$\boxed{1}$

解答　(1)　∞　(2)　$-\infty$　(3)　∞　(4)　0　(5)　極限なし（振動）
　(6)　極限なし（振動　(7)　極限なし（振動）

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty} 3^n=\infty$　　(2)　$\lim_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n}{3}\right)=-\infty$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{2}-1\right)=\infty$　　(4)　$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{n^2}\right)=0$

(5)　-1，1，-1，1，……　となるから，振動し，極限はない。
(6)　-1，1，-1，1，……　となるから，振動し，極限はない。
(7)　-2，4，-8，16，……　となるから，振動し，極限はない。

$\boxed{2}$

解答　(1)　∞　(2)　0　(3)　$-\dfrac{5}{2}$　(4)　$\sqrt{3}$

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{2}{n^2}}=0$

別解　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(3-\dfrac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{3-\dfrac{2}{n^2}}=0$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+7n-6}{-2n^2-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{7}{n}-\dfrac{6}{n^2}}{-2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=-\dfrac{5}{2}$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}=\sqrt{3}$

$\boxed{3}$

解答　1

解説

$$(分母)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$(分子)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

よって　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}=1$

$\boxed{4}$

解答　(1)　-2　(2)　0

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n^2+n}}{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{n^2-(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{-1}=-2$$

(2)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)-n}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=0$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　0　(2)　0

解説

(1)　$-1\leqq\cos\dfrac{n\pi}{4}\leqq 1$ であるから　$-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{4}\leqq\dfrac{1}{n}$

　ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{4}=0$

(2)　$-1\leqq(-1)^n\leqq 1$ であるから　$-\dfrac{1}{n+1}\leqq\dfrac{(-1)^n}{n+1}\leqq\dfrac{1}{n+1}$

　ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}=0$

$\boxed{6}$

解答　(1)　略　(2)　0

解説

(1)　$n\geqq 3$ のとき
$$2^n=(1+1)^n=1+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}+1$$
$$\geqq 1+n+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$
$$=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1>\frac{1}{6}n^3$$

　よって　$2^n>\dfrac{1}{6}n^3$

(2)　(1)の結果から　$0<\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{6}{n^3}$　　よって　$0<\dfrac{n^2}{2^n}<\dfrac{6}{n}$

　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{6}{n}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$

$\boxed{1}$

解答　(1)　∞　(2)　0　(3)　0　(4)　極限なし（振動）　(5)　$-\infty$　(6)　0
　(7)　$-\infty$　(8)　0　(9)　極限なし（振動）　(10)　極限なし
　(11)　極限なし（振動）

解説

(1)　$|2|>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$　　(2)　$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$

(3)　$\left|-\dfrac{1}{4}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n=0$

(4)　$-3<-1$ であるから，数列 $\{(-3)^n\}$ は振動し，極限はない。

(5)　$\lim_{n\to\infty}(4-n^2)=-\infty$　　(6)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{2^n}=0$

(7)　$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{n})=-\infty$　　(8)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^3}=0$

(9)　2，4，2，4，……　となるから，振動し，極限はない。
(10)　-1，2，-3，4，……　となるから，極限はない。
(11)　-1，1，-1，1，……　となるから，振動し，極限はない。

$\boxed{2}$

解答　(1)　$-\infty$　(2)　$-\dfrac{1}{2}$　(3)　∞　(4)　0　(5)　2

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}(n^2-3n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\dfrac{1}{n}-3\right)=-\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2n+3}{4n-1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2+\dfrac{3}{n}}{4-\dfrac{1}{n}}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n-1)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}(n-1)=\infty$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n+1}{3+2n-n^2-4n^3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{n}-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n}-4}=0$

(5)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=\dfrac{4}{2}=2$

$\boxed{3}$

解答　(1)　3　(2)　2

解説

(1)　$(分母)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$(分子)=\sum_{k=1}^{n}k(3k+2)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+2\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)$$

　よって　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+3)}{\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3(2n+3)}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{2+\dfrac{1}{n}}=3$

(2)　(分母) $=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n(n+2)$

(分子) $=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n(2n+1)$

よって　(与式) $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=2$

$\boxed{4}$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $-\dfrac{3}{2}$　(3) 2　(4) $\dfrac{3}{2}$　(5) $\dfrac{1}{4}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{(n^2+2n)-(n^2-2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\{(n-3)-n\}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3\sqrt{n}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+1}=-\frac{3}{2}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(n+2)-(n-2)\}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\{(n+1)-(n-1)\}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=2$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+2)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{2}$$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left\{\left(4+\frac{1}{n}\right)-4\right\}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{5}$

解答　(1) 0　(2) 0　(3) 0

解説

(1) $-1\leqq(-1)^n\leqq1$ であるから　$\displaystyle-\frac{1}{2n+1}\leqq\frac{(-1)^n}{2n+1}\leqq\frac{1}{2n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n+1}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=0$

(2) $-1\leqq\sin\dfrac{n\pi}{2}\leqq1$ であるから　$\displaystyle-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\leqq\frac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0$

(3) $0\leqq\cos^2 n\theta\leqq1$ であるから　$\displaystyle0\leqq\frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}\leqq\frac{1}{n^2+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}0=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}=0$

$\boxed{6}$

解答　(1) 略　(2) 0

解説

(1) $(1+h)^n\geqq1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$　…… ①　とする。

[1]　$n=1$ のとき

(左辺) $=1+h$

(右辺) $=1+h+\dfrac{1(1-1)}{2}h^2=1+h$

$n=2$ のとき

(左辺) $=(1+h)^2=1+2h+h^2$

(右辺) $=1+2h+\dfrac{2(2-1)}{2}h^2=1+2h+h^2$

よって，$n=1$，2 のとき (左辺)=(右辺) となり，① は成り立つ。

[2]　$n\geqq3$ のとき

二項定理により

$(1+h)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+{}_n\mathrm{C}_3h^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$　…… ②

${}_n\mathrm{C}_r>0$，$h>0$ であるから　${}_n\mathrm{C}_3h^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n>0$

よって，② から　$(1+h)^n>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2$

したがって　$(1+h)^n>1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$

[1]，[2] から，$h>0$ のとき，すべての自然数 n について，① は成り立つ。

(2) ① に $h=2$ を代入すると　$(1+2)^n\geqq1+n\cdot2+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot2^2$

よって　$3^n\geqq2n^2+1$　ゆえに　$0<\dfrac{n}{3^n}\leqq\dfrac{n}{2n^2+1}$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

$\boxed{1}$

解答 (1)　1　　(2)　2

解説

(1)　分母は　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって　　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=1$

(2)　$\displaystyle\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})}$

$\displaystyle=\frac{\{(n+4)-(n+2)\}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\{(n+1)-n\}(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})}=\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=2$$

$\boxed{2}$

解答 (1)　$\dfrac{b}{2}-\dfrac{a^2}{8}$　　(2)　$\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left\{n^2+an+b-\left(n+\frac{a}{2}\right)^2\right\}}{\sqrt{n^2+an+b}+n+\frac{a}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{a^2}{4}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1+\frac{a}{2n}}$

$\displaystyle=\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8}$

(2)　$\displaystyle1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$\displaystyle=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって　　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{3}$

$\boxed{3}$

解答 (1)　順に　(ア)　0，$\dfrac{1}{2}$　　(イ)　$-\dfrac{5}{3}$，$-\infty$　　(2)　$a=8$　(3)　1

解説

(1)　(ア)　$a_n=(2n-1)a_n\times\dfrac{1}{2n-1}$ であり

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=1\times0=0$

$\displaystyle na_n=(2n-1)a_n\times\frac{n}{2n-1},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(イ)　$\dfrac{a_n-3}{2a_n+1}=b_n$ とおき，両辺に $2a_n+1$ を掛けると

$a_n-3=(2a_n+1)b_n$

ゆえに　　$(2b_n-1)a_n=-(b_n+3)$

$b_n=\dfrac{1}{2}$ とすると $0\cdot a_n=-\dfrac{7}{2}$ となり，これは不合理である。

よって，$b_n\neq\dfrac{1}{2}$ であるから　　$a_n=-\dfrac{b_n+3}{2b_n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=2$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{b_n+3}{2b_n-1}\right)=-\frac{2+3}{2\cdot2-1}=-\frac{5}{3}$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=-\infty$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+an+2)-(n^2+2n+3)}{\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{n^2+2n+3}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$

$$=\frac{a-2}{2}$$

よって，条件から　　$\dfrac{a-2}{2}=3$　　ゆえに　　$a=8$

(3)　$n\longrightarrow\infty$ のとき $a_n\longrightarrow\infty$ であるから，$a_n>0$ としてよい。

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n{}^2+a_n+1}-\sqrt{a_n{}^2-a_n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n{}^2+a_n+1)-(a_n{}^2-a_n+1)}{\sqrt{a_n{}^2+a_n+1}+\sqrt{a_n{}^2-a_n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{\sqrt{a_n{}^2+a_n+1}+\sqrt{a_n{}^2-a_n+1}}$$

分母，分子を $a_n\,(>0)$ で割って

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n{}^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n{}^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

$\boxed{4}$

解答　0

解説

$-1\leqq\sin\dfrac{n\pi}{2}\leqq1$ であるから　　$-\dfrac{n}{n^2+1}\leqq\dfrac{n}{n^2+1}\sin\dfrac{n\pi}{2}\leqq\dfrac{n}{n^2+1}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)=0$ である

から，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin\frac{n\pi}{2}=0$

$\boxed{5}$

解答　π

解説

$[10^{2n}\pi]\leqq10^{2n}\pi<[10^{2n}\pi]+1$ が成り立つから，各辺を 10^{2n} で割ると

$$\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}\leqq\pi<\frac{[10^{2n}\pi]+1}{10^{2n}}\quad\text{すなわち}\quad\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}\leqq\pi<\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}$$

よって　　$\pi-\dfrac{1}{10^{2n}}<\dfrac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}\leqq\pi$

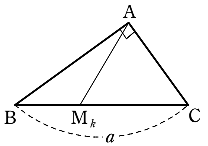
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\pi-\frac{1}{10^{2n}}\right)=\pi$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}=\pi$

1

解答　$\frac{a^2}{3}$

解説

$\triangle \mathrm{ABM}_k$ において余弦定理を用いると



$$\mathrm{AM}_k{}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}_k{}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}_k\cos B$$

一方，△ABC において　$\mathrm{AB}=a\cos B$

また　$\mathrm{BM}_k=\frac{ka}{n}$　（B に近い方から M_1，M_2，……）

よって　$\mathrm{AM}_k{}^2=a^2\cos^2B+\frac{k^2a^2}{n^2}-\frac{2k}{n}a^2\cos^2B$

したがって　$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{AM}_k{}^2=a^2\cos^2B\sum_{k=1}^{n-1}1+\frac{a^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\frac{2}{n}a^2\cos^2B\sum_{k=1}^{n-1}k$

$$=a^2\cos^2B\cdot(n-1)+\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-\frac{2}{n}a^2\cos^2B\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$=\frac{a^2}{6n}(n-1)(2n-1)$$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2(2n-1)}{6n}=\frac{a^2}{3}$

