha}(t) = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2},\ \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$

(2) $\vec{v}(t)\cdot\vec{\alpha}(t) = \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right) + \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})$，

$|\vec{v}(t)| = |\vec{\alpha}(t)| = \sqrt{\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t})}$

よって　$|\vec{v}(t)||\vec{\alpha}(t)| = \left\{\sqrt{\dfrac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t})}\right\}^2 = \dfrac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t})$

ゆえに　$\cos\theta(t) = \dfrac{\vec{v}(t)\cdot\vec{\alpha}(t)}{|\vec{v}(t)||\vec{\alpha}(t)|} = \dfrac{\dfrac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})}{\dfrac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t})} = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}}$

1

解答　(1)　$x=-a\pm\sqrt{a^2+1}$　　(2)　$\beta<1$　　(3)　$a=\frac{3}{4}$

解説

(1)　$f'(x)=\frac{x^2+1-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^2+2ax-1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x^2+2ax-1=0$

これを解いて　$x=-a\pm\sqrt{a^2+1}$

(2)　$\alpha<\beta$ であるから　$\beta=-a+\sqrt{a^2+1}$

よって　$\beta-1=-a-1+\sqrt{a^2+1}=\frac{(a^2+1)-(a+1)^2}{\sqrt{a^2+1}+a+1}=\frac{-2a}{\sqrt{a^2+1}+a+1}$

$a>0$ であるから　$\beta-1<0$　　ゆえに　$\beta<1$

(3)　$f'(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x^2+1)^2}$ であり

$\alpha=-a-\sqrt{a^2+1}<0$

また，(2)より $0<\beta<1$ であるから，

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↗	極大 $f(\beta)$	↘	$\frac{a+1}{2}$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲において，$f(x)$ は $x=\beta$ のとき極大かつ最大となり，その値は　$f(\beta)=\frac{\beta+a}{\beta^2+1}$　　最大値は1であるから　$\frac{\beta+a}{\beta^2+1}=1$

分母を払って　$\beta+a=\beta^2+1$

よって　$a=\beta^2-\beta+1$　……①

β は $x^2+2ax-1=0$ の解であるから　$\beta^2+2a\beta-1=0$

これに①を代入して整理すると　$2\beta^3-\beta^2+2\beta-1=0$

ゆえに　$(\beta^2+1)(2\beta-1)=0$　　$\beta^2+1>0$ であるから　$\beta=\frac{1}{2}$

①に代入して　$a=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

2

解答　(1)　$L=\frac{2a^2}{a^2-1}$ $(a>1)$　　(2)　$a=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

解説

(1)　ℓ は x 軸に垂直でないから，その方程式は

$y=m(x-1)+a$

とおける。

これを変形すると　$mx-y+a-m=0$

ℓ と C が接するから

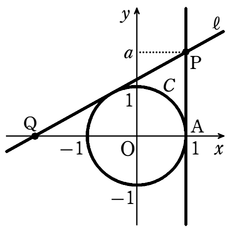
$\frac{|m\cdot 0-0+a-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

よって　$|a-m|=\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(a-m)^2=m^2+1$

整理すると　$2am=a^2-1$

ゆえに　$m=\frac{a^2-1}{2a}$



よって，ℓ の方程式は　$y=\frac{a^2-1}{2a}(x-1)+a$

$y=0$ とすると　$\frac{a^2-1}{2a}(x-1)+a=0$

これを解いて　$x=\frac{1+a^2}{1-a^2}$

これが点Qの x 座標であるから　$L=1-\frac{1+a^2}{1-a^2}=\frac{2a^2}{a^2-1}$ $(a>1)$

(2)　$S=\frac{1}{2}\cdot L\cdot \mathrm{PA}=\frac{a^3}{a^2-1}$

$S'=\frac{3a^2(a^2-1)-a^3\cdot 2a}{(a^2-1)^2}=\frac{a^2(a^2-3)}{(a^2-1)^2}=\frac{a^2(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}{(a^2-1)^2}$

$a>1$ における S の増減表は，次のようになる。

a	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
S'		$-$	0	$+$
S		↘	極小	↗

よって，S は $a=\sqrt{3}$ のとき極小かつ最小になる。

したがって，最小値は　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3

解答　$a=2$，$S(a)=4$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{P_1Q}}=(-1,\ 0,\ a-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{P_2Q}}=(-1,\ -1,\ a-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{P_3Q}}=(-1,\ 0,\ a-3)$

点 $\mathrm{R_1}$ は直線 $\mathrm{P_1Q}$ 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OR_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{P_1Q}}$，すなわち

$\overrightarrow{\mathrm{OR_1}}=(1-t,\ 0,\ 1-t+at)$ と表される。

点 $\mathrm{R_1}$ は xy 平面上にあるから，$1-t+at=0$ とすると，$a\fallingdotseq 1$ であるから

$t=-\frac{1}{a-1}$

よって　$\mathrm{R_1}\left(\frac{a}{a-1},\ 0,\ 0\right)$

同様にして　$\mathrm{R_2}\left(\frac{a}{a-1},\ \frac{a}{a-1},\ 0\right)$，$\mathrm{R_3}\left(\frac{a}{a-3},\ 0,\ 0\right)$

$1<a<3$ より $\frac{a}{a-3}<\frac{a}{a-1}$ であるから

$S(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a-3}\right)\cdot\frac{a}{a-1}=-\frac{a^2}{(a-1)^2(a-3)}$

ゆえに　$S'(a)=-\frac{2a(a-1)^2(a-3)-a^2\{2(a-1)(a-3)+(a-1)^2\}}{(a-1)^4(a-3)^2}$

$=\frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(a-3)^2}$

$S'(a)=0$ とすると　$a=2$

したがって，$1<a<3$ における $S(a)$ の増減表は右のようになる。

a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$	/	$-$	0	$+$	/
$S(a)$	/	↘	4	↗	/

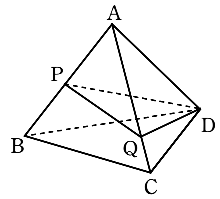
よって，$S(a)$ は $a=2$ のとき最小値4をとる。

4

解答　$\frac{\sqrt{7}}{3}$

解説

$\mathrm{AQ}=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ とおく。



△APQ において，余弦定理から

$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cos\angle\mathrm{PAQ}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+t^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot t\cos\frac{\pi}{3}=t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}$

$\mathrm{PQ}>0$ であるから　$\mathrm{PQ}=\sqrt{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}$

△AQD において，余弦定理から

$\mathrm{QD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AQ}\cos\angle\mathrm{DAQ}$

$=1^2+t^2-2\cdot 1\cdot t\cos\frac{\pi}{3}$

$=t^2-t+1$

$\mathrm{QD}>0$ であるから　$\mathrm{QD}=\sqrt{t^2-t+1}$

△ABD は正三角形であり，点Pは辺ABの中点であるから

$\mathrm{PD}=\mathrm{AD}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

△PQD において，余弦定理から

$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\frac{\mathrm{PD}^2+\mathrm{QD}^2-\mathrm{PQ}^2}{2\mathrm{PD}\cdot\mathrm{QD}}$

$=\frac{\frac{3}{4}+(t^2-t+1)-\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3-t}{\sqrt{t^2-t+1}}$

ここで，$f(t)=\frac{(3-t)^2}{t^2-t+1}$ とおくと

$f'(t)=\frac{-2(3-t)(t^2-t+1)-(3-t)^2(2t-1)}{(t^2-t+1)^2}$

$=\frac{(t-3)(5t-1)}{(t^2-t+1)^2}$

$0\leqq t\leqq 1$ の範囲において，$f'(t)=0$ とすると

$t=\frac{1}{5}$

よって，$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{\left(\frac{14}{5}\right)^2}{\frac{1}{25}-\frac{1}{5}+1}=\frac{196}{21}$ であるから，$f(t)$ は $t=\frac{1}{5}$ のとき最大値 $\frac{196}{21}$ をとる。

$0\leqq t\leqq 1$ より $\cos\angle\mathrm{PDQ}>0$ であるから，$f(t)$ が最大となるとき $\cos\angle\mathrm{PDQ}$ も最大となる。

その最大値は　$\frac{\sqrt{\frac{196}{21}}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

5

解答 (1) $f(t)=t^2-2at+2a^2-\dfrac{2a}{t}+\dfrac{1}{t^2}$

(2) $1<a\leqq 2$ のとき $t=1$，$2<a$ のとき $t=1$，$\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$

(3) $1<a\leqq 2$ のとき，Pの座標は $(1,\ 1)$，最小値は $\sqrt{2}\,(a-1)$；

$2<a$ のとき，Pの座標は $\left(\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2},\ \dfrac{a\mp\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ (複号同順)，

最小値は $\sqrt{a^2-2}$

解説

(1) $f(t)=\mathrm{AP}^2=(t-a)^2+\left(\dfrac{1}{t}-a\right)^2$

$=t^2-2at+a^2+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2a}{t}+a^2$

$=t^2-2at+2a^2-\dfrac{2a}{t}+\dfrac{1}{t^2}$

(2) $f'(t)=2t-2a+\dfrac{2a}{t^2}-\dfrac{2}{t^3}$

$=\dfrac{2(t^4-at^3+at-1)}{t^3}$

$=\dfrac{2(t+1)(t-1)(t^2-at+1)}{t^3}$

$f'(t)=0$ とすると　$t=\pm 1$　または　$t^2-at+1=0$　……①

① の判別式を D とすると　$D=a^2-4=(a+2)(a-2)$

[1] $1<a<2$ のとき　$D<0$ であるから，① は実数解をもたない。

[2] $a=2$ のとき　① は重解 $t=1$ をもつ。

[3] $2<a$ のとき　$D>0$ であるから，① は異なる2つの実数解 $t=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$ をもつ。