2

解答　(1)　$S(n)=\frac{mn(mn+1)}{2}$　(2)　$T(n)=\frac{mn^2(m-1)}{2}$　(3)　$\frac{m-1}{m}$

解説

(1)　$S(n)=1+2+\cdots\cdots+mn=\frac{mn(mn+1)}{2}$

(2)　1，2，……，mn の中で m の倍数の総和を $U(n)$ とすると

$$U(n)=\sum_{k=1}^{n}mk=m\sum_{k=1}^{n}k=m\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{mn(n+1)}{2}$$

よって　$T(n)=S(n)-U(n)=\frac{mn(mn+1)}{2}-\frac{mn(n+1)}{2}=\frac{mn^2(m-1)}{2}$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{mn^2(m-1)}{2}}{\frac{mn(mn+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{m-1}{m+\frac{1}{n}}=\frac{m-1}{m}$

3

解答　(1)　略　(2)　e

解説

(1)　$a_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}$

$$\leqq 1\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdots\cdot1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

これと $a_n>0$ から　$0<a_n\leqq\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(2)　$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{\cancel{n!}}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^n\cancel{(n+1)}}{\cancel{n!(n+1)}}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

4

解答　(1)　略　(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$，$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$

(3)　$\frac{1+(-1)^{n+1}(n+1)x^n+(-1)^{n+1}nx^{n+1}}{(1+x)^2}$　(4)　$\frac{1}{(1+x)^2}$

解説

(1)　$(1+t)^n\geqq1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2$　……①

[1]　$n=1$ のとき

(① の左辺)$=1+t$

(① の右辺)$=1+1\cdot t+0=1+t$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=2$ のとき

(① の左辺)$=(1+t)^2=1+2t+t^2$

(① の右辺)$=1+2\cdot t+\frac{2\cdot1}{2}t^2=1+2t+t^2$

よって，① は成り立つ。

[3]　$n\geqq3$ のとき　二項定理により

$$(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,t^k={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1t+{}_n\mathrm{C}_2t^2+\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,t^k$$

$$=1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,t^k$$

$t>0$ であるから　$\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,t^k>0$

よって　$(1+t)^n>1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2$

[1]，[2]，[3] から，すべての自然数 n に対して，① が成り立つ。

(2)　（前半）　(1) から　$0<\frac{n}{(1+t)^n}\leqq\frac{n}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2}$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+t+\frac{n-1}{2}t^2}=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$

（後半）　$0<r<1$ であるから，実数 $t>0$ を用いて $r=\frac{1}{1+t}$ と表すことができる。

よって　$\lim_{n\to\infty}nr^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$

(3)　$S_n=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}$

$-xS_n=\quad -x+2x^2-3x^3+4x^4-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-1}+(-1)^nnx^n$

辺々を引いて

$$(1+x)S_n=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}-(-1)^nnx^n$$

$x\neq-1$ であるから

$$(1+x)S_n=\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}+(-1)^{n+1}nx^n=\frac{1+(-1)^{n+1}x^n+(-1)^{n+1}nx^n(1+x)}{1+x}$$

$$=\frac{1+(-1)^{n+1}(n+1)x^n+(-1)^{n+1}nx^{n+1}}{1+x}$$

よって　$S_n=\frac{1+(-1)^{n+1}(n+1)x^n+(-1)^{n+1}nx^{n+1}}{(1+x)^2}$

(4)　$-(n+1)x^n\leqq(-1)^{n+1}(n+1)x^n\leqq(n+1)x^n$ が成り立つ。

$0<x<1$ のとき，(2) から　$\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n=\lim_{n\to\infty}(nx^n+x^n)=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}\{-(n+1)x^n\}=-\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n=0$

また　$-nx^{n+1}\leqq(-1)^{n+1}nx^{n+1}\leqq nx^{n+1}$

$0<x<1$ のとき，(2) から　$\lim_{n\to\infty}nx^{n+1}=\lim_{n\to\infty}nx^n\cdot x=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}(-nx^{n+1})=-\lim_{n\to\infty}nx^{n+1}=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}nx^{n+1}=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1+0+0}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}$

1

解答　(1)　3　　(2)　∞　　(3)　$-\infty$

解説

(1)　$\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ここで，$\lim\limits_{n\to\infty}3=3$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\cdot0=3$$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+2^{2n}}{3^n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1-2\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\infty$

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-3^n)=\lim\limits_{n\to\infty}3^n\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1\right\}=-\infty$

2

解答　$1-\sqrt{2}\leqq x<1$，$1<x\leqq1+\sqrt{2}$

極限値は $x=1\pm\sqrt{2}$ のとき 1；$1-\sqrt{2}<x<1$，$1<x<1+\sqrt{2}$ のとき 0

解説

与えられた数列が収束するための必要十分条件は

$-1<x^2-2x\leqq1$　……[A]

$-1<x^2-2x$ から　　$x^2-2x+1>0$

ゆえに　　$(x-1)^2>0$　　　　よって　　$x\fallingdotseq1$　……①

$x^2-2x\leqq1$ から　　$x^2-2x-1\leqq0$

$x^2-2x-1=0$ の解は　　$x=1\pm\sqrt{2}$

ゆえに，不等式の解は　　$1-\sqrt{2}\leqq x\leqq1+\sqrt{2}$　……②

よって，求める x の値の範囲は，① と ② の共通範囲をとって

$1-\sqrt{2}\leqq x<1$，$1<x\leqq1+\sqrt{2}$

また，[A] で $x^2-2x=1$ となるのは $x=1\pm\sqrt{2}$ のとき。

したがって，数列の極限値は

$x^2-2x=1$　すなわち　$x=1\pm\sqrt{2}$ のとき　1

$-1<x^2-2x<1$　すなわち　$1-\sqrt{2}<x<1$，$1<x<1+\sqrt{2}$ のとき　0

3

解答　$|r|<1$ のとき 0，　$r=1$ のとき $\dfrac{2}{3}$，　$r=-1$ のとき極限はない，

$|r|>1$ のとき 1

解説

[1]　$|r|<1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{0+0}{0+2}=0$$

[2]　$r=1$ のとき　$r^n=1$，$r^{2n}=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

[3]　$r=-1$ のとき　　$\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\dfrac{1+(-1)^n}{1+2}=\dfrac{1+(-1)^n}{3}$

よって，極限はない。(振動する)

[4]　$|r|>1$ のとき　$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{r^2}\right|<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{r^2}\right)^n}=\frac{1+0}{1+2\cdot0}=1$$

4

解答　(1)　$a_n=3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，極限は 3　(2)　$a_n=\dfrac{1}{3\cdot2^{n-1}-1}$，極限は 0

(3)　$a_n=\dfrac{11}{3}-\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，極限は $\dfrac{11}{3}$

解説

(1)　与えられた漸化式を変形して　　$a_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(a_n-3)$

また　　$a_1-3=1-3=-2$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は，初項 -2，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列である。

ゆえに　　$a_n-3=-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　すなわち　$a_n=3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

よって　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3$

(2)　$a_1>0$ であるから　　$a_2=\dfrac{a_1}{2+a_1}>0$

同様にして　　$a_3>0$，$a_4>0$，……，$a_n>0$

したがって　　$a_n\fallingdotseq0$

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2+a_n}{a_n}$

すなわち　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{1}{a_n}+1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　　$b_{n+1}=2b_n+1$

よって　　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

また　　$b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=2+1=3$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列で　　$b_n+1=3\cdot2^{n-1}$

よって　　$b_n=3\cdot2^{n-1}-1$

ゆえに　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot2^{n-1}-1}$

したがって　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(3)　与えられた漸化式を変形して

$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_{n+1}-a_n)$，$a_{n+2}-\dfrac{1}{4}a_{n+1}=a_{n+1}-\dfrac{1}{4}a_n$

これと　$a_2-a_1=2$，$a_2-\dfrac{1}{4}a_1=\dfrac{11}{4}$ から

$a_{n+1}-a_n=2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，$a_{n+1}-\dfrac{1}{4}a_n=\dfrac{11}{4}$

辺々を引くと　　$-\dfrac{3}{4}a_n=2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}-\dfrac{11}{4}$

ゆえに　　$a_n=\dfrac{11}{3}-\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$　　　よって　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{11}{3}$

5

解答　(1)　$p_1=\dfrac{1}{6}$，$p_2=\dfrac{5}{18}$，$p_3=\dfrac{19}{54}$　　(2)　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{6}$

(3)　略

解説

(1)　p_1 は，さいころを 1 回投げるとき，1 の目が 1 回出る確率であるから　　$p_1=\dfrac{1}{6}$

p_2 は，さいころを 2 回投げるとき，1 の目がちょうど 1 回出る確率であるから

$$p_2={}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$$

p_3 は，さいころを 3 回投げるとき，1 の目がちょうど 1 回出るか，または 1 の目が 3 回出る確率であるから

$$p_3={}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{76}{6^3}=\frac{19}{54}$$

(2)　さいころを $n+1$ 回投げて 1 の目が奇数回出るのは，次の [1]，[2] の 2 つの場合があり，これらの事象は互いに排反である。

[1]　n 回目までに 1 の目が奇数回出て，$n+1$ 回目に 1 の目が出ない

[2]　n 回目までに 1 の目が偶数回出て，$n+1$ 回目に 1 の目が出る

n 回目までに 1 の目が奇数回出る確率は p_n，偶数回出る確率は $1-p_n$ であるから，

$n+1$ 回投げて 1 の目が奇数回出る確率 p_{n+1} は

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{5}{6}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}$$

(3)　(2) から　　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{6}$　　　変形すると　　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから　　$p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　　$p_n=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\dfrac{1}{2}$

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　4

解説

(1)　[1]　$n=2$ のとき　$a_2-4=\sqrt{a_1+12}-4>0$　($a_1>4$ から)

よって，$a_2>4$ となり　$n=2$ のとき $a_n>4$ は成り立つ。

[2]　$n=k$ ($\geqq2$) のとき　$a_k>4$ が成り立つと仮定すると

$a_{k+1}-4=\sqrt{a_k+12}-4>0$　(仮定から)

よって　$a_{k+1}>4$ となり　$n=k+1$ のときも $a_n>4$ は成り立つ。

したがって　[1]，[2] から　$n=2$，3，…… に対して，$a_n>4$ が成り立つ。

(2) $a_{n+1}-4=\sqrt{a_n+12}-4=\dfrac{1}{\sqrt{a_n+12}+4}\cdot(a_n-4)$

(1) から $a_n>4$ ($n=2,\ 3,\ \cdots\cdots$)，条件から $a_1>4$ であるから

$a_n>4$ ($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$)

よって　$\sqrt{a_n+12}+4>\sqrt{4+12}+4=8$ となり　$0<\dfrac{1}{\sqrt{a_n+12}+4}<\dfrac{1}{8}$，$a_n-4>0$