$a>\sqrt{a^2-4}$ であるから，これらの2つの解はともに正である。

よって，$f'(t)=0$ となる $t\ (t>0)$ の値は

$1<a\leqq 2$ のとき　$t=1$

$2<a$ のとき　$t=1$，$\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$

(3) [1] $1<a\leqq 2$ のとき

$t>0$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	…	1	…
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

よって，$t=1$ のとき $f(t)$ は最小となり

$f(1)=(1-a)^2+(1-a)^2=2(a-1)^2$

ゆえに，APの最小値は　$\sqrt{2}(a-1)$

このとき，Pの座標は　$(1,\ 1)$

[2] $2<a$ のとき

① の2つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=a$　……②

$\alpha\beta=1$　……③

③ から　$\beta=\dfrac{1}{\alpha}$

$0<\alpha<\dfrac{1}{\alpha}$ であるから　$\alpha^2<1$　　よって　$0<\alpha<1$

ゆえに，$1<\dfrac{1}{\alpha}$ であるから　$1<\beta$

$t>0$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	…	α	…	1	…	β	…
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗		↘		↗

②，③ から

$f(\alpha)=(\alpha-a)^2+\left(\dfrac{1}{\alpha}-a\right)^2$

$=(\alpha-a)^2+(\beta-a)^2$

$=\alpha^2+\beta^2-2a(\alpha+\beta)+2a^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2a(\alpha+\beta)+2a^2$

$=a^2-2\cdot 1-2a\cdot a+2a^2$

$=a^2-2$

同様に　$f(\beta)=a^2-2$

よって，$f(t)$ は $t=\alpha$，β のとき最小となる。

ゆえに，APの最小値は　$\sqrt{a^2-2}$

このとき，Pの座標は　$\left(\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2},\ \dfrac{a\mp\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ (複号同順)

参考 $f(t)=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2a\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+2a^2-2$

$X=t+\dfrac{1}{t}$ とおくと，$t>0$，$\dfrac{1}{t}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係に

より　$X\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$　等号は $t=1$ のときに成り立つ。

よって　$f(t)=X^2-2aX+2a^2-2$

$=(X-a)^2+a^2-2\quad (X\geqq 2)$

[1] $1<a\leqq 2$ のとき

$f(t)$ は $X=2$ のとき最小値 $2(a-1)^2$ をとる。

$X=2$ となるのは，$t=1$ のときである。

[2] $2<a$ のとき

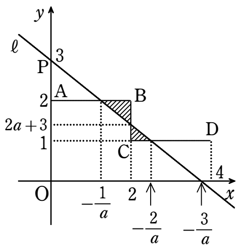
$f(t)$ は $X=a$ のとき最小値 a^2-2 をとる。

$X=a$ となるのは，$t+\dfrac{1}{t}=a$ すなわち $t^2-at+1=0$ のときである。

6

解答 (1) $-1<a<-\dfrac{1}{2}$　(2) $V=\pi\left(-\dfrac{16}{3}a^2-24a-\dfrac{9}{a}-26\right)$　(3) 略

解説



(1) 直線 ℓ の方程式は　$y=ax+3$

ℓ と直線 $x=2$ の交点の y 座標は　$2a+3$

よって，ℓ が線分BCと2点B，C以外で交わるための条件は　$1<2a+3<2$

ゆえに，求める a の値の範囲は　$-1<a<-\dfrac{1}{2}$

(2) $y=ax+3\left(\text{ただし }-1<a<-\dfrac{1}{2}\right)$ において

$y=2$ とすると　$x=-\dfrac{1}{a}$

$y=1$ とすると　$x=-\dfrac{2}{a}$

$y=0$ とすると　$x=-\dfrac{3}{a}$

ゆえに，直線 ℓ と線分AB，線分CD，x 軸の交点の x 座標は，それぞれ

$-\dfrac{1}{a}$，$-\dfrac{2}{a}$，$-\dfrac{3}{a}$

よって　$V_1=\pi\cdot 2^2\left(2+\dfrac{1}{a}\right)-\dfrac{1}{3}\pi\cdot 2^2\left(-\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{a}\right)+\dfrac{1}{3}\pi(2a+3)^2\left(-\dfrac{3}{a}-2\right)$

$=\pi\left(-\dfrac{8}{3}a^2-12a-\dfrac{7}{3a}-10\right)$

また　$V_2=\dfrac{1}{3}\pi(2a+3)^2\left(-\dfrac{3}{a}-2\right)-\dfrac{1}{3}\pi\cdot 1^2\left(-\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{a}\right)-\pi\cdot 1^2\left(-\dfrac{2}{a}-2\right)$

$=\pi\left(-\dfrac{8}{3}a^2-12a-\dfrac{20}{3a}-16\right)$

ゆえに　$V=V_1+V_2=\pi\left(-\dfrac{16}{3}a^2-24a-\dfrac{9}{a}-26\right)$

(3) (2) から　$\dfrac{dV}{da}=\pi\left(-\dfrac{32}{3}a-24+\dfrac{9}{a^2}\right)=\dfrac{-\pi(32a^3+72a^2-27)}{3a^2}$

$=\dfrac{-\pi(4a+3)(8a^2+12a-9)}{3a^2}$

ここで　$8a^2+12a-9=8\left(a-\dfrac{-3-3\sqrt{3}}{4}\right)\left(a-\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{4}\right)$，

$\dfrac{-3-3\sqrt{3}}{4}<-1$，$-\dfrac{1}{2}<\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{4}$

よって，$-1<a<-\dfrac{1}{2}$ のとき　$8a^2+12a-9<0$

ゆえに，$-1<a<-\dfrac{1}{2}$ において $\dfrac{dV}{da}=0$ とすると，$4a+3=0$ から　$a=-\dfrac{3}{4}$

V の増減表は次のようになる。

a	-1	…	$-\frac{3}{4}$	…	$-\frac{1}{2}$
$\frac{dV}{da}$		$-$	0	$+$	
V		↘	極小	↗	

よって，V は $a=-\dfrac{3}{4}$ のとき最小値をとる。

7

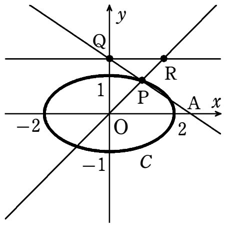
解答　(1) $\left(\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$　(2) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-4}}$　(3) $\dfrac{3a^2}{3a^2+4}$

解説

(1)　$a>2$ より $2\cos\theta-a\neq0$ であるから，直線 AP の

方程式は　$y=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta-a}(x-a)$

$x=0$ とすると　$y=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$



また，直線 OP の方程式は

$(y-0)(2\cos\theta-0)=(\sin\theta-0)(x-0)$

すなわち　$2y\cos\theta=x\sin\theta$

$y=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ のとき　$\dfrac{2a\sin\theta\cos\theta}{a-2\cos\theta}=x\sin\theta$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta\neq0$ であるから　$x=\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}$

よって，点 R の座標は　$\left(\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$

(2)　$f(\theta)=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ から

$$f'(\theta)=a\cdot\frac{\cos\theta(a-2\cos\theta)-\sin\theta\cdot2\sin\theta}{(a-2\cos\theta)^2}=\frac{a(a\cos\theta-2)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$f'(\theta)=0$ とすると　$a\cos\theta-2=0$　……①

$a>2$ であるから，$0<\theta<\pi$ の範囲に ① を満たす θ の値がただ 1 つ存在する。

その値を α とおくと，$0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の増減表は右のようになる。

θ	0	…	α	…	π
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{2}{a}$ であるから

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$$

よって，$0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値は

$$f(\alpha)=\frac{a\sin\alpha}{a-2\cos\alpha}=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a-\dfrac{4}{a}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}$$

(3)　$g(\theta)=\dfrac{a^2(4\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{(a-2\cos\theta)^2}=\dfrac{a^2(3\cos^2\theta+1)}{(a-2\cos\theta)^2}$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0<\theta<\pi$ から　$-1<t<1$

このとき　$g(\theta)=\dfrac{a^2(3t^2+1)}{(a-2t)^2}$

$h(t)=\dfrac{3t^2+1}{(a-2t)^2}$ とおく。$-1<t<1$ における $h(t)$ の最小値を求めればよい。

$$h'(t)=\frac{6t(a-2t)^2+4(3t^2+1)(a-2t)}{(a-2t)^4}=\frac{2(3at+2)}{(a-2t)^3}$$

$h'(t)=0$ とすると　$3at+2=0$

$a>2$ より $-\dfrac{1}{3}<-\dfrac{2}{3a}<0$ であるから，

$-1<t<1$ における $h(t)$ の増減表は右のようになる。

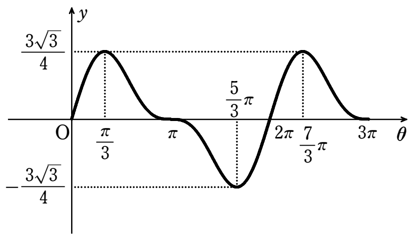
t	-1	…	$-\dfrac{2}{3a}$	…	1
$h'(t)$		−	0	+	
$h(t)$		↘	極小	↗	

$$h\left(-\frac{2}{3a}\right)=\frac{\dfrac{4}{3a^2}+1}{\left(a+\dfrac{4}{3a}\right)^2}=\frac{3}{3a^2+4}$$ であるから，求める $g(\theta)$ の最小値は

$$\frac{3a^2}{3a^2+4}$$

8

解答　(1)［図］



(2)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき $g(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\dfrac{\pi}{3}<x\leqq\pi$ のとき $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin2x+\sin x$