ゆえに　$a_{n+1}-4<\dfrac{1}{8}(a_n-4)$

(3) (2) の不等式をくり返し用いると，

$0<a_n-4<\dfrac{1}{8}(a_{n-1}-4)<\left(\dfrac{1}{8}\right)^2(a_{n-2}-4)<\cdots\cdots<\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}(a_1-4)$　となり

$0<a_n-4<\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}\cdot(a_1-4)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}(a_1-4)=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-4)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=4$

1

解答　(1)　$-\infty$　　(2)　-4　　(3)　7

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-10^n}{3^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-10^n}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{10}{9}\right)^n\right\}=-\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}+4^{n+1}}{3^n-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}=-4$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{3}{7}\right)^n+5\left(\frac{5}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=7$

2

解答　(1)　$0\leqq x<1$；極限値は $x=0$ のとき 1，$0<x<1$ のとき 0

(2)　$1-\sqrt{3}\leqq x<0$，$2<x\leqq 1+\sqrt{3}$；極限値は $x=1\pm\sqrt{3}$ のとき 1，
$1-\sqrt{3}<x<0$，$2<x<1+\sqrt{3}$ のとき 0

解説

(1) 数列 $\{(1-2x)^n\}$ が収束するための条件は　$-1<1-2x\leqq 1$

$-1<1-2x$ から　$x<1$，　$1-2x\leqq 1$ から　$x\geqq 0$

x の値の範囲は，共通範囲をとって　$0\leqq x<1$

また，極限値は　$1-2x=1$　すなわち　$x=0$　のとき　1

$-1<1-2x<1$　すなわち　$0<x<1$ のとき　0

(2) 数列 $\{(x^2-2x-1)^n\}$ が収束するための条件は

$-1<x^2-2x-1\leqq 1$　……[A]

$-1<x^2-2x-1$ から　$x(x-2)>0$

ゆえに　$x<0$，$2<x$　…… ①

$x^2-2x-1\leqq 1$ から　$x^2-2x-2\leqq 0$

この不等式の解は　$1-\sqrt{3}\leqq x\leqq 1+\sqrt{3}$　…… ②

求める x の値の範囲は，① と ② の共通範囲をとって

$1-\sqrt{3}\leqq x<0$，$2<x\leqq 1+\sqrt{3}$

また，[A] で $x^2-2x-1=1$ となるのは $x=1\pm\sqrt{3}$ のとき。

よって，極限値は

$x^2-2x-1=1$　すなわち　$x=1\pm\sqrt{3}$ のとき　1

$-1<x^2-2x-1<1$　すなわち　$1-\sqrt{3}<x<0$，$2<x<1+\sqrt{3}$ のとき　0

3

解答　(1)　$|r|<1$ のとき $\dfrac{1-r}{1+r}$，　$r=1$ のとき $-\dfrac{1}{3}$，　$r=-1$ のとき 1，
$|r|>1$ のとき -1

(2)　$|r|<1$ のとき $\dfrac{1}{1-r}$，　$r=1$ のとき 1，　$r=-1$ のとき 極限はない，
$|r|>1$ のとき $1-r$

解説

(1) [1]　$|r|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\frac{1-r-0}{1+r+0}=\frac{1-r}{1+r}$

[2]　$r=1$ のとき　$r^{2n}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\frac{1-1-1}{1+1+1}=-\frac{1}{3}$

[3]　$r=-1$ のとき　$r^{2n}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\frac{1-(-1)-1}{1-1+1}=1$

[4]　$|r|>1$ のとき　$\left|\dfrac{1}{r^2}\right|<1$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-r)\left(\frac{1}{r^2}\right)^n-1}{(1+r)\left(\frac{1}{r^2}\right)^n+1}=-1$

(2) [1]　$|r|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{n+2}=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\frac{1+0-0}{1-r+0}=\frac{1}{1-r}$

[2]　$r=1$ のとき　$r^{n+1}=1$，$r^{n+2}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\frac{1+1-1}{1-1+1}=1$

[3]　$r=-1$ のとき　$\dfrac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\dfrac{1+(-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}}{1-(-1)+(-1)^{n+1}}$

$=\dfrac{1-2(-1)^n}{2-(-1)^n}=\dfrac{3}{(-1)^n-2}+2$

よって，極限はない。(振動する)

[4]　$|r|>1$ のとき　$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}+1-r}{(1-r)\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}+1}=1-r$

4

解答　(1)　$a_n=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1$，極限は ∞　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{3^n-1}$，極限は 0

(3)　$a_n=\dfrac{4}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$，極限は $\dfrac{4}{7}$

解説

(1) 与えられた漸化式を変形して　$a_{n+1}+1=\dfrac{3}{2}(a_n+1)$

また　$a_1+1=1+1=2$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 2，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列である。

ゆえに　$a_n+1=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　すなわち　$a_n=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}=\infty$

(2) $a_1=\dfrac{1}{2}>0$ であるから，漸化式より　$a_2>0$，$a_3>0$，……，$a_n>0$

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+2$

よって　$b_{n+1}=3b_n+2$

変形すると　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また　$b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=3$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 3，公比 3 の等比数列であるから　$b_n+1=3\cdot 3^{n-1}$

したがって　$b_n=3^n-1$

$$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{3^n-1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(3)　与えられた漸化式を変形して

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{4}(a_{n+1}-a_n),\quad a_{n+2}+\frac{3}{4}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{3}{4}a_n$$

ゆえに　$a_{n+1}-a_n=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$，$a_{n+1}+\dfrac{3}{4}a_n=a_2+\dfrac{3}{4}a_1=1$

辺々引いて　$-\dfrac{7}{4}a_n=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}-1$

よって　$a_n=\dfrac{4}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$　　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{7}$

5

別解　(1)　$a_n=\dfrac{11}{36}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{n-1}+\dfrac{4}{9}$　　(2)　$\dfrac{4}{9}$

解説

(1)　$(n+1)$ 回繰り返した後に A の袋に赤球が入っているのは

[1]　n 回後に A の袋に赤球があり，$(n+1)$ 回目に A の袋から黒球が出る

[2]　n 回後に B の袋に赤球があり，$(n+1)$ 回目に B の袋から赤球が出る

のいずれかであり，[1]，[2] は互いに排反であるから

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{3}{4}+(1-a_n)\cdot\frac{1}{5}=\frac{11}{20}a_n+\frac{1}{5}$$

$a_{n+1}=\dfrac{11}{20}a_n+\dfrac{1}{5}$ を変形すると　$a_{n+1}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{11}{20}\left(a_n-\dfrac{4}{9}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{4}{9}\right\}$ は，初項 $a_1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{11}{36}$，公比 $\dfrac{11}{20}$ の等比数列であるから

$a_n-\dfrac{4}{9}=\dfrac{11}{36}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{n-1}$　　よって　$a_n=\dfrac{11}{36}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{n-1}+\dfrac{4}{9}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{11}{36}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}+\frac{4}{9}\right\}=\frac{4}{9}$

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　3

解説

(1)　$0<a_n<3$ …… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき，与えられた条件から ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　$0<a_k<3$

$n=k+1$ のときを考えると，$0<a_k<3$ であるから

$$a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}>2>0,\quad a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}<1+\sqrt{1+3}=3$$

したがって　$0<a_{k+1}<3$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　$3-a_{n+1}=2-\sqrt{1+a_n}=\dfrac{3-a_n}{2+\sqrt{1+a_n}}<\dfrac{1}{3}(3-a_n)$

(3)　(1)，(2) から　$0<3-a_n\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3-a_n)=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$

1

解答　(1)　(ア)　-1　　(イ)　$0<r<3$ のとき -9，$r=3$ のとき -2，$3<r$ のとき $\dfrac{1}{r}$

(2)　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1)　(ア)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$\dfrac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta}=\dfrac{\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n-1}{\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n+1}=\dfrac{\tan^n\theta-1}{\tan^n\theta+1}$

このとき，$0<\tan\theta<1$ であるから　(与式)$=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

(イ)　[1]　$0<r<3$ のとき　$0<\dfrac{r}{3}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{r}{3}\right)^{n-1}-3}{\left(\frac{r}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0-3}{0+\frac{1}{3}}=-9$$

[2]　$r=3$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-3^{n+1}}{3^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8\cdot 3^{n-1}}{4\cdot 3^{n-1}}=-2$

[3]　$3<r$ のとき　$0<\dfrac{3}{r}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-9\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}}{r+\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}}=\frac{1-9\cdot 0}{r+0}=\frac{1}{r}$$

(2)　収束するための条件は　$-1<4\sin^2\theta+2\cos\theta-3\leqq 1$

$\cos\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$-1\leqq x\leqq 1$ …… ①

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから　$-1<4(1-x^2)+2x-3\leqq 1$

整理して　$-1<-4x^2+2x+1\leqq 1$

$-1<-4x^2+2x+1$ から　$2x^2-x-1<0$

ゆえに　$(2x+1)(x-1)<0$　　よって　$-\dfrac{1}{2}<x<1$ …… ②

$-4x^2+2x+1\leqq 1$ から　$2x^2-x\geqq 0$

ゆえに　$x(2x-1)\geqq 0$　　よって　$x\leqq 0$，$\dfrac{1}{2}\leqq x$ …… ③

①，②，③ の共通範囲をとって　$-\dfrac{1}{2}<x\leqq 0$，$\dfrac{1}{2}\leqq x<1$

すなわち　$-\dfrac{1}{2}<\cos\theta\leqq 0$，$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから，$-\dfrac{1}{2}<\cos\theta\leqq 0$ より　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\dfrac{2}{3}\pi$

$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$ より　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$

よって，求める θ の値の範囲は　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\dfrac{2}{3}\pi$

2

解答　(1)　$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

(2)　$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき0に収束，　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき1に収束，

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき 正の無限大に発散，

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqq-\dfrac{\pi}{4}$ のとき 振動する（極限はない）

(3)　$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき -1；　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき 0；

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<-\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき1

解説

(1)　$|\tan\theta|<1$ から　　$-1<\tan\theta<1$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，これを解くと　　$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

(2)　[1]　$|\tan\theta|<1$ のとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=0$

よって，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，0に収束する。

[2]　$\tan\theta=1$ のとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=1$

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，1に収束する。

[3]　$\tan\theta>1$ のとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=\infty$

よって，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，正の無限大に発散する。

[4]　$\tan\theta\leqq-1$　すなわち $-\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqq-\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

数列 $\{\tan^n\theta\}$ は振動する。（極限はない）

(3)　[1]　$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=0$ であるから

$$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sin^n\theta}{\cos^n\theta}-1}{\dfrac{\sin^n\theta}{\cos^n\theta}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n\theta-1}{\tan^n\theta+1}=-1$$

[2]　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\sin\theta=\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　　$(与式)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}0=0$

[3]　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<-\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$|\tan\theta|>1$ であるから　　$\left|\dfrac{1}{\tan\theta}\right|<1$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tan^n\theta}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^n=0$

したがって　　$(与式)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{\cos^n\theta}{\sin^n\theta}}{1+\dfrac{\cos^n\theta}{\sin^n\theta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{\tan^n\theta}}{1+\dfrac{1}{\tan^n\theta}}=1$

3

解答　(1)　略　　(2)　$b_n=2\cdot3^{n-1}-1$　　(3)　2

解説

(1)　$a_n>2$ ……①が成り立つことを，数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=3$ であるから①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき

①が成り立つ，すなわち $a_k>2$ ……②と仮定する。

$$a_{k+1}-2=\frac{5a_k-4}{2a_k-1}-2=\frac{a_k-2}{2a_k-1}$$

②から　　$a_k-2>0$，$2a_k-1>3>0$

よって　　$a_{k+1}-2>0$　　　すなわち　　$a_{k+1}>2$

ゆえに，①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n に対し，①が成り立つ。

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-4}{2a_n-1}$ から

$$a_{n+1}-2=\frac{5a_n-4}{2a_n-1}-2=\frac{a_n-2}{2a_n-1}\quad\cdots\cdots③$$

(1)より，すべての自然数 n に対して $a_n>2$ であるから，③の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{2a_n-1}{a_n-2}$$

すなわち　　$\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=2+\dfrac{3}{a_n-2}$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくと　　$b_{n+1}=3b_n+2$

変形すると　　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また，$b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{3-2}=1$ であるから，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=2$，公比3の等比数列である。

よって　　$b_n+1=2\cdot3^{n-1}$　　　ゆえに　　$b_n=2\cdot3^{n-1}-1$

(3)　(2)から　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}+2=\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}+2$

したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}+2\right)=2$

4

解答　(1)　$b_n=\dfrac{7}{2}-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$　　(2)　$\dfrac{5}{2}$

解説

(1)　$b_n=\dfrac{1}{5}a_n+1$ ……①，$a_{n+1}=3b_n+2$ ……②とする。

①から　　$b_1=\dfrac{1}{5}a_1+1=\dfrac{1}{5}\cdot0+1=1$

また　　$a_n=5b_n-5$　　ゆえに　　$a_{n+1}=5b_{n+1}-5$

これを②に代入して　　$5b_{n+1}-5=3b_n+2$

よって　　$b_{n+1}=\dfrac{3}{5}b_n+\dfrac{7}{5}$　　　変形すると　　$b_{n+1}-\dfrac{7}{2}=\dfrac{3}{5}\left(b_n-\dfrac{7}{2}\right)$

ゆえに，数列 $\left\{b_n-\dfrac{7}{2}\right\}$ は初項 $b_1-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{5}{2}$，公比 $\dfrac{3}{5}$ の等比数列であるから

$b_n-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$　　　よって　　$b_n=\dfrac{7}{2}-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

(2)　$b_{n+1}-b_n=\left\{\dfrac{7}{2}-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right\}-\left\{\dfrac{7}{2}-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\left(-\dfrac{3}{5}+1\right)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

$b_{2n}-b_n=\left\{\dfrac{7}{2}-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2n-1}\right\}-\left\{\dfrac{7}{2}-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\left\{-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1\right\}$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n}-b_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\left\{-\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right\}=\frac{5}{2}$

5

解答　略

解説

$x_{n+1}=\dfrac{1}{4}x_n+\dfrac{4}{5}y_n$ ……①，$y_{n+1}=\dfrac{3}{4}x_n+\dfrac{1}{5}y_n$ ……②

①＋②から　　$x_{n+1}+y_{n+1}=x_n+y_n$　　　$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ から　　$x_1+y_1=2$

よって　　$x_n+y_n=x_{n-1}+y_{n-1}=\cdots\cdots=x_1+y_1=2$　　　ゆえに　　$y_n=2-x_n$

これを①に代入して整理すると　　$x_{n+1}=-\dfrac{11}{20}x_n+\dfrac{8}{5}$

変形すると　　$x_{n+1}-\dfrac{32}{31}=-\dfrac{11}{20}\left(x_n-\dfrac{32}{31}\right)$　　　また　　$x_1-\dfrac{32}{31}=-\dfrac{1}{31}$

ゆえに　　$x_n-\dfrac{32}{31}=-\dfrac{1}{31}\left(-\dfrac{11}{20}\right)^{n-1}$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{32}{31}-\frac{1}{31}\left(-\frac{11}{20}\right)^{n-1}\right\}=\frac{32}{31}$

また　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(2-x_n)=2-\frac{32}{31}=\frac{30}{31}$

したがって，点列 P_1，P_2，……は定点 $\left(\dfrac{32}{31},\ \dfrac{30}{31}\right)$ に限りなく近づく。

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　2

解説

(1)　すべての自然数 n について　$a_n>2$ ……①　が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=1$ のとき

条件より，$a_1=3$ であるから，①が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つ，すなわち $a_k>2$ が成り立つと仮定すると，

$n=k+1$ のとき　　$a_{k+1}-2=\left(3-\dfrac{2}{a_k}\right)-2=1-\dfrac{2}{a_k}=\dfrac{a_k-2}{a_k}>0$

よって　$a_{k+1}>2$

ゆえに，$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n について①が成り立つ。

(2)　(1)から　$a_{n+1}-2>0$ ……②

また　　$\dfrac{1}{2}(a_n-2)-(a_{n+1}-2)=\dfrac{1}{2}(a_n-2)-\left(1-\dfrac{2}{a_n}\right)=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{2}{a_n}-2$

$$=\frac{{a_n}^2-4a_n+4}{2a_n}=\frac{(a_n-2)^2}{2a_n}>0$$

すなわち　　$\dfrac{1}{2}(a_n-2)>a_{n+1}-2$ ……③

②，③から　$0<a_{n+1}-2<\dfrac{1}{2}(a_n-2)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3)　(1)，(2)から　　$0<a_n-2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

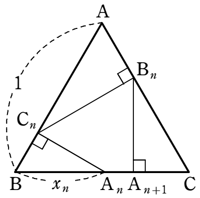
したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x_{n+1}=\frac{3}{4}-\frac{x_n}{8}$　　(2)　$\frac{2}{3}$

解説

(1)　$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{BC}_n$ において　$\mathrm{BC}_n=\frac{x_n}{2}$



$\mathrm{AC}_n=1-\mathrm{BC}_n$ であるから　$\mathrm{AC}_n=1-\frac{x_n}{2}$

$\triangle \mathrm{C}_n\mathrm{AB}_n$ において　$\mathrm{AB}_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x_n}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{x_n}{4}$

$\mathrm{CB}_n=1-\mathrm{AB}_n=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{x_n}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{x_n}{4}$

$\triangle \mathrm{B}_n\mathrm{CA}_{n+1}$ において　$\mathrm{CA}_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{x_n}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{x_n}{8}$

ゆえに　$x_{n+1}=\mathrm{BA}_{n+1}=1-\mathrm{CA}_{n+1}=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{x_n}{8}\right)$

したがって　$x_{n+1}=\frac{3}{4}-\frac{x_n}{8}$

(2)　$x_{n+1}=\frac{3}{4}-\frac{x_n}{8}$ を変形すると　$x_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{8}\left(x_n-\frac{2}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{x_n-\frac{2}{3}\right\}$ は初項 $x_1-\frac{2}{3}$，公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であり

$$x_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1-\frac{2}{3}\right)$$

ゆえに　$x_n=\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$　　よって　$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{2}{3}$

$\boxed{2}$

解答　1

解説

$(n+1)$ 年目の都外の人口は
　n 年目に都外に住み，$(n+1)$ 年目に都内に移住しない人　と
　n 年目に都内に住み，$(n+1)$ 年目に都外に移住する人
の数の合計になるから　$a_{n+1}=a_n\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)+b_n\cdot\frac{1}{3}$

すなわち　$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$　…… ①

同様にして　$b_{n+1}=a_n\cdot\frac{1}{3}+b_n\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$

すなわち　$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n$　…… ②

①＋② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$
よって　$a_n+b_n=a_1+b_1$　…… ③

①－② から　$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n-b_n)$

よって　$a_n-b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)$　…… ④

(③＋④)÷2 から　$a_n=\frac{1}{2}\left\{(a_1+b_1)+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)\right\}$

(③－④)÷2 から　$b_n=\frac{1}{2}\left\{(a_1+b_1)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)\right\}$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left\{(a_1+b_1)+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)\right\}}{\frac{1}{2}\left\{(a_1+b_1)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)\right\}}=1$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n$，$c_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n$

(2)　$b_n=\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$　　(3)　$p_n=\frac{1}{2}+\frac{2^{n+1}}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(4)　$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{7}$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{3}{7}$，$\lim_{n\to\infty} c_n=\frac{2}{7}$

解説

(1)　時刻 $n+1$ に点 P が頂点 A にいる場合は，次の 2 通りがある。

[1]　時刻 n に点 A にいて，確率 $\frac{1}{2}$ でとどまる。

[2]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\frac{1}{3}$ で移動する。

よって　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n$

時刻 $n+1$ に点 P が頂点 B にいる場合は，次の 3 通りがある。

[1]　時刻 n に点 A にいて，確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。

[2]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\frac{1}{3}$ でとどまる。

[3]　時刻 n に点 C にいて，確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。

よって　$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n$

時刻 $n+1$ に点 P が頂点 C にいる場合は，次の 2 通りがある。

[1]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\frac{1}{3}$ で移動する。

[2]　時刻 n に点 C にいて，確率 $\frac{1}{2}$ でとどまる。

よって　$c_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n$

(2)　$a_n+b_n+c_n=1$ から　$a_n+c_n=1-b_n$

よって，(1) から　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}(a_n+c_n)=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}(1-b_n)=-\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{2}$

この漸化式を変形すると　$b_{n+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(b_n-\frac{3}{7}\right)$

ここで，時刻 0 に点 P は頂点 A にいるから　$a_0=1$，$b_0=0$，$c_0=0$

よって，数列 $\left\{b_n-\frac{3}{7}\right\}$ は，初項 $b_0-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}$，公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって　$b_n=\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

注 $n=0$ から考えているため，b_n は $n+1$ 番目の項となる。

(3)　(2) から　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

よって　$p_{n+1}=2^{n+1}a_{n+1}=2^n a_n+\frac{2}{7}\left\{2^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=p_n+\frac{2}{7}\left\{2^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$p_0=2^0\cdot a_0=1$ より，$n\geqq 1$ のとき

$$p_n=p_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{7}\left\{2^k-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}=1+\frac{2}{7}\left\{\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2^{n+1}}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots\cdots ①$$

$n=0$ のとき　$\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}=1$

$p_0=1$ であるから，① は $n=0$ のときも成り立つ。

よって　$p_n=\frac{1}{2}+\frac{2^{n+1}}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(4)　(3) から　$a_n=\frac{p_n}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{2}{7}$

(2) から　$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{3}{7}$

$c_n=1-a_n-b_n$ から　$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(1-a_n-b_n)=1-\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$

4

解答　(1)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$　(2)　略　(3)　証明略，$\sqrt{3}$

解説

(1)　$f(x)=x^2-3$ から　$f'(x)=2x$

よって，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_n,\ {a_n}^2-3)$ における接線の方程式は