$\pi<x\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ のとき $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin2x-\sin x$

$\dfrac{4}{3}\pi<x\leqq2\pi$ のとき $g(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)　$f(\theta+2\pi)=\dfrac{1}{2}\sin2(\theta+2\pi)+\sin(\theta+2\pi)=\dfrac{1}{2}\sin(2\theta+4\pi)+\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\sin2\theta+\sin\theta=f(\theta)$

よって，$f(\theta)$ は 2π を周期とする周期関数である。

ゆえに，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲の増減を考えればよい。

$f'(\theta)=\cos2\theta+\cos\theta=(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta$

$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

$f'(\theta)=0$ とすると　$\cos\theta=-1,\ \dfrac{1}{2}$

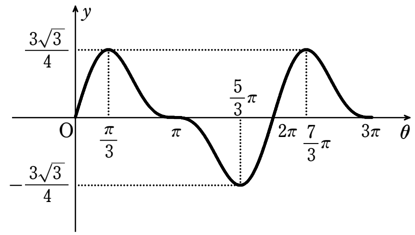
$0\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲でこれを解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

$0\leqq\theta\leqq2\pi$ における $f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0	…	$\dfrac{\pi}{3}$	…	π	…	$\dfrac{5}{3}\pi$	…	2π
$f'(\theta)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(\theta)$	0	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

$y=f(\theta)$ $(2\pi\leqq\theta\leqq3\pi)$ のグラフは，$y=f(\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ のグラフを θ 軸方向に 2π だけ平行移動したものである。

したがって，$y=f(\theta)$ のグラフを $0\leqq\theta\leqq3\pi$ の範囲でかくと，次の図のようになる。

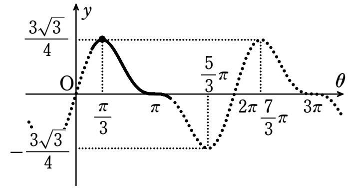


(2)　[1]　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$x\leqq\theta\leqq x+\pi$ における $y=f(\theta)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。

よって

$g(x)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$



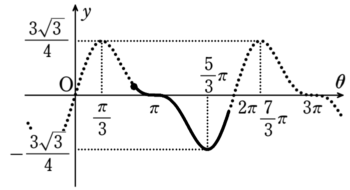
[2]　$\dfrac{\pi}{3}<x\leqq\pi$ のとき

$x+\pi\leqq2\pi$ であるから，

$x\leqq\theta\leqq x+\pi$ における $y=f(\theta)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。

よって

$g(x)=f(x)=\dfrac{1}{2}\sin2x+\sin x$



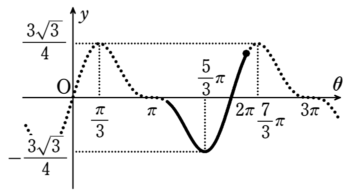
[3]　$\pi<x$ かつ $x+\pi\leqq\dfrac{7}{3}\pi$ すなわち $\pi<x\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ のとき

$x\leqq\theta\leqq x+\pi$ における $y=f(\theta)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。

よって　$g(x)=f(x+\pi)$

$=\dfrac{1}{2}\sin2(x+\pi)+\sin(x+\pi)$

$=\dfrac{1}{2}\sin(2x+2\pi)-\sin x=\dfrac{1}{2}\sin2x-\sin x$

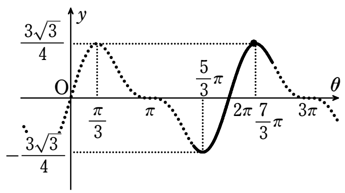


[4]　$\dfrac{4}{3}\pi<x\leqq2\pi$ のとき

$\dfrac{7}{3}\pi<x+\pi$ であるから，

$x\leqq\theta\leqq x+\pi$ における $y=f(\theta)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。

よって　$g(x)=f\left(\dfrac{7}{3}\pi\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$



以上から，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$g(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\pi}{3}<x\leqq\pi$ のとき　$g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x$

$\pi<x\leqq\frac{4}{3}\pi$ のとき　$g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x$

$\frac{4}{3}\pi<x\leqq 2\pi$ のとき　$g(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

9

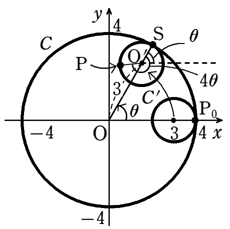
解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$　(2) $x=4\cos^3\theta$，$y=4\sin^3\theta$　(3) 略

解説

(1) $\mathrm{OO'}=3$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$

(2) 円 C と円 C' の接点をSとおくと，円 C' の弧PSの長さは，円 C の弧 $\mathrm{P_0S}$ の長さ 4θ と等しい。

よって，右の図より



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$
$$=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)+(\cos(\theta-4\theta),\ \sin(\theta-4\theta))$$
$$=(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$$

ここで　$3\cos\theta+\cos 3\theta=3\cos\theta+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$
$=4\cos^3\theta$，

$3\sin\theta-\sin 3\theta=3\sin\theta-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$
$=4\sin^3\theta$

よって，$\mathrm{P}(4\cos^3\theta,\ 4\sin^3\theta)$ であるから　$x=4\cos^3\theta$，$y=4\sin^3\theta$

(3) $\frac{dx}{d\theta}=-12\cos^2\theta\sin\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=12\sin^2\theta\cos\theta$

ここで，点 $\mathrm{P}(4\cos^3\theta,\ 4\sin^3\theta)$ は座標軸上の点ではないから

$\cos\theta\neq 0$　かつ　$\sin\theta\neq 0$

よって，曲線 X 上の点Pにおける接線の方程式は

$$y-4\sin^3\theta=\frac{12\sin^2\theta\cos\theta}{-12\cos^2\theta\sin\theta}(x-4\cos^3\theta)$$

すなわち　$y=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x+4\sin\theta$

この接線と x 軸，y 軸との交点Q，Rの座標は，それぞれ
$\mathrm{Q}(4\cos\theta,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 4\sin\theta)$

ゆえに　$\mathrm{QR}=\sqrt{(4\cos\theta-0)^2+(0-4\sin\theta)^2}$
$=\sqrt{16(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=4$

したがって，線分QRの長さは一定である。

10

解答　(1) $x=e$ で最大値 $\frac{1}{e}$　(2) $a=e$，$t=e$　(3) $e^x>x^a$

解説

(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=e$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	↗	極大	↘

また　$f(e)=\frac{1}{e}$

したがって，$f(x)$ は $x=e$ のとき最大値 $\frac{1}{e}$ をとる。

(2) $g(x)=e^x$，$h(x)=x^a$ とおくと　$g'(x)=e^x$，$h'(x)=ax^{a-1}$

$y=g(x)$ のグラフと $y=h(x)$ のグラフが $x=t\ (t>0)$ で共有点をもち，かつ，その点で共通の接線をもつための条件は　$\begin{cases} g(t)=h(t) \\ g'(t)=h'(t) \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} e^t=t^a & \cdots\cdots ① \\ e^t=at^{a-1} & \cdots\cdots ② \end{cases}$　① を ② に代入すると　$t^a=at^{a-1}$

$t^{a-1}>0$ であるから，両辺を t^{a-1} で割ると　$t=a$　① から　$e^a=a^a$

$a>0$ であるから，両辺を $\frac{1}{a}$ 乗すると　$e=a$　よって　$a=e$，$t=e$

(3) (1) から，$x\neq e$ のとき　$f(x)<f(e)$　すなわち　$\frac{\log x}{x}<\frac{\log e}{e}$

$ex>0$ であるから，両辺に ex を掛けると　$e\log x<x\log e$
$\log x^e<\log e^x$

底 e は1より大きいから　$x^e<e^x$

したがって，$x>0$ かつ $x\neq t$ のとき　$e^x>x^a$

11

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

(1) $f'(x)=\frac{a-b}{ax+b(1-x)}-\log a+\log b$

$f''(x)=\frac{-(a-b)(a-b)}{\{ax+b(1-x)\}^2}=-\frac{(a-b)^2}{\{ax+b(1-x)\}^2}$

$a>b>0$ より，$0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2) 関数 $f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で連続で，$0<x<1$ で微分可能であるから，平均値の定理により

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c),\quad 0<c<1$$

を満たす実数 c が存在する。

ここで，$f(1)=f(0)=0$ であるから　$f'(c)=0$

よって，$f'(c)=0$ を満たす c が $0<c<1$ の範囲に少なくとも1つ存在する。

また，(1) より $0<x<1$ のとき $f''(x)<0$ であるから，$f'(x)$ は単調に減少する。

したがって，$f'(c)=0$ を満たす実数 c が $0<c<1$ の範囲にただ1つ存在する。

(3) (2) より，$f'(x)$ は $0<x<1$ で単調に減少し，$f'(c)=0$ であるから

$0<x<c$ のとき　$f'(x)>0$，　$c<x<1$ のとき　$f'(x)<0$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq 0$ が成り立つから

$\log(ax+b(1-x))\geqq\log a^xb^{1-x}$

底 $e>1$ であるから　$ax+b(1-x)\geqq a^xb^{1-x}$

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して $ax+b(1-x)\geqq a^xb^{1-x}$ が成り立つ。

12

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

(1) すべての実数 x に対して $f''(x)>0$ であるから，$f'(x)$ は単調に増加する。

したがって，$0\leqq x<1$ のとき　$f'(0)\leqq f'(x)<f'(1)$

また，条件より $f'(0)>0$ であるから，$0\leqq x<1$ のとき　$f'(x)\geqq f'(0)>0$

よって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において単調に増加する。

したがって，$0\leqq x<1$ のとき　$f(0)\leqq f(x)<f(1)$

条件より $f(1)=1$ であるから　$f(0)\leqq f(x)<1$

(2) まず，すべての自然数 n に対して $0\leqq x_n<1$ ……①　が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき　$x_1=0$ であるから，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち　$0\leqq x_k<1$ ……② と仮定する。

$n=k+1$ のとき $x_{k+1}=f(x_k)$ であり，② と (1) から　$f(0)\leqq f(x_k)<1$

$f(0)>0$ であるから　$0<x_{k+1}<1$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] により，① はすべての自然数 n について成り立つ。

ここで，$f(x)$ は第2次導関数をもつことから，$0\leqq x\leqq 1$ で連続で，$0<x<1$ で微分可能である。

$0\leqq x_n<1$ であるから，平均値の定理により

$$\frac{f(1)-f(x_n)}{1-x_n}=f'(c),\quad x_n<c<1$$

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)$ は単調に増加し，$c<1$ であるから　$f'(c)<f'(1)$

ゆえに　$\frac{f(1)-f(x_n)}{1-x_n}<f'(1)$

$1-x_n>0$ であるから　$f(1)-f(x_n)<f'(1)(1-x_n)$

$f(1)=1$，$f(x_n)=x_{n+1}$ であるから　$1-x_{n+1}<f'(1)(1-x_n)$

また，$0\leqq x_{n+1}<1$ であるから　$1-x_{n+1}>0$

したがって，すべての自然数 n に対して　$0<1-x_{n+1}<f'(1)(1-x_n)$　が成り立つ。

(3) (2) より　$0<1-x_n<f'(1)(1-x_{n-1})<\{f'(1)\}^2(1-x_{n-2})$
$\cdots\cdots<\{f'(1)\}^{n-1}(1-x_1)=\{f'(1)\}^{n-1}$

条件より，$0<f'(1)<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\{f'(1)\}^{n-1}=0$

よって，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}x_n=1$

13

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 1

解説

(1) $f'(x)=\cos x-2nx+\frac{1}{3}x^2$

$f''(x)=-\sin x-2n+\frac{2}{3}x=-\sin x+\left(\frac{2}{3}x-2n\right)$

ここで，$0<x<\frac{\pi}{2}$ であるから　$-\sin x<0$

また，$n\geqq 1$，$3<\pi<4$ であるから　$\frac{2}{3}x-2n<\frac{\pi}{3}-2n<\frac{4}{3}-2n<0$

よって，$f''(x)<0$ である。

(2) (1) より，$f'(x)$ は $0<x<\frac{\pi}{2}$ において単調に減少する。

このことと

$$f'(0)=1>0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\pi n<\frac{4^2}{12}-3n=\frac{4}{3}-3n<0$$

より，方程式 $f'(x)=0$ は $0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つの解をもつ。

それを α とおくと，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

$f(0)=0$ であるから，$f(\alpha)>0$ であり，さらに

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^3}{72}-\frac{\pi^2}{4}n+1$$

$$<\frac{4^3}{72}-\frac{3^2}{4}n+1=\frac{17}{9}-\frac{9}{4}n<0$$

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

したがって，方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つの解をもつ。

(3) x_n は，方程式 $f(x)=0$ の解であるから　$\sin x_n-nx_n{}^2+\frac{1}{9}x_n{}^3=0$

よって　$x_n{}^2=\frac{1}{n}\left(\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3\right)$

$0<x_n<\frac{\pi}{2}$ より　$0<x_n=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3\right)}<\sqrt{\frac{1}{n}\left(1+\frac{\pi^3}{72}\right)}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\left(1+\frac{\pi^3}{72}\right)}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}x_n=0$

また，$nx_n=\frac{\sin x_n}{x_n}+\frac{1}{9}x_n{}^2$ であるから，$\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることに注意すると

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}+\frac{1}{9}x_n{}^2\right)=1$$

14

解答　$a<-2,\ -\frac{5}{4}-\log 2<a$ のとき $n(a)=1$；$a=-2,\ a=-\frac{5}{4}-\log 2$ のとき

$n(a)=2$；$-2<a<-\frac{5}{4}-\log 2$ のとき $n(a)=3$

解説

曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における法線の方程式は　$y=-e^{-t}(x-t)+e^t$

この直線が点 $\mathrm{P}(a,\ 3)$ を通るとすると　$3=-e^{-t}(a-t)+e^t$ から　$a=e^{2t}-3e^t+t$

ここで，$f(t)=e^{2t}-3e^t+t$ とおくと　$f'(t)=2e^{2t}-3e^t+1=(2e^t-1)(e^t-1)$,

$f(-\log 2)=-\frac{5}{4}-\log 2,\ f(0)=-2,\ \lim_{t\to\infty}f(t)=\infty,\ \lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$

よって，$n(a)$ は，直線 $y=a$ と曲線 $y=f(t)$ の共有点の個数となるから

$a<-2$ のとき　$n(a)=1$，$a=-2$ のとき　$n(a)=2$,

$-2<a<-\frac{5}{4}-\log 2$ のとき　$n(a)=3$，$a=-\frac{5}{4}-\log 2$ のとき　$n(a)=2$,

$a>-\frac{5}{4}-\log 2$ のとき　$n(a)=1$

15

解答　(1) $\mathrm{T}_2\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{T}_3\left(\frac{1}{16},\ \frac{1}{4}\right)$　(2) $\mathrm{P}_n\left(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$，$\mathrm{T}_n\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

(3) $\frac{2}{7}$

解説

(1) $y=\sqrt{x}$ から　$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

T_1 における C の接線の方程式は

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\qquad すなわち\qquad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

よって　$\mathrm{P}_2\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$　ゆえに　$\mathrm{T}_2\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$

また，T_2 における C の接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=1\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)\qquad すなわち\qquad y=x+\frac{1}{4}$$

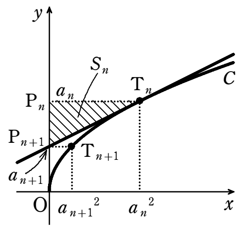
よって　$\mathrm{P}_3\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$　ゆえに　$\mathrm{T}_3\left(\frac{1}{16},\ \frac{1}{4}\right)$

(2) $\mathrm{P}_n(0,\ a_n)$ とすると　$\mathrm{T}_n(a_n{}^2,\ a_n)$

また　$a_n>0$

T_n における C の接線の方程式は

$$y-a_n=\frac{1}{2\sqrt{a_n{}^2}}(x-a_n{}^2)$$



すなわち　$y=\frac{1}{2a_n}x+\frac{1}{2}a_n$

よって　$\mathrm{P}_{n+1}\left(0,\ \frac{1}{2}a_n\right)$

ゆえに　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$　……①

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad ……②$$

ゆえに　$\mathrm{P}_n\left(0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$，$\mathrm{T}_n\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

(3) ①，② から　$S_n=\frac{1}{2}a_n{}^2(a_n-a_{n+1})=\frac{1}{2}a_n{}^2\cdot\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{4}a_n{}^3=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

よって，$\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は初項 $\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{8}$ の無限等比級数であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$$

16

解答　(1) ℓ_1：$y=\frac{1}{t}x+\log t-1$，ℓ_2：$y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{s}}x+\frac{1}{2}\sqrt{as}$　(2) $a>\frac{4}{e^2}$

解説

(1) $y=\log x$ から　$y'=\frac{1}{x}$

よって，ℓ_1 の方程式は　$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$　すなわち　$y=\frac{1}{t}x+\log t-1$

$y=\sqrt{ax}\ (a>0)$ から　$y'=\frac{a}{2\sqrt{ax}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$

よって，ℓ_2 の方程式は　$y-\sqrt{as}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{s}}(x-s)$

すなわち　$y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{s}}x+\frac{1}{2}\sqrt{as}$

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線が存在しないための条件は，ℓ_1，ℓ_2 が一致するような正の実数 t，s の組が存在しないことである。

すなわち $\frac{1}{t}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{s}}$ ……①，$\log t-1=\frac{1}{2}\sqrt{as}$ ……② をともに満たす正の実数 t，s の組が存在しないことである。

①，② が成り立つとすると，① から　$2\sqrt{s}=t\sqrt{a}$

両辺は正であり，それぞれ2乗すると　$4s=t^2a$

よって　$s=\frac{1}{4}t^2a$　……(＊)