$y-({a_n}^2-3)=2a_n(x-a_n)$　　すなわち　$y=2a_nx-{a_n}^2-3$

この接線と x 軸とが交わる点の x 座標が a_{n+1} であるから

$0=2a_na_{n+1}-{a_n}^2-3$

すなわち　$2a_na_{n+1}={a_n}^2+3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　……①

ここで，$a_1=2>0$ であり，① より，$a_n>0$ ならば $a_{n+1}>0$ が成り立つ。

ゆえに，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ が成り立つから，① の両辺を $2a_n\ (\neq 0)$ で割ると　$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$

(2)　すべての自然数 n に対して $a_n>\sqrt{3}$ ……② であることを数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=2>\sqrt{3}$ であるから，$n=1$ のとき ② は成り立つ。

[2]　$n=k$ (k は自然数) のとき，② が成り立つと仮定すると

$a_k>\sqrt{3}$

$n=k+1$ のとき　$a_{k+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{3}{a_k}\right)-\sqrt{3}=\frac{1}{2a_k}({a_k}^2-2\sqrt{3}a_k+3)$

$$=\frac{1}{2a_k}(a_k-\sqrt{3})^2>0$$

よって，$n=k+1$ のときにも，② が成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n に対して，$a_n>\sqrt{3}$ が成り立つ。

(3)　(2) より　$a_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{3})^2=\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})\cdot\frac{a_n-\sqrt{3}}{a_n}$

$a_n-\sqrt{3}>0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であるから　$0<\frac{a_n-\sqrt{3}}{a_n}<1$

よって　$0<a_{n+1}-\sqrt{3}<\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$

ゆえに　$0<a_n-\sqrt{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\sqrt{3})=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})=0$ であるから，はさみうちの原理により

$\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{3})=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$

1

解答　(1)　収束し，その和は $\frac{3}{4}$　(2)　発散する

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)　$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

よって　$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)$

$+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\frac{3}{4}$ である。

(2)　第 n 項は　$\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$

よって　$S_n=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\cdots\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

2

解答　(1)　発散　(2)　収束，$\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$

解説

公比を r とする。

(1)　初項は $2-\sqrt{3}$ であり，公比は

$$r=\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$$

$|r|>1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(2)　初項は $3+\sqrt{2}$ であり，公比は

$$r=\frac{-(2\sqrt{2}-1)}{3+\sqrt{2}}=\frac{-(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=1-\sqrt{2}$$

$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{3+\sqrt{2}}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$$

3

解答　$\frac{9}{4}$

解説

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$$

$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{53}{110}$

解説

$$0.4\dot{8}\dot{1}=0.4+0.081+0.00081+0.0000081+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{81}{10^3}+\frac{81}{10^5}+\frac{81}{10^7}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{\frac{81}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{4}{10}+\frac{9}{110}=\frac{53}{110}$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$，和 $\dfrac{1}{1-3x}$　　(2)　$x=0$，$2<x<4$；和 $\dfrac{x}{x-2}$

解説

(1)　初項が 1，公比が $3x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　　$-1<3x<1$　すなわち　$-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$

このときの和は　　$\dfrac{1}{1-3x}$

(2)　初項が x，公比が $3-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　　$x=0$　または　$-1<3-x<1$

$-1<3-x<1$ より　　$2<x<4$

よって，求める x の値の範囲は　　$x=0$，$2<x<4$

$x=0$ のとき，和は　0

$2<x<4$ のとき，和は　　$\dfrac{x}{1-(3-x)}=\dfrac{x}{x-2}$

これは，$x=0$ のときも成り立つ。

よって，求める和は　　$\dfrac{x}{x-2}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　第 n 項 a_n は　　$a_n=\dfrac{2n+1}{2n}$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1\neq 0$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

別解　第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{6}+\cdots\cdots+\frac{2n+1}{2n}$$

$$>1+1+1+\cdots\cdots+1=n$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，与えられた無限級数は発散する。

(2)　第 n 項 a_n は　　$a_n=\cos n\pi$

ここで　　n が奇数のとき　　$\cos n\pi=-1$

　　　　　n が偶数のとき　　$\cos n\pi=1$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は振動する。

すなわち，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

$\boxed{7}$

解答　(1)　$S_{2n-1}=1$，$S_{2n}=1-\dfrac{1}{n+1}$　　(2)　収束，和 1

解説

(1)　$S_{2n-1}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\cdots\cdots-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}$

$$=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)-\cdots\cdots-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=1$$

$$S_{2n}=S_{2n-1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

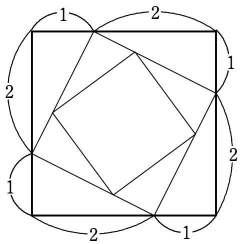
(2)　(1) から　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$

したがって，無限級数 ① は収束して，その和は 1

$\boxed{8}$

図のように，1 辺の長さ 1 の正方形の各辺を 2 : 1 に内分する 4 点を結んでできる正方形の面積を S_1 とする。同様に，新しくできた正方形の 4 辺を 2 : 1 に内分する 4 点を結んでできる正方形の面積を S_2 とする。以下同様に，この操作を無限に続けて得られるすべての正方形の面積の総和 $S=S_1+S_2+\cdots\cdots$ を求めよ。



解答　$S=\dfrac{5}{4}$

解説

面積 S_n の正方形の一辺の長さを l とすると

$$S_n:S_{n+1}=l^2:\left\{\left(\frac{2}{3}l\right)^2+\left(\frac{1}{3}l\right)^2\right\}$$

$$=l^2:\frac{5}{9}l^2=1:\frac{5}{9}$$

よって　　$S_{n+1}=\dfrac{5}{9}S_n$

もとの正方形の面積は 1 であるから　　$S_1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

したがって，求める面積の総和 S は，初項 $\dfrac{5}{9}$，公比 $\dfrac{5}{9}$ $\left(\left|\dfrac{5}{9}\right|<1\right)$ の無限等比級数の和で表され　　$S=\dfrac{\frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}}=\dfrac{5}{4}$

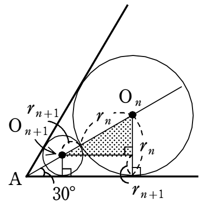
$\boxed{9}$

解答　$\dfrac{27}{32}\pi$

解説

円 O_n の半径を r_n，面積を S_n とすると右の図から

$$(r_n+r_{n+1})\sin 30^\circ=r_n-r_{n+1}$$



よって　　$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$　　したがって　　$S_{n+1}=\dfrac{1}{9}S_n$

また，$r_1=\dfrac{3}{2}\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　　$S_1=\dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに，円の面積の総和は，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3}{4}\pi}{1-\frac{1}{9}}=\frac{27}{32}\pi$

1

解答　(1)　収束，和 $\dfrac{1}{3}$　　(2)　発散する

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)　第 n 項は　$\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

よって　$S_n=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{1}{3}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}=\dfrac{\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}}{(\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1})(\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1})}$

$=\dfrac{\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}}{(3n-2)-(3n+1)}=\dfrac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{3}$

よって　$S_n=\dfrac{2-1}{3}+\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}+\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3n+1}-1}{3}$

ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n+1}-1}{3}=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

2

解答　(1)　収束，$\dfrac{4}{3}$　　(2)　収束，$\dfrac{5}{8}$　　(3)　発散　　(4)　発散　　(5)　収束，$6+4\sqrt{3}$

解説

公比を r とする。

(1)　初項は 1，公比は $r=\dfrac{1}{4}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$$

(2)　初項は 1，公比は $r=-\dfrac{3}{5}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)}=\dfrac{5}{8}$$

(3)　初項は 1，公比は $r=-\sqrt{5}$ で　$|r|>1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(4)　初項は 3，公比は $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ で　$|r|>1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(5)　初項は $2\sqrt{3}$，公比は $r=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=6+4\sqrt{3}$$

3

解答　(1)　3　　(2)　$-\dfrac{2}{3}$

解説

(1)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数で，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{5^{n-1}}$ は初項 2，公比 $\dfrac{1}{5}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに 1 より小さいから，この 2 つの無限等比級数はともに収束する。

よって　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{2}{5^{n-1}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{5^{n-1}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{1-\frac{1}{5}}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=3$

(2)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-5}{4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\dfrac{5}{4^n}\right\}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数で，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{4^n}$ は初項 $\dfrac{5}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに 1 より小さいから，この 2 つの無限等比級数はともに収束する。

よって　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-5}{4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{4^n}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

$=1-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{2}{3}$

4

解答　(1)　$\dfrac{5}{9}$　　(2)　$\dfrac{29}{55}$　　(3)　$\dfrac{878}{1665}$

解説

(1)　$0.\dot{5}=0.5+0.05+0.005+\cdots\cdots=\dfrac{5}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{5}{10^3}+\cdots\cdots$

$=\dfrac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{5}{9}$

(2)　$0.5\dot{2}\dot{7}=0.5+0.027+0.00027+0.0000027+\cdots\cdots$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{27}{10^3}+\dfrac{27}{10^5}+\dfrac{27}{10^7}+\cdots\cdots$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{27}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{27}{990}=\dfrac{29}{55}$

(3)　$0.5\dot{2}7\dot{3}=0.5+0.0273+0.0000273+0.0000000273+\cdots\cdots$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{273}{10^4}+\dfrac{273}{10^7}+\dfrac{273}{10^{10}}+\cdots\cdots$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{273}{10^4}}{1-\frac{1}{10^3}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{91}{3330}=\dfrac{878}{1665}$

5

解答　(1)　$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$；和は $\dfrac{3}{1-2x}$　　(2)　$-1<x<1$，$x=3$；和は $\dfrac{3-x}{1-x}$

(3)　$-1<x\leqq 0$，$1<x<2$；和は $-\dfrac{x}{x^2-x-2}$

解説

(1)　初項が 3，公比が $2x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　$-1<2x<1$　すなわち　$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$

このときの和は　$\dfrac{3}{1-2x}$

(2)　この無限等比級数の初項は $3-x$，公比 x である。

この無限等比級数が収束するための条件は

$3-x=0$　または　$|x|<1$　　ゆえに　$-1<x<1$，$x=3$

$x=3$ のとき，和は 0

$-1<x<1$ のとき，和は　$\dfrac{3-x}{1-x}$　これは $x=3$ の場合も含む。

したがって，求める和は　$\dfrac{3-x}{1-x}$

(3)　この無限等比級数の初項は x，公比は x^2-x-1 である。

よって，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x=0$　または　$-1<x^2-x-1<1$

$-1<x^2-x-1$ から　$x^2-x>0$　　ゆえに　$x<0$，$1<x$　……①

$x^2-x-1<1$ から　$x^2-x-2<0$

これを解くと　$(x-2)(x+1)<0$ から　$-1<x<2$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$-1<x<0$，$1<x<2$

したがって，求める x の値の範囲は　$-1<x\leqq 0$，$1<x<2$

このとき，和は　$\dfrac{x}{1-(x^2-x-1)}=-\dfrac{x}{x^2-x-2}$

6

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　第 n 項 a_n は　$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}\neq 0$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

別解　第 n 項までの部分和を S_n とすると

$S_n=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2n-1}$

$>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，与えられた無限級数は発散する。

(2)　第 n 項 a_n は　$a_n=\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi$

ここで　n が奇数のとき　$\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi=1$

n が偶数のとき　$\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi=-1$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は振動する。

すなわち，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

7

解答　(1)　発散　(2)　収束，$\dfrac{5}{2}$

解説

(1)　第 n 項までの部分和を S_n とすると　$S_{2n-1}=\dfrac{2}{3}$

また　$S_{2n}=S_{2n-1}+\left(-\dfrac{2n+2}{2n+3}\right)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2n+2}{2n+3}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ であるから，無限級数は発散する。

別解　第 n 項を a_n とすると　$a_{2n}=-\dfrac{2n+2}{2n+3}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n}=-1$ から，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しない。

したがって，この無限級数は発散する。

(2)　第 n 項までの部分和を S_n とする。

この無限級数の第 $(2n-1)$ 項は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，第 $2n$ 項は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ であるから

$$S_{2n}=\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}+\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_{2n-1}=S_{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-0=\frac{5}{2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{5}{2}$ であるから，無限級数は収束し，和は　$\dfrac{5}{2}$

8

解答　$\dfrac{32}{3}$

解説

$\triangle A_nBA_{n+1}$ の面積を S_n とする。

$\triangle A_nBA_{n+1}\backsim\triangle A_{n+1}BA_{n+2}$ で，相似比は　$A_nA_{n+1}:A_{n+1}A_{n+2}=5:4$

ゆえに　$S_n:S_{n+1}=5^2:4^2$　　すなわち　$S_{n+1}=\dfrac{16}{25}S_n$

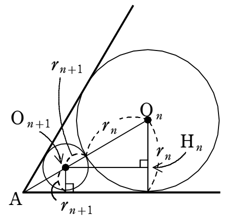
よって，求める面積の総和 S は，初項 $S_1=\dfrac{16}{25}\cdot6=\dfrac{96}{25}$，公比 $\dfrac{16}{25}$ $\left(\left|\dfrac{16}{25}\right|<1\right)$ の無限等比級数の和で表され　$S=\dfrac{\frac{96}{25}}{1-\frac{16}{25}}=\dfrac{32}{3}$

9

解答　$\dfrac{3}{32}\pi$

解説

円 O_n の半径を r_n，面積を S_n とし，点 O_{n+1} を通り辺 AB に平行な直線と点 O_n から AB に下ろした垂線との交点を H_n とする。



$\triangle O_nO_{n+1}H_n$ において，$\angle O_nO_{n+1}H_n=30^\circ$ であるから

$O_nO_{n+1}\sin30^\circ=O_nH_n$

すなわち　$(r_n+r_{n+1})\cdot\dfrac{1}{2}=r_n-r_{n+1}$

よって　$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$

したがって，円 O_n と円 O_{n+1} の面積比は $9:1$ であるから　$S_{n+1}=\dfrac{1}{9}S_n$

また，$r_1=\dfrac{1}{2}\tan30^\circ=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ であるから　$S_1=\dfrac{\pi}{12}$

ゆえに，円の面積の総和は，初項 $\dfrac{\pi}{12}$，公比 $\dfrac{1}{9}$ $\left(\left|\dfrac{1}{9}\right|<1\right)$ の無限等比級数の和で表され

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{12}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{32}\pi$$

1

解答　$\dfrac{3}{2}$

解説

初項を a，公比を r とする。

$a=0$ のとき，条件を満たさないから　$a\neq0$

また，無限等比級数の和があるから　$|r|<1$

条件から　$\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{ar}{1-r^2}+1$　……①，　$\dfrac{a^2}{1-r^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{1-r}$　……②

① の両辺に $1-r^2$ を掛けると　$a(1+r)=ar+1-r^2$

よって　$a=1-r^2$　……③

② の両辺に $2(1-r^2)$ を掛けると　$2a^2=a(1+r)$

$a\neq0$ であるから　$2a=1+r$　　③ を代入して　$2(1-r^2)=1+r$

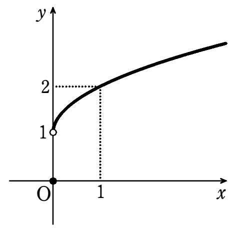
整理すると　$2r^2+r-1=0$　　すなわち　$(r+1)(2r-1)=0$

$|r|<1$ から　$r=\dfrac{1}{2}$　　③ に代入して　$a=\dfrac{3}{4}$　($a\neq0$ を満たす)

よって，もとの級数の和は　$\dfrac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}$

2

解答　［図］



解説

関数 $f(x)$ の定義域は $x\geqq0$ で，この無限等比級数の初項は $\sqrt{x}$，公比は $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ である。

[1]　$x=0$ のとき，この無限等比級数は収束し，その和は 0 である。

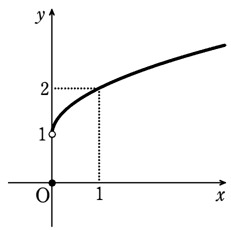
[2]　$x>0$ のとき，$0<\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}<1$ であるから，

この無限等比級数は収束し，その和は

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\sqrt{x}+1$$

よって　$\begin{cases}x=0\text{ のとき}\quad f(x)=0\\ x>0\text{ のとき}\quad f(x)=\sqrt{x}+1\end{cases}$

したがって，関数 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



$\boxed{3}$

解答　(1)　収束，$-\dfrac{1}{2}$　　(2)　発散する　　(3)　発散する

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)　$S_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{n+1}{n+2}$

ゆえに　$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

よって，収束し，その和は　$-\dfrac{1}{2}$

(2)　$$S_{2n-1}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{1}{2}$

また　$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n-1}-\frac{n+1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ であるから，発散する。

別解　$a_{2n-1}=\dfrac{n}{n+1}$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=1\neq0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が 0 に収束しないから無限級数は発散する。

(3)　$$S_{2n-1}=2+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(-\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}\right)=2$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2$

また　$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n-1}-\frac{n+2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=2-1=1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ であるから，発散する。

別解　$a_{2n-1}=\dfrac{n+1}{n}$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=1\neq0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が 0 に収束しないから無限級数は発散する。

$\boxed{4}$

解答　(1)　$A=\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$S_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$　　(3)　$\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n(n+1)}+\dfrac{B}{(n+1)(n+2)}$ の両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると

$1=A(n+2)+Bn$　　すなわち　$1=(A+B)n+2A$

これがすべての自然数 n について成り立つための条件は　$A+B=0$，$2A=1$

これを解くと　$A=\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{2}$

(2)　(1) から　$a_n=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

よって　$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot4}}\right)+\cdots\cdots+\left\{\cancel{\frac{1}{n(n+1)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

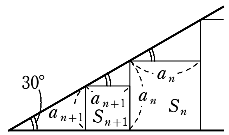
(3)　$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{5}$

解答　$\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}a^2$

解説

S_n の 1 辺の長さを a_n とすると，図から



$$\tan30°=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}$$

よって　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1\right)a_{n+1}=a_n$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

また　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a$

したがって　$a_{n+1}{}^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2a_n{}^2$，$a_1{}^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a\right)^2$

S_n の面積は $a_n{}^2$ であるから，すべての正方形の面積の和 S は，初項 $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a\right)^2$，

公比 $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$ の無限等比級数の和で表され，$\left|\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right|<1$ であるから

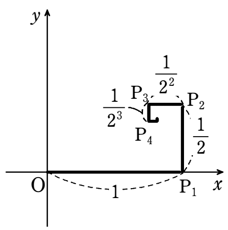
$$S=\frac{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{1-\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}a^2}{1-\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}=\frac{6-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}a^2=\frac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}a^2$$

$\boxed{6}$

解答　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

解説

O から x 軸の正の向きに 1 だけ進んだ点を P_1，次に y 軸の正の向きに $\dfrac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_2，以下順に進んだ点を P_3，P_4，…… とする。



求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=OP_1-P_2P_3+P_4P_5-\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\cdots\cdots$$

これは，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ $\left(\left|-\dfrac{1}{2^2}\right|<1\right)$ の無限等比級数であるから，収束して，その和は　$x=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\dfrac{4}{5}$

また　$y=P_1P_2-P_3P_4+P_5P_6-\cdots\cdots=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}-\cdots\cdots$

これは，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ $\left(\left|-\dfrac{1}{2^2}\right|<1\right)$ の無限等比級数であるから，収束して，その和は　$y=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\dfrac{2}{5}$

よって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

1

解答　(1)　$\dfrac{1}{\log_{10}2}$　　(2)　$\dfrac{1}{8}$

解説

(1)　$\dfrac{\log_{10}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log_{10}n\log_{10}(n+1)}=\dfrac{\log_{10}\dfrac{n+1}{n}}{\log_{10}n\log_{10}(n+1)}=\dfrac{\log_{10}(n+1)-\log_{10}n}{\log_{10}n\log_{10}(n+1)}$

$$=\frac{1}{\log_{10}n}-\frac{1}{\log_{10}(n+1)}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log_{10}k\log_{10}(k+1)}$ とすると

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{\log_{10}k}-\frac{1}{\log_{10}(k+1)}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{\log_{10}2}-\frac{1}{\log_{10}3}\right)+\left(\frac{1}{\log_{10}3}-\frac{1}{\log_{10}4}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\left\{\frac{1}{\log_{10}n}-\frac{1}{\log_{10}(n+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\log_{10}2}-\frac{1}{\log_{10}(n+1)}$$

よって，求める無限級数の和 S は

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log_{10}2}-\frac{1}{\log_{10}(n+1)}\right\}=\frac{1}{\log_{10}2}$$

(2)　$\dfrac{n}{(4n^2-1)^2}=\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right\}$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(4k^2-1)^2}$ とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left\{1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}$$

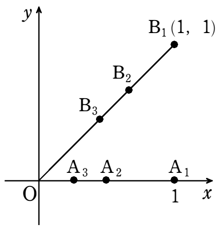
よって，求める無限級数の和 S は

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}=\frac{1}{8}$$

2

解答　$\mathrm{A_2B_2}=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$，和は $\dfrac{29}{15}$

解説



$\mathrm{A}_2\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}_2\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ となるから

$$\mathrm{A_2B_2}^2=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{4}{9}=\frac{17}{36}$$

よって　　$\mathrm{A_2B_2}=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$

また，$\mathrm{A}_n(p_n,\ 0)$，$\mathrm{B}_n(q_n,\ q_n)$ とおく。

$\mathrm{A}_{n+1}(p_{n+1},\ 0)$ は線分 OA_n の中点であり，$\mathrm{B}_{n+1}(q_{n+1},\ q_{n+1})$ は線分 OB_n を 2：1 に内分する点であるから　　$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n$ ……①，　$q_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n$ ……②

よって，① より　　$p_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}p_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

② より　　$q_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}q_1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　　$\mathrm{A}_n\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ 0\right)$，$\mathrm{B}_n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1},\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$

よって　　$(a_n)^2=\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2+\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}^2$

$$=\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$
$$=2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