これを ② に代入すると　$\log t-1=\frac{1}{2}\sqrt{a\cdot\frac{1}{4}t^2a}$

$a>0$，$t>0$ であるから，この式を整理すると　$\frac{4(\log t-1)}{t}=a$　……③

③ を満たす正の実数 t が存在すれば，(＊) から，①，② を満たす正の実数 t，s の組が存在する。

よって，③ を満たす正の実数 t が存在しないような a の値の範囲が求めるものである。

$f(t)=\frac{4(\log t-1)}{t}\ (t>0)$ とすると

$$f'(t)=4\cdot\frac{\frac{1}{t}\cdot t-(\log t-1)\cdot 1}{t^2}=\frac{-4(\log t-2)}{t^2}$$

$f'(t)=0$ とすると　$t=e^2$

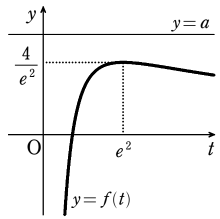
$t>0$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

また　$\lim_{t\to+0}f(t)=-\infty$，$\lim_{t\to\infty}f(t)=0$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右のようになる。

したがって，求める a の値の範囲は　$a>\frac{4}{e^2}$



$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　$0<y<\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1-(1+x)(1-x)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$$

よって，$x>0$ のとき　$f'(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき，$f(x)$ は単調に増加するから

$$f(x)>f(0)=0 \quad \text{すなわち} \quad x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x) \quad \cdots\cdots ①$$

$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ とおくと

$$g'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{1+x}-x\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{1+x}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{2(1+x)-x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}-\frac{1}{1+x}=\frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \quad \cdots\cdots ②$$

$x>0$ のとき，$x+2>0$，$2\sqrt{1+x}>0$ であり

$$(x+2)^2-(2\sqrt{1+x})^2=(x^2+4x+4)-4(1+x)=x^2>0$$

よって，$x>0$ のとき，$x+2>2\sqrt{1+x}$ であるから，② より　$g'(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき，$g(x)$ は単調に増加するから

$$g(x)>g(0)=0 \quad \text{すなわち} \quad \log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \cdots\cdots ③$$

①，③ から，$x>0$ のとき　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

参考　$x>0$ のとき，$g'(x)>0$ であることは次のように示してもよい。

$$g'(x)=\frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{(1-\sqrt{1+x})^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}}>0$$

(2)　$y'=\dfrac{-\dfrac{1}{1+x}}{\{\log(1+x)\}^2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(1+x)\{\log(1+x)\}^2-x^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2}$　$\cdots\cdots ④$

$x>0$ のとき，(1) より，$\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ であるから

$$\sqrt{1+x}\log(1+x)<x \quad \cdots\cdots ⑤$$

このとき，$\sqrt{1+x}\log(1+x)>0$ であり，⑤ の両辺を 2 乗しても大小関係は変わらないから　$(1+x)\{\log(1+x)\}^2<x^2$

すなわち　$(1+x)\{\log(1+x)\}^2-x^2<0$

ゆえに，$x>0$ のとき，④ より $y'<0$ であるから，y は単調に減少する。

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log(1+x)}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=0$　$\cdots\cdots ⑥$

次に，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y$ を考える。

$0<x<2$ のとき，$x-\dfrac{x^2}{2}>0$ であるから，(1) より

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{1}{x-\frac{x^2}{2}}$$

したがって　$\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x-\frac{x^2}{2}}-\dfrac{1}{x}$

ここで　$\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\frac{1}{x-\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x(2-x)}-\frac{1}{x}=\frac{2-(2-x)}{x(2-x)}$$

$$=\frac{x}{x(2-x)}=\frac{1}{2-x}$$

であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sqrt{1+x}}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x-\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$$

したがって，はさみうちの原理から　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{2}$

すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\frac{1}{2}$　$\cdots\cdots ⑦$

$x>0$ において y が単調に減少することと，⑥，⑦ から，y のとりうる値の範囲は

$$0<y<\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$

解答　$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2$

解説

$f(x)=\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ とする。

$$f(-x)=\cos(-x)+\frac{\sqrt{3}}{4}(-x)^2=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=f(x)$$

よって，$f(x)$ は偶関数である。

ゆえに，x の範囲を $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ として考える。

$$f'(x)=-\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad f''(x)=-\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$f''(x)=0$ とすると　$\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$x=\dfrac{\pi}{6}$

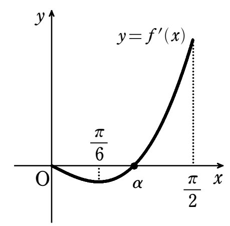
$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f'(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	↘	極小	↗	

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi-4}{4}>\frac{1.7\times3.1-4}{4}=\frac{1.27}{4}>0$$

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $y=f'(x)$ のグラフは右の図のようになり，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で $f'(x)=0$ を満たす x がただ 1 つ存在する。その値を α とおく。



$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

$f(0)=\cos 0=1$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2>\frac{1.7}{16}\times3.1^2=\frac{16.337}{16}>1$$

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大となる。

以上から，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ は $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2$ をとる。

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$　　(2)　$\sqrt{e}$

解説

(1)　$f_n'(\theta)=-\sin^n\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\cos\theta$

$$=\sin^{n-2}\theta(\cos\theta+1)(n\cos\theta-1)$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $f_n'(\theta)=0$ とすると　$\sin\theta=0$，$\cos\theta=\dfrac{1}{n}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{n}$ を満たす θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つ存在する。

その値を α とおくと，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f_n(\theta)$ の増減表は右のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f_n(\theta)$		↗	極大	↘	

よって，$f_n(\theta)$ は $\theta=\alpha$ のとき最大となる。

$\cos\alpha=\dfrac{1}{n}$ から　$\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

ゆえに　$M_n=f_n(\alpha)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

(2)　$(M_n)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n=e\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

(2)　$x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $-\dfrac{125}{3}$

解説

(1)　$x+y=c$ であるから

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

$x>0$，$y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により　　$x+y\geqq 2\sqrt{xy}$

よって　　$xy\leqq\dfrac{c^2}{4}$

$c+1>0$ であるから　　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\geqq 1+\dfrac{c+1}{\dfrac{c^2}{4}}=\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

等号が成り立つのは $x=y=\dfrac{c}{2}$ のときである。

よって，求める最小値は　　$\left(1+\dfrac{2}{c}\right)^2$

(2)　z を $0<z<1$ の範囲に固定して考える。

$x+y=1-z$ であるから，(1) より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ は $x=y=\dfrac{1-z}{2}$ のとき最小値 $\left(1+\dfrac{2}{1-z}\right)^2$ をとる。

$1-\dfrac{4}{3z}<0$ であるから　　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)\leqq\left(1+\dfrac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$

ここで，$f(z)=\left(1+\dfrac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ とおくと

$$f'(z)=2\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\cdot\frac{2}{(1-z)^2}\left(1-\frac{4}{3z}\right)+\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}$$
$$=4\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\cdot\frac{(2z-1)(2z-3)}{3z^2(1-z)^2}$$

$f'(z)=0$ とすると　　$z=\dfrac{1}{2}$

よって，$0<z<1$ における $f(z)$ の増減表は右のようになる。

z	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		↗	$-\frac{125}{3}$	↘	

$z=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$x=y=\dfrac{1}{4}$

ゆえに，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ は $x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

$\boxed{5}$

解答　$f(t)=\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+1-\sqrt{1+t^2}$

解説

$g(x)=t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)-(1+x)$ とおく。

条件 (A) より，すべての実数 x に対して不等式 $g(x)\geqq 0$ が成り立つ。

また，条件 (B) より，等式 $g(x)=0$ を満たす実数 x が存在する。

よって，$g(x)$ がこの 2 つの条件を満たすことは，$g(x)$ の最小値が 0 であることと同値である。

ここで　　$g'(x)=t\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-1$，　$g''(x)=t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して $g''(x)>0$ であるから，$g'(x)$ は単調に増加する。

また　　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g'(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g'(x)=\infty$

よって，$g'(x)=0$ となる実数 x がただ 1 つ存在する。

それを α とおくとき，$g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	極小	↗

ゆえに，$g(x)$ は $x=\alpha$ で最小値をとる。

ここで，$g'(\alpha)=0$ から　　$t\cdot\dfrac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}-1=0$

すなわち　　$te^{2\alpha}-2e^\alpha-t=0$

$e^\alpha>0$，$t>0$ であるから　　$e^\alpha=\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$

よって　　$\alpha=\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$，　$e^{-\alpha}=\dfrac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}$

したがって，$g(x)$ の最小値は

$$g(\alpha)=t\cdot\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}+f(t)-(1+\alpha)$$
$$=\frac{t}{2}\left(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}\right)+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$
$$=\sqrt{1+t^2}+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

これが 0 と等しいことから　　$\sqrt{1+t^2}+f(t)-1-\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=0$

よって　　$f(t)=\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+1-\sqrt{1+t^2}$

$\boxed{6}$

解答　略

解説

示すべき不等式の各辺は正であるから，自然対数をとると

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$t=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$t>0$ であり　　$\dfrac{1}{t}\log(t+1)<1<\dfrac{t+2}{2t}\log(t+1)$

これを示せばよい。

$f(t)=t-\log(t+1)$ とおくと　　$f'(t)=1-\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{t}{t+1}$

$t>0$ のとき $f'(t)>0$ であるから，$f(t)$ は $t>0$ で単調に増加する。

また，$f(0)=0$ であるから，$t>0$ のとき　　$f(t)>0$

よって，$\log(t+1)<t$ から　　$\dfrac{1}{t}\log(t+1)<1$

また，$g(t)=\log(t+1)-\dfrac{2t}{t+2}$ とおくと　　$g'(t)=\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{4}{(t+2)^2}=\dfrac{t^2}{(t+1)(t+2)^2}$