したがって　　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

$$=2\times\frac{1}{1-\frac{4}{9}}-2\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{18}{5}-3+\frac{4}{3}=\frac{29}{15}$$

3

解答　(1)　$3\cdot4^n$　　(2)　$\dfrac{8}{5}$

解説

(1)　図形 A_n の辺の数を a_n とする。

図形 A_{n-1} のそれぞれ 1 つの辺が 4 つの辺に分かれて図形 A_n ができるから

$$a_n=4\cdot a_{n-1}$$

$a_0=3$ であるから　　$a_n=3\cdot4^n$

(2)　図形 A_{n-1} の外側につけ加える正三角形の 1 つの面積は，正三角形の 1 辺の長さが A_{n-1} の 1 辺の長さの $\dfrac{1}{3}$ であるから　　$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}^nS_0=\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\cdot1=\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$

また，図形 A_{n-1} の外側につけ加える正三角形の数は a_{n-1} であるから，$n\geqq1$ のとき　　$S_n=S_{n-1}+\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\cdot a_{n-1}=S_{n-1}+\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\cdot3\cdot4^{n-1}=S_{n-1}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

したがって　　$S_n=S_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}=\frac{8}{5}$

4

解答　(1)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}=t(1-t)a_n$，$a_{n+1}=(3t^2-3t+1)a_n$

(2)　$S=\dfrac{a_1}{-3t^2+3t}$　　(3)　$t=\dfrac{1}{2}$，$S=\dfrac{4}{3}$

解説

(1)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}=\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n\times\dfrac{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\times\dfrac{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}}{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}=t(1-t)a_n$

同様に考えると　　$\triangle\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}=t(1-t)a_n$

$$\triangle\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}=t(1-t)a_n$$

したがって　　$a_{n+1}=a_n-(\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}+\triangle\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}+\triangle\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1})$

$$=a_n-3t(1-t)a_n=(3t^2-3t+1)a_n$$

(2)　(1) から，数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1，公比 $3t^2-3t+1$ の等比数列である。

公比について　　$3t^2-3t+1=3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

$0<t<1$ であるから　　$\dfrac{1}{4}\leqq3t^2-3t+1<1$

よって，無限等比級数 $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束し，その和は

$$S=\frac{a_1}{1-(3t^2-3t+1)}=\frac{a_1}{-3t^2+3t}$$

(3)　(2) から，$a_1=1$ のとき　　$S=\dfrac{1}{-3t^2+3t}$

$$-3t^2+3t=-3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$0<t<1$ であるから　　$0<-3t^2+3t\leqq\dfrac{3}{4}$

したがって，S は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

$\boxed{1}$

解答　(1)　-1　　(2)　$-\dfrac{1}{2}$　　(3)　1

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{2+(x-2)}{x-2}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1$

$\boxed{2}$

解答　$a=7,\ b=4$

解説

$\displaystyle\lim_{x\to3}(x-3)=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to3}(\sqrt{3x+a}-b)=0$

よって　　$\sqrt{9+a}-b=0$　　　すなわち　　$b=\sqrt{9+a}$　……①

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x+a}-b}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{9+a}}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(3x+a)-(9+a)}{(x-3)(\sqrt{3x+a}+\sqrt{9+a})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{3}{\sqrt{3x+a}+\sqrt{9+a}}=\frac{3}{2\sqrt{9+a}}$

ゆえに，$\dfrac{3}{2\sqrt{9+a}}=\dfrac{3}{8}$ から　　$a=7$

① に代入して　　$b=4$

$\boxed{3}$

解答　$a=1,\ b=-3$

解説

$f(x)=\sqrt{x^2+4x}-ax-b$ とおいて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=5$ が成り立つとする。

$a\leqq0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ となるから　　$a>0$

$x\longrightarrow\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい。

よって　　$\displaystyle f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+4x}-ax-b)(\sqrt{x^2+4x}+ax+b)}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}$

$\displaystyle=\frac{(x^2+4x)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}=\frac{(1-a^2)x^2+(4-2ab)x-b^2}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}$

$\displaystyle=\frac{(1-a^2)x+(4-2ab)-\dfrac{b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+a+\dfrac{b}{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=5$ が成り立つには　　$1-a^2=0$

$a>0$ から　　$a=1$

このとき　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(4-2b)-\dfrac{b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+1+\dfrac{b}{x}}=2-b$

よって，$2-b=5$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=5$ が成り立つから　　$b=-3$

したがって　　$a=1,\ b=-3$

$\boxed{4}$

解答　(1)　1　　(2)　-1　　(3)　極限はない

解説

(1)　$x>1$ のとき　$|x-1|=x-1$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to1+0}1=1$

(2)　$x<1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}(-1)=-1$

(3)　(1)，(2) から，右側極限と左側極限は一致しない。
よって，極限はない。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$-\infty$　　(2)　$-\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{1-\dfrac{2}{x}}=-\infty$

(2)　$x=-t$ とおくと　　$t>0$
$x\longrightarrow-\infty$ のとき　　$t\longrightarrow\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\dfrac{3}{t}}+1}=-\frac{3}{2}$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}+x)(\sqrt{x^2+3x}-x)}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-1}$

$\displaystyle=-\frac{3}{2}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　0　　(2)　0　　(3)　1

解説

(1)　$0\leqq|\sin x|\leqq1$ であるから，$x>0$ のとき　　$\displaystyle0\leqq\frac{|\sin x|}{x}\leqq\frac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{|\sin x|}{x}=0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

(2)　$\displaystyle0\leqq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq1$ であるから，$x\neq0$ より　　$\displaystyle0\leqq\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|=x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|=0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

別解　$x\neq0$ のとき，$\displaystyle-1\leqq\sin\frac{1}{x}\leqq1$ であるから　　$\displaystyle-x^2\leqq x^2\sin\frac{1}{x}\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-x^2)=0,\ \lim_{x\to0}x^2=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

(3)　$[x]\leqq x<[x]+1$ から　　$x-1<[x]\leqq x$

よって，$x>0$ のとき　　$\displaystyle\frac{x-1}{x}<\frac{[x]}{x}\leqq1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$

$\boxed{7}$

解答　(1)　e^2　　(2)　1　　(3)　$\dfrac{1}{e^2}$　　(4)　$\dfrac{1}{e}$

解説

(1)　$2x=h$ とおくと　　$x\longrightarrow0$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{2}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^2=e^2$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

(3)　$\displaystyle-\frac{2}{x}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{h\to0}(1+h)^{-\frac{2}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(4)　$\displaystyle\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x$

$\displaystyle-\frac{1}{x+1}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{h\to0}(1+h)^{-1-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to0}\frac{\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}}{1+h}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

1

解答　(1)　1　　(2)　-1　　(3)　$\sqrt{3}$　　(4)　$-\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2-2}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+2x-2)}{(x+1)(2x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x-2}{2x-1}=\frac{-3}{-3}=1$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{4}{x}-2\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\frac{4-2x}{x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x-2}\cdot\frac{-2(x-2)}{x}\right\}$

$\displaystyle=\frac{-2}{2}=-1$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x})}{(2+x)-(4-x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x})}{2(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\{(x^2-x+1)-1\}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\{(1+x)-(1-x)\}(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

2

解答　(1)　$a=-8$，$b=4$　　(2)　$a=8\sqrt{6}$，$b=48$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2-5x+6)=2^2-5\cdot2+6=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2+ax+12)=0$

よって　　$2^2+2a+12=0$　　すなわち　　$a=-8$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+12}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-8x+12}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-6)}{(x-2)(x-3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x-6}{x-3}=4$

ゆえに　　$a=-8$，$b=4$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+5}-b)=0$

よって　　$\sqrt{6}\,a-b=0$　すなわち　$b=\sqrt{6}\,a$　……①

このとき　　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+5}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}a\cdot\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{6}}{x-1}$

$\displaystyle=a\times\lim_{x\to1}\frac{(x+5)-6}{(x-1)(\sqrt{x+5}+\sqrt{6})}$

$\displaystyle=a\times\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{6}}=\frac{a}{2\sqrt{6}}$

ゆえに，$\dfrac{a}{2\sqrt{6}}=4$ から　　$a=8\sqrt{6}$

① に代入して　　$b=48$

3

解答　$a=1$，$b=-\dfrac{5}{2}$

解説

$f(x)=\sqrt{x^2-3x+1}-ax-b$ とおいて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ が成り立つとする。

$a\leqq0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ となるから　　$a>0$

$x\longrightarrow\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい。

よって　　$\displaystyle f(x)=\frac{(\sqrt{x^2-3x+1}-ax-b)(\sqrt{x^2-3x+1}+ax+b)}{\sqrt{x^2-3x+1}+ax+b}$

$\displaystyle=\frac{(x^2-3x+1)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+ax+b}=\frac{(1-a^2)x^2-(3+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+ax+b}$

$\displaystyle=\frac{(1-a^2)x-(3+2ab)+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ が成り立つには　　$1-a^2=0$

$a>0$ から　　$a=1$

このとき　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-(3+2b)+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{b}{x}}=-\frac{3+2b}{2}$

よって，$-\dfrac{3+2b}{2}=1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ が成り立つから　　$b=-\dfrac{5}{2}$

したがって　　$a=1$，$b=-\dfrac{5}{2}$

4

解答　(1)　順に　$-\infty$，∞，極限はない　　(2)　順に　∞，∞，∞

(3)　順に　$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}$，極限はない

解説

(1)　$x<1$ のとき　　$x-1<0$

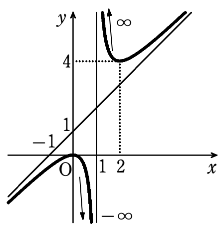
$x\longrightarrow1-0$ のとき　　$x^2\longrightarrow1$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$

$x>1$ のとき　　$x-1>0$

$x\longrightarrow1+0$ のとき　　$x^2\longrightarrow1$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{x-1}=\infty$



ゆえに，$x\longrightarrow1$ のときの $\dfrac{x^2}{x-1}$ の極限はない。

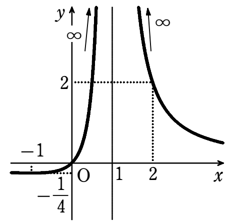
(2)　$0<x<1$ のとき　　$(x-1)^2>0$，$x>0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$

$x>1$ のとき　　$(x-1)^2>0$，$x>0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$



(3)　$x<1$ のとき　　$x-1<0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{|x-1|}{x^3-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1-0}\frac{-1}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3}$

$x>1$ のとき　　$x-1>0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{|x-1|}{x^3-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}$

ゆえに，$x\longrightarrow1$ のときの $\dfrac{|x-1|}{x^3-1}$ の極限はない。

5

解答　(1)　$-\infty$　　(2)　-1　　(3)　$-\dfrac{3}{2}$　　(4)　$-\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)=-\infty$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{1}{x}\right)=-1$

(3)　$x=-t$ とおくと　　$t>0$

$x\longrightarrow-\infty$ のとき　　$t\longrightarrow\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\dfrac{3}{t}}+1}=-\frac{3}{2}$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}+x)(\sqrt{x^2+3x}-x)}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-1}$