$t>0$ のとき $g'(t)>0$ であるから，$g(t)$ は $t>0$ で単調に増加する。

また，$g(0)=0$ であるから，$t>0$ のとき　　$g(t)>0$

よって，$\dfrac{2t}{t+2}<\log(1+t)$ から　　$1<\dfrac{t+2}{2t}\log(1+t)$

ゆえに，$t>0$ のとき $\dfrac{1}{t}\log(t+1)<1<\dfrac{t+2}{2t}\log(t+1)$ が成り立つから，

$x>0$ のとき　　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$f(x)=\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}-|\log x|$ $(x>0)$ とおく。

[1]　$0<x\leqq 1$ のとき　　$f(x)=-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}+\log x$

よって　　$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{x}-(x-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$

$0<x\leqq 1$ のとき　　$f'(x)\leqq 0$

ゆえに，$f(x)$ は $0<x\leqq 1$ において単調に減少する。

[2]　$x\geqq 1$ のとき　$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}-\log x$　　　よって　$f'(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$

$x\geqq 1$ のとき　　$f'(x)\geqq 0$

ゆえに，$f(x)$ は $x\geqq 1$ において単調に増加する。

[1]，[2] および，$f(x)$ は $x>0$ で連続であることから　　$f(x)\geqq f(1)=0$ $(x>0)$

したがって，$|\log x|\leqq\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ が成り立つ。

(2)　$3(p^2+q^2+r^2)-1=3(p^2+q^2+r^2)-(p+q+r)^2=2(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)$
$\qquad=(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\geqq 0$

したがって，$p^2+q^2+r^2\geqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つ。

(3)　a，b は正の数であるから，$\dfrac{b}{a}$ は正の数である。

よって，(1) から　　$\left|\log\dfrac{b}{a}\right|\leqq\dfrac{\left|\dfrac{b}{a}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}}=\dfrac{|b-a|}{\sqrt{ab}}$

ゆえに　　$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}\leqq\dfrac{ab}{|b-a|}\left|\log\dfrac{b}{a}\right|\leqq\dfrac{ab}{|b-a|}\cdot\dfrac{|b-a|}{\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$

同様にして $\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b}\leqq\sqrt{bc}$，$\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c}\leqq\sqrt{ca}$ が成り立つ。

よって，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}+\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b}+\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c}=P$ とすると

$$P\leqq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-(a+b+c)\}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{a+b+c}{2}$$

ここで，(2) の結果から　　$a+b+c\geqq\dfrac{1}{3}$

ゆえに，$P\leqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ となり，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}+\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b}+\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c}\leqq\dfrac{1}{3}$

が成り立つ。

$\boxed{8}$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ……① とおく。

$-1<x<1$, $x\neq 0$ のとき, $1-x$, $1+x$ はともに正であるから, ① の両辺の自然対数をとると

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x) \quad \cdots\cdots ②$$

① と ② は同値であるから, ② を示せばよい。

$f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)$ とおくと

$$f(x)=\frac{1}{x}\{\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)\}$$

ここで, $g(x)=\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)$ とおくと

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-1$$

$$g''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

$-1<x<1$ において, $g''(x)=0$ とすると $x=0$

$-1<x<1$ における $g'(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		↘	0	↗	

したがって, $-1<x<1$ において $g'(x)\geqq 0$

よって, $-1<x<1$ のとき, $g(x)$ は単調に増加し, $g(0)=0$ であるから

$-1<x<0$ のとき $g(x)<0$, $0<x<1$ のとき $g(x)>0$

$f(x)=\frac{g(x)}{x}$ であるから, $-1<x<1$, $x\neq 0$ のとき $f(x)>0$

ゆえに, 不等式② すなわち 不等式① が成り立つ。

(2) ① の両辺に $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ (>0) を掛けると $1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$

この式に $x=0.01$ を代入して $0.99<0.9999^{100}$

① の両辺に $(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$ (>0) を掛けると $(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$

この式に $x=-0.01$ を代入すると $0.9999^{101}<0.99$

よって, $0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ が成り立つ。

$\boxed{9}$

解答 (1) 略 (2) 1

解説

(1) $y=e^x+1$ 上の点 $(t,\ e^t+1)$ における接線の方程式は, $y'=e^x$ から

$y-(e^t+1)=e^t(x-t)$ すなわち $y=e^tx-te^t+e^t+1$ ……①

① が点 $(a,\ 0)$ を通るとき $0=e^ta-te^t+e^t+1$

よって $a=t-1-e^{-t}$ ……②

① において, 接線の傾き e^t は t に関して単調に増加するから, 接点が異なれば対応する接線は異なる。ゆえに, 点 $(a,\ 0)$ を通り, $y=e^x+1$ に接する直線がただ1つ存在するための条件は, ② を満たす実数 t がただ1つ存在することである。

$f(t)=t-1-e^{-t}$ とおくと, $f'(t)=1+e^{-t}>0$ から, $f(t)$ は単調に増加する連続関数である。

また $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$

したがって, すべての実数 a に対して, ② を満たす実数 t がただ1つ存在するから, 点 $(a,\ 0)$ を通り, $y=e^x+1$ に接する直線がただ1つ存在する。

(2) ② において, a, t をそれぞれ a_n, a_{n+1} に置き換えると $a_n=a_{n+1}-1-e^{-a_{n+1}}$

よって $a_{n+1}-a_n=1+e^{-a_{n+1}}$ ……③

$e^{-a_{n+1}}>0$ であるから $a_{n+1}-a_n>1$

これと $a_1=1$ から, $n\geqq 2$ のとき $a_n>n$

ゆえに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-a_{n+1}}=0$

したがって, ③ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=1$

$\boxed{10}$

解答 (1) $x=2$ で最大値 2, $x=0$ で最小値 1

(2) $x=2$ で最大値 $\log 2$, $x=0$ で最小値 $\frac{1}{2}\log 2$ (3) 略 (4) 略 (5) 2

解説

(1) 底 $\sqrt{2}$ は1より大きいから, 関数 $f(x)$ は単調に増加する。

よって, $0\leqq x\leqq 2$ のとき, $f(x)$ は $x=2$ で最大値 2, $x=0$ で最小値 1 をとる。

(2) $f'(x)=(\sqrt{2})^x\log\sqrt{2}$

よって, $f'(x)$ は単調に増加するから, $0\leqq x\leqq 2$ のとき, $f'(x)$ は $x=2$ で最大値 $\log 2$, $x=0$ で最小値 $\frac{1}{2}\log 2$ をとる。

(3) 「$0<a_n<2$」を ① とする。

[1] $n=1$ のとき

$a_1=\sqrt{2}$ であるから, $n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ, すなわち $0<a_k<2$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき $a_{k+1}=(\sqrt{2})^{a_k}$

(1) から, $0<a_k<2$ のとき $f(0)<f(a_k)<f(2)$

すなわち $(\sqrt{2})^0<(\sqrt{2})^{a_k}<(\sqrt{2})^2$ よって $1<a_{k+1}<2$

したがって, $n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から, ① はすべての自然数 n に対して成り立つ。

(4) (3) から $0<2-a_{n+1}$ は成り立つ。

区間 $[a_n,\ 2]$ において, $f(x)=(\sqrt{2})^x$ に平均値の定理を用いると

$$\frac{f(2)-f(a_n)}{2-a_n}=f'(c_n)\quad(a_n<c_n<2)$$

を満たす c_n が存在する。

(2) から, $a_n<c_n<2$ のとき $f'(c_n)<\log 2$

また, $f(2)=2$, $f(a_n)=a_{n+1}$ であるから $\frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}<\log 2$

$2-a_n>0$ から $2-a_{n+1}<(\log 2)(2-a_n)$

以上から $0<2-a_{n+1}<(\log 2)(2-a_n)$

(5) (4) から $0<2-a_n<(\log 2)(2-a_{n-1})<\cdots\cdots<(\log 2)^{n-1}(2-a_1)$

$0<\log 2<1$ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log 2)^{n-1}(2-a_1)=0$

はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2-a_n)=0$ よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

$\boxed{11}$

解答 (1) 略 (2) 330個

解説

(1) $f(x)=\log x^{100}=100\log x$ は $x>0$ で微分可能で $f'(x)=\frac{100}{x}$

よって, 区間 $[x,\ x+1]$ において, 平均値の定理を用いると

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(c)\quad(x<c<x+1)$$

すなわち $f(x+1)-f(x)=\frac{100}{c}$ $(x<c<x+1)$

を満たす c が存在する。

$0<x<c<x+1$ から $\frac{100}{x+1}<\frac{100}{c}<\frac{100}{x}$

ゆえに $\frac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\frac{100}{x}$ ……①

(2) $a_n=[f(n)]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおく。

[1] $1\leqq n\leqq 99$ のとき

① から $f(n+1)-f(n)>\frac{100}{n+1}\geqq\frac{100}{99+1}=1$

すなわち $f(n+1)$ と $f(n)$ の差は1より大きいから $a_n<a_{n+1}$

よって, $a_1<a_2<\cdots\cdots<a_{100}$ であり, a_1, a_2, ……, a_{100} はすべて異なる整数である。

[2] $100\leqq n\leqq 1000$ のとき

① から $f(n+1)-f(n)<\frac{100}{n}\leqq\frac{100}{100}=1$

すなわち $f(n+1)$ と $f(n)$ の差は1より小さいから

$a_{n+1}=a_n$ または $a_{n+1}=a_n+1$

よって, $100\leqq n\leqq 1000$ のとき, a_n は a_{100} 以上 a_{1000} 以下のすべての整数をとり得る。

ここで $a_{100}=[f(100)]=[100\log 100]=[200\log 10]$

$=[200\times 2.3026]=[460.52]=460$

$a_{1000}=[f(1000)]=[100\log 1000]=[300\log 10]$

$=[300\times 2.3026]=[690.78]=690$

ゆえに, a_n は 460 以上 690 以下のすべての整数をとり得る。

[1], [2] から, a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 1000)$ のうち異なるものは

a_1, a_2, ……, a_{100} $(=460)$, 461, 462, ……, 690

したがって, 求める個数は $100+(690-461+1)=330$ (個)

$\boxed{12}$

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略

解説

(1) $q>0$, $x>0$ より, $-qx<0$ であるから $e^{-qx}<e^0=1$

これと $e^{-qx}>0$ から $0<e^{-qx}<1$ よって $0<1-e^{-qx}<1$ ……①

また，$0<p<1$ から　$0<1-p<1$ ……②

$0<x<1$ のとき，$0<1-x<1$ であるから，①，②より

$$(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})>0\cdot x+(1-x)\cdot 0=0,$$
$$(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})<1\cdot x+(1-x)\cdot 1=1$$

したがって　$0<f(x)<1$

(2) 与えられた数列 $\{x_n\}$ について，$0<x_0<1$ であり，(1)より，自然数 n に対して

$0<x_{n-1}<1$ ならば

$0<f(x_{n-1})<1$　すなわち　$0<x_n<1$

が成り立つ。

したがって，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して，$0<x_{n-1}<1$ が成り立つ。

ここで，$1+x\leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つから　$1+(-qx)\leqq e^{-qx}$

すなわち　$1-e^{-qx}\leqq qx$

これと，$0<x_{n-1}<1$ であることから

$$\begin{aligned}f(x_{n-1})&=(1-p)x_{n-1}+(1-x_{n-1})(1-e^{-qx_{n-1}})\\&\leqq(1-p)x_{n-1}+(1-x_{n-1})\cdot qx_{n-1}\\&<(1-p)x_{n-1}+1\cdot qx_{n-1}\\&=(1-p+q)x_{n-1}\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$

が成り立つ。

すなわち，すべての自然数 n に対して $0<x_n<(1-p+q)x_{n-1}$ が成り立つ。

これを繰り返し用いると，すべての自然数 n に対して

$0<x_n<(1-p+q)^n x_0$ ……④

さらに　$1-p+q=(1-p)+q>0$

また，$p>q$ より　$1-p+q=1-(p-q)<1$

よって　$0<1-p+q<1$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}(1-p+q)^n x_0=0$　これと④から　$\lim_{n\to\infty}x_n=0$

(3) $g(x)=f(x)-x$ とおくと

$$\begin{aligned}g(x)&=-px+(1-x)(1-e^{-qx}),\\g'(x)&=-p+(-1)\cdot(1-e^{-qx})+(1-x)\cdot qe^{-qx}\\&=(1+q)e^{-qx}-qxe^{-qx}-p-1,\\g''(x)&=-(1+q)qe^{-qx}-qe^{-qx}-qx\cdot(-qe^{-qx})\\&=-q\{q(1-x)+2\}e^{-qx}\end{aligned}$$

$q>0$ より，$0<x<1$ において常に $g''(x)<0$ であるから，$g'(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調に減少する。

さらに　$g'(0)=q-p>0$,

$g'(1)=e^{-q}-p-1=-(1-e^{-q})-p<0$

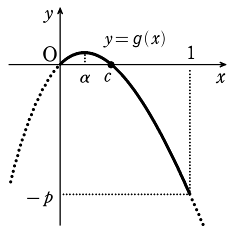
よって，$g'(\alpha)=0$，$0<\alpha<1$ を満たす実数 α がただ1つ存在し，$0\leqq x\leqq 1$ における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	極大	↘	$-p$

これと，$g(0)=0$，$g(1)=-p<0$ から，$y=g(x)$ のグラフは右の図のようになる。

ゆえに，$g(c)=0$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在する。

このとき，$f(c)-c=0$ であるから　$c=f(c)$



別解　$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x>0)$ とおくと

$$g(x)=1-p+(1-x)\cdot\frac{1-e^{-qx}}{x}$$

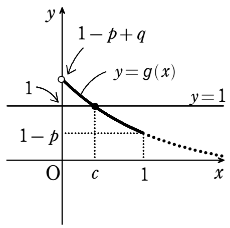
よって　$g(1)=1-p<1$

また，$\lim_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$，$p<q$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}g(x)&=\lim_{x\to+0}\left\{1-p+(1-x)\cdot\frac{e^{-qx}-1}{-qx}\cdot q\right\}\\&=1-p+q=1+(q-p)>1\end{aligned}$$

$g(x)$ は $x>0$ において連続な関数であるから，$y=g(x)$ のグラフは右の図のようになり，$g(c)=1$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在する。

このとき，$\dfrac{f(c)}{c}=1$ であるから　$c=f(c)$



13

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

(1) $f(x)=\sin x-(1-x)=\sin x+x-1$ とおくと，方程式 $f(x)=0$ が $\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{\pi}{4}$ でただ1つの解をもつことを示せばよい。

$f'(x)=\cos x+1\geqq 0$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。……①

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\pi}{4}-1=\frac{2\sqrt2+\pi-4}{4}>\frac{2\sqrt2+3-4}{4}=\frac{2\sqrt2-1}{4}>0\quad\cdots\cdots②$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}-1$$

ここで　$\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\frac12\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$$

よって　$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}+\dfrac{\pi}{12}-1$

$$=\frac{3(\sqrt6-\sqrt2)+\pi}{12}-1<\frac{3(3-1.4)+3.2}{12}-1=-\frac13<0\quad\cdots\cdots③$$

①，②，③から，方程式 $f(x)=0$ は $\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{\pi}{4}$ でただ1つの解をもつ。

よって，直線 $y=1-x$ と曲線 $y=\sin x$ は $\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{\pi}{4}$ でただ1つの交点をもつ。

(2) 「$\dfrac{\pi}{12}<a_n<\dfrac{\pi}{4}$」を④とする。

[1] $n=1$ のとき

$\dfrac{\pi}{12}<a_1<\dfrac{\pi}{4}$ であるから，$n=1$ のとき④は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき④が成り立つ，すなわち $\dfrac{\pi}{12}<a_k<\dfrac{\pi}{4}$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき　$a_{k+1}=1-\sin a_k$

$\dfrac{\pi}{12}<a_k<\dfrac{\pi}{4}$ から　$\sin\dfrac{\pi}{12}<\sin a_k<\sin\dfrac{\pi}{4}$

よって　$1-\sin\dfrac{\pi}{4}<1-\sin a_k<1-\sin\dfrac{\pi}{12}$

すなわち　$1-\sin\dfrac{\pi}{4}<a_{k+1}<1-\sin\dfrac{\pi}{12}$ ……⑤

ここで　$1-\sin\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}=1-\left(\dfrac{\sqrt2}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$

$$>1-\left(\frac{1.42}{2}+\frac{3.15}{12}\right)=1-\frac{11.67}{12}>0$$

よって　$\dfrac{\pi}{12}<1-\sin\dfrac{\pi}{4}$ ……⑥

また

$$\frac{\pi}{4}-\left(1-\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi+\sqrt6-\sqrt2}{4}-1>\frac{3.14+2.4-1.42}{4}-1=\frac{4.12}{4}-1>0$$

よって　$1-\sin\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{\pi}{4}$ ……⑦

⑤，⑥，⑦から　$\dfrac{\pi}{12}<a_{k+1}<\dfrac{\pi}{4}$

したがって，$n=k+1$ のときにも④は成り立つ。

[1]，[2]から，④はすべての自然数 n に対して成り立つ。

(3) (1)から　$1-\alpha=\sin\alpha$，$\dfrac{\pi}{12}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

[1] $a_1=\alpha$ のとき　$a_2=1-\sin a_1=1-\sin\alpha=\alpha$

同様に　$a_3=a_4=\cdots\cdots=a_n=\alpha$　よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\alpha=\alpha$

[2] $a_1\neq\alpha$ のとき

$a_{n+1}=\alpha$ とすると　$\alpha=1-\sin a_n$　よって　$\sin a_n=1-\alpha$

$1-\alpha=\sin\alpha$ から　$\sin a_n=\sin\alpha$

$\dfrac{\pi}{12}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{12}<a_n<\dfrac{\pi}{4}$ から　$a_n=\alpha$

よって，$a_n=\alpha$ となる n があると仮定すると　$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=\alpha$

これは $a_1\neq\alpha$ に矛盾する。

よって，すべての自然数 n について $a_n\neq\alpha$ である。

このとき　$|a_{n+1}-\alpha|=|1-\sin a_n-\alpha|=|\sin a_n-\sin\alpha|$

$f(x)=\sin x$ とおき，平均値の定理を用いると

$$\left|\frac{\sin a_n-\sin\alpha}{a_n-\alpha}\right|=|\cos\theta_n|\quad\cdots\cdots⑤$$

を満たす θ_n が，a_n と α の間に少なくとも1つ存在する。

$\dfrac{\pi}{12}<a_n<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{12}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ であるから　　$\dfrac{\pi}{12}<\theta_n<\dfrac{\pi}{4}$

よって　　$\cos\theta_n<\cos\dfrac{\pi}{12}$　……⑥

また，$|\sin a_n-\sin\alpha|=|a_{n+1}-\alpha|$ であるから，⑤，⑥ より

$$\left|\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_n-\alpha}\right|<\cos\frac{\pi}{12}$$

したがって　　$0<|a_n-\alpha|<|a_{n-1}-\alpha|\cos\dfrac{\pi}{12}<\cdots\cdots<|a_1-\alpha|\cos^{n-1}\dfrac{\pi}{12}$

$0<\cos\dfrac{\pi}{12}<1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_1-\alpha|\cos^{n-1}\frac{\pi}{12}=0$

はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$　　よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

[1]，[2] から　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

14

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$f(x)-2=(e^{px}+e^{-px})-2=e^{-px}(e^{2px}+1-2e^{px})=e^{-px}(e^{px}-1)^2$

$p>0$，$x>0$ より，$px>0$ であるから　　$e^{px}>1$　　　よって　　$e^{-px}(e^{px}-1)^2>0$

すなわち　　$f(x)-2>0$　　　したがって　　$f(x)>2$

別解　$e^{px}>0$，$e^{-px}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$f(x)=e^{px}+e^{-px}\geqq 2\sqrt{e^{px}\cdot e^{-px}}=2$$

等号は，$e^{px}=e^{-px}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

よって，$x>0$ のとき　　$f(x)>2$

(2)　$f(x)-g(x)=(e^{px}+e^{-px})-(e^{qx}+e^{-qx})=e^{px}-e^{qx}-(e^{-qx}-e^{-px})$

$$=e^{px}-e^{qx}-e^{-(p+q)x}(e^{px}-e^{qx})=(e^{px}-e^{qx})\{1-e^{-(p+q)x}\}$$

$$=(e^{px}-e^{qx})\{e^{(p+q)x}-1\}e^{-(p+q)x}$$

$p>q>0$，$x>0$ より，$(p+q)x>px>qx>0$ であるから　　$e^{(p+q)x}>1$，$e^{px}>e^{qx}$

よって　　$(e^{px}-e^{qx})\{e^{(p+q)x}-1\}e^{-(p+q)x}>0$　　　すなわち　　$f(x)-g(x)>0$

したがって　　$f(x)>g(x)$

別解　x (>0) を固定して，t の関数 $F(t)=e^{xt}+e^{-xt}$ $(t>0)$ を考えると

$$F'(t)=xe^{xt}-xe^{-xt}=xe^{-xt}(e^{2xt}-1)$$

$x>0$，$t>0$ より，$2xt>0$ であるから　　$e^{2xt}>1$

よって　　$F'(t)=xe^{-xt}(e^{2xt}-1)>0$

ゆえに，$F(t)$ は $t>0$ において単調増加である。

これと，$p>q>0$ より　　$F(p)>F(q)$　　　すなわち　　$e^{px}+e^{-px}>e^{qx}+e^{-qx}$

したがって　　$f(x)>g(x)$

(3)　$h(x)=\dfrac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}$　から

$$h'(x)=\frac{\{f''(x)-g''(x)\}\{f(x)-g(x)\}-\{f'(x)-g'(x)\}^2}{\{f(x)-g(x)\}^2}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$f(x)=e^{px}+e^{-px}$，$g(x)=e^{qx}+e^{-qx}$　から

$$f'(x)=pe^{px}-pe^{-px}=p(e^{px}-e^{-px}),\quad g'(x)=qe^{qx}-qe^{-qx}=q(e^{qx}-e^{-qx}),$$

$$f''(x)=p^2(e^{px}+e^{-px})=p^2f(x),\quad g''(x)=q^2(e^{qx}+e^{-qx})=q^2g(x)$$

① の分子の式を $G(x)$ とおくと

$$G(x)=\{p^2f(x)-q^2g(x)\}\{f(x)-g(x)\}-\{f'(x)-g'(x)\}^2$$

$$=p^2\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+q^2\{g(x)\}^2-\{g'(x)\}^2-(p^2+q^2)f(x)g(x)+2f'(x)g'(x)$$

$$=p^2(e^{px}+e^{-px})^2-p^2(e^{px}-e^{-px})^2+q^2(e^{qx}+e^{-qx})^2-q^2(e^{qx}-e^{-qx})^2$$

$$-(p^2+q^2)(e^{px}+e^{-px})(e^{qx}+e^{-qx})+2pq(e^{px}-e^{-px})(e^{qx}-e^{-qx})$$

$$=p^2\{(e^{2px}+e^{-2px}+2)-(e^{2px}+e^{-2px}-2)\}$$

$$+q^2\{(e^{2qx}+e^{-2qx}+2)-(e^{2qx}+e^{-2qx}-2)\}$$

$$-(p^2+q^2)\{e^{(p+q)x}+e^{(p-q)x}+e^{-(p-q)x}+e^{-(p+q)x}\}$$

$$+2pq\{e^{(p+q)x}-e^{(p-q)x}-e^{-(p-q)x}+e^{-(p+q)x}\}$$

$$=4p^2+4q^2-(p^2-2pq+q^2)\{e^{(p+q)x}+e^{-(p+q)x}\}$$

$$-(p^2+2pq+q^2)\{e^{(p-q)x}+e^{-(p-q)x}\}$$

$$=2(p+q)^2+2(p-q)^2-(p-q)^2\{e^{(p+q)x}+e^{-(p+q)x}\}-(p+q)^2\{e^{(p-q)x}+e^{-(p-q)x}\}$$

$$=-(p-q)^2\{e^{(p+q)x}+e^{-(p+q)x}-2\}-(p+q)^2\{e^{(p-q)x}+e^{-(p-q)x}-2\}$$

$$=-\left\{(p-q)^2\left(e^{\frac{p+q}{2}x}-e^{-\frac{p+q}{2}x}\right)^2+(p+q)^2\left(e^{\frac{p-q}{2}x}-e^{-\frac{p-q}{2}x}\right)^2\right\}$$

$$<0$$

ゆえに　　$h'(x)=\dfrac{G(x)}{\{f(x)-g(x)\}^2}<0$

したがって，$h(x)$ は $x>0$ において単調減少である。

15

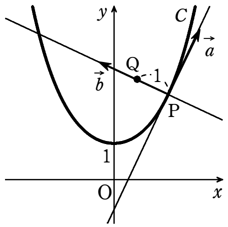
解答　(1)　$\left(u-\dfrac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}},\ \dfrac{e^u+e^{-u}}{2}+\dfrac{2}{e^u+e^{-u}}\right)$　　(2)　$0\leqq|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}|<1$

解説

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ とすると　　$f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$f''(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

よって，$1+\{f'(x)\}^2=\{f(x)\}^2$，$f''(x)=f(x)$　……①　が成り立つ。

(1)　点 $\mathrm{P}(u,\ f(u))$ における C の接線，法線の方向ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とすると



$$\vec{a}=(1,\ f'(u))$$

$\vec{b}$ は $\vec{a}$ を点 P を中心とし，正の向きに 90° だけ回転したものであるから　　$\vec{b}=(-f'(u),\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $\vec{b}$ と平行な単位ベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

ここで　　$|\vec{b}|=\sqrt{\{-f'(u)\}^2+1^2}=\sqrt{\{f(u)\}^2}=f(u)$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(u,\ f(u))+\dfrac{1}{f(u)}(-f'(u),\ 1)$

$$=\left(u-\frac{f'(u)}{f(u)},\ f(u)+\frac{1}{f(u)}\right)$$

ゆえに，点 Q の座標は　　$\left(u-\dfrac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}},\ \dfrac{e^u+e^{-u}}{2}+\dfrac{2}{e^u+e^{-u}}\right)$

(2)　$\mathrm{P}(u,\ f(u))$ の速度を $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ の速度を $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ とする。

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\frac{du}{dt},\ \frac{d}{dt}f(u)\right)=\left(\frac{du}{dt},\ f'(u)\frac{du}{dt}\right)=\frac{du}{dt}(1,\ f'(u))$$

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dt},\ \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\right)$$

$(x,\ y)=\left(u-\dfrac{f'(u)}{f(u)},\ f(u)+\dfrac{1}{f(u)}\right)$ であるから

$$\frac{dx}{du}=1-\frac{f''(u)f(u)-f'(u)f'(u)}{\{f(u)\}^2}$$

① により　　$\dfrac{dx}{du}=1-\dfrac{\{f(u)\}^2-\{f'(u)\}^2}{\{f(u)\}^2}=1-\dfrac{1}{\{f(u)\}^2}$

また　　$\dfrac{dy}{du}=f'(u)-\dfrac{f'(u)}{\{f(u)\}^2}=\left(1-\dfrac{1}{\{f(u)\}^2}\right)f'(u)$

よって　　$\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}=\left(1-\dfrac{1}{\{f(u)\}^2}\right)\dfrac{du}{dt}(1,\ f'(u))=\left(1-\dfrac{1}{\{f(u)\}^2}\right)\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}$

ゆえに　　$|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}|=\left|1-\dfrac{1}{\{f(u)\}^2}\right||\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|$

$f(u)\geqq 1$，$|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|=1$ であるから　　$|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}|=1-\dfrac{1}{\{f(u)\}^2}$

したがって　　$0\leqq|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}|<1$