$\displaystyle=-\frac{3}{2}$

(4)　$x=-t$ とおくと　　$t>0$

$x\longrightarrow-\infty$ のとき　　$t\longrightarrow\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1})$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\frac{1}{2}$$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{6}$

解答　(1)　0　　(2)　0　　(3)　2

解説

(1)　$0\leqq|\cos x|\leqq 1$ であるから，$x>0$ のとき

$$0\leqq\left|\frac{\cos x}{x}\right|=\frac{|\cos x|}{x}\leqq\frac{1}{x}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|=0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

別解　$-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから，$x>0$ のとき

$$-\frac{1}{x}\leqq\frac{\cos x}{x}\leqq\frac{1}{x}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

(2)　$0\leqq\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq 1$ より

$0\leqq|x^2|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$　　すなわち　$0\leqq\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to0}|x^2|=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|=0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(3)　$[x]\leqq x<[x]+1$ であるから　　$x-1<[x]\leqq x$

ゆえに　　$2x-1<x+[x]\leqq 2x$

$x>0$ のとき　　$\dfrac{2x-1}{x+1}<\dfrac{x+[x]}{x+1}\leqq\dfrac{2x}{x+1}$

ここで　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}}=2$$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+[x]}{x+1}=2$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\sqrt{e}$　　(2)　e^3　　(3)　$\dfrac{1}{e^4}$　　(4)　5

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

(2)　$\dfrac{3}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow+0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to+0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^3=e^3$

(3)　$-x=t$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき $t\longrightarrow0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{4}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{4}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-4}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+5)-\log x\}=\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x+5}{x}=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

$\dfrac{5}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow+0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=\lim_{t\to+0}\log(1+t)^{\frac{5}{t}}=\lim_{t\to+0}\log\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^5=\log e^5=5$

$\boxed{1}$

解答　(1)　-1　　(2)　2　　(3)　2　　(4)　-1

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-5^x}{3^x+5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}=-1$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^2-x+1}{x^2+2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\log_2 4=2$$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(x-\sqrt{x^2-4})=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-\sqrt{x^2-4})(x+\sqrt{x^2-4})}{x+\sqrt{x^2-4}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\{x^2-(x^2-4)\}}{x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=2$$

(4)　$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　　$t\longrightarrow\infty$

したがって

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+t+1})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}$$

$$=-1$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$a=-3$　　(3)　(ア)　$\dfrac{3}{2}$　　(イ)　-1

解説

(1)　$\displaystyle\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{x^3}\left\{1+2x-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{x^3}\left\{1+2x-\left(1+2x-x^3+\frac{x^4}{4}\right)\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$=\left(-\frac{x}{4}+1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-(ax+1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+1-(ax+1)^2}{x(\sqrt{x^2+1}+ax+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)x^2-2ax}{x(\sqrt{x^2+1}+ax+1)}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)x-2a}{\sqrt{x^2+1}+ax+1}$

$\displaystyle=\frac{0-2a}{1+0+1}=-a$

よって　$-a=3$　　ゆえに　$a=-3$

(3) （ア） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x a-2^{-x}}{2^{x+1}-2^{-x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a-\frac{1}{2^{2x}}}{2-\frac{1}{2^{2x+1}}}=\frac{a}{2}$

よって　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{4}$　　ゆえに　$a=\dfrac{3}{2}$

（イ） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\log_{\frac{3}{2}}(2x)-\log_{\frac{3}{2}}(3x+2)\right\}=\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{3}{2}}\frac{2x}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{3}{2}}\frac{2}{3+\frac{2}{x}}$

$\displaystyle=\log_{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=-1$

$\boxed{3}$

解答 (1) 極限はない　(2) 極限はない　(3) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{x}{(x-2)^3}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{x}{(x-2)^3}=-\infty$

よって，極限はない。

(2) $x>1$　のとき　$\log_{0.5}x<0$

$0<x<1$ のとき　$\log_{0.5}x>0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{\log_{0.5}x}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\log_{0.5}x}=\infty$

よって，極限はない。

(3) $\dfrac{3}{2}\leqq x<2$ のとき　$[2x]-[x]=3-1=2$

$2\leqq x<\dfrac{5}{2}$ のとき　$[2x]-[x]=4-2=2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2}([2x]-[x])=2$

$\boxed{4}$

解答　$f(x)=2x^2+14x+24$

解説

[1] から，$f(x)$ は 2 次式である。

[2] から，$f(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

よって，$f(x)=(x+3)(ax+b)$ $(a\neq0)$ とおける。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(ax+b)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)\left(a+\frac{b}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}=a$

よって，[1] が成り立つのは，$a=2$ のときである。

($a=2$ は $a\neq0$ を満たす。)

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{2x+b}{x+1}=-\frac{b-6}{2}$

よって，$-\dfrac{b-6}{2}=-1$ のとき [2] が成り立つから　$b=8$

したがって　$f(x)=(x+3)(2x+8)=2x^2+14x+24$

$\boxed{5}$

解答　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$，$c=1$

解説

等式を変形すると　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-a\sin^2x+(3b+2)\sin x-a+b+1}{\sin^3x-a\sin^2x}=c$　…… ①

この等式において，$\displaystyle\lim_{x\to0}(\sin^3x-a\sin^2x)=0$　であるから

$\displaystyle\lim_{x\to0}\{-a\sin^2x+(3b+2)\sin x-a+b+1\}=0$　すなわち　$b=a-1$　…… ②

このとき，① は　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-a\sin x+3a-1}{\sin^2x-a\sin x}=c$　…… ③

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to0}(\sin^2x-a\sin x)=0$　であるから

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-a\sin x+3a-1)=0$　すなわち　$3a-1=0$

よって　$a=\dfrac{1}{3}$　　② から　$b=-\dfrac{2}{3}$　　このとき，③ から　$c=1$

以上から　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$，$c=1$

$\boxed{6}$

解答 (1) 3　(2) ともに 0

解説

(1) 不等式 $[3x]\leqq3x<[3x]+1$ が成り立つ。

よって，$x>0$ のとき

$\dfrac{[3x]}{x}\leqq3<\dfrac{[3x]}{x}+\dfrac{1}{x}$ となるから　$3-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[3x]}{x}\leqq3$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=3$

(2) $x>1$ のとき　$0<\log\sqrt{x}<\sqrt{x}$

すなわち　$0<\dfrac{1}{2}\log x<\sqrt{x}$

ゆえに　$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

次に $x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\log\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+0}(-t\log t)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$

$\boxed{1}$

解答　1

解説

記号 [　] の性質から　$\sqrt{x+x^2}-1<[\sqrt{x+x^2}]\leqq\sqrt{x+x^2}$　…… ①

$x\longrightarrow\infty$ であるから $x>0$ とする。① から

$$\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}<\frac{[\sqrt{x+x^2}]-\sqrt{x}}{x}\leqq\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=1$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$

$=1-0=1$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{x+x^2}]-\sqrt{x}}{x}=1$

$\boxed{2}$

解答 （ア） $\sqrt{e}$　（イ） 3

解説

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}={}^{ア}\sqrt{e}$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-1)^2\log\left\{1+\frac{3}{4n(n-1)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\log\left\{1+\frac{3}{4n(n-1)}\right\}^{\frac{4n(n-1)}{3}\cdot\frac{3(2n-1)^2}{4n(n-1)}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\log\left[\left\{1+\frac{3}{4n(n-1)}\right\}^{\frac{4n(n-1)}{3}}\right]^{\frac{12-\frac{12}{n}+\frac{3}{n^2}}{4-\frac{4}{n}}}=\log e^{\frac{12}{4}}={}^{イ}3$

$\boxed{3}$

解答　$a=-2p-\dfrac{1}{(p+1)^2}$，$b=p^2+\dfrac{2p+1}{(p+1)^2}$，極限値は $1-\dfrac{1}{(p+1)^3}$

解説

$\displaystyle\lim_{x\to p}(x-p)^2=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to p}\{f(x)-g(x)\}=0$ であること，すなわち $f(p)=g(p)$ であることが必要である。

$f(p)=g(p)$ から　$p^2+ap+b=\dfrac{1}{p+1}$

よって　$b=-p^2-ap+\dfrac{1}{p+1}$　…… ①

また　$f(x)-g(x)=x^2+ax-p^2-ap+\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{1}{x+1}$

$=(x+p)(x-p)+a(x-p)+\dfrac{x-p}{(p+1)(x+1)}$

から　$\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)-g(x)}{(x-p)^2}=\lim_{x\to p}\frac{x+p+a+\frac{1}{(p+1)(x+1)}}{x-p}$　…… ②

$\displaystyle\lim_{x\to p}(x-p)=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to p}\left\{x+p+a+\frac{1}{(p+1)(x+1)}\right\}=0$ であることが必要条件。

よって　$2p+a+\dfrac{1}{(p+1)^2}=0$　　ゆえに　$a=-2p-\dfrac{1}{(p+1)^2}$　…… ③

②，③ から　$\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)-g(x)}{(x-p)^2}=\lim_{x\to p}\frac{x-p+\frac{1}{(p+1)(x+1)}-\frac{1}{(p+1)^2}}{x-p}$

$$= \lim_{x \to p} \frac{x - p - \dfrac{x-p}{(p+1)^2(x+1)}}{x-p}$$

$$= \lim_{x \to p} \left\{1 - \frac{1}{(p+1)^2(x+1)}\right\} = 1 - \frac{1}{(p+1)^3}$$

①，③ から　$b = -p^2 + 2p^2 + \dfrac{p}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p+1} = p^2 + \dfrac{2p+1}{(p+1)^2}$

したがって　$a = -2p - \dfrac{1}{(p+1)^2}$，$b = p^2 + \dfrac{2p+1}{(p+1)^2}$

このとき，極限値は　$1 - \dfrac{1}{(p+1)^3}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$k = \dfrac{1}{2}(\tan\alpha - \cos\alpha)$　(2)　$S(k) = \dfrac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) + \dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha + \cos^3\beta)$

(3)　$\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1)　$y = x^2 + 2kx$　……①

$x^2 + y^2 = 1$　……②　とする。

Ｐは曲線②上にあるから，Ｐの座標は

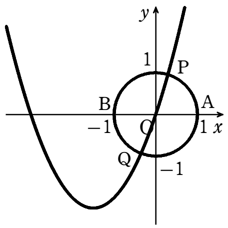
Ｐ$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

Ｐは曲線①上にあるから

$\sin\alpha = \cos^2\alpha + 2k\cos\alpha$

$\cos\alpha \neq 0$ であるから

$k = \dfrac{\sin\alpha - \cos^2\alpha}{2\cos\alpha} = \dfrac{1}{2}(\tan\alpha - \cos\alpha)$



(2)　$\overset{\frown}{\mathrm{PBQ}}$ の中心角は　$\angle \mathrm{POQ} = \pi - \alpha + \beta$

ゆえに，Ｂを含む扇形 POQ の面積は

$\dfrac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (\pi - \alpha + \beta) = \dfrac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta)$

直線 OP と放物線①で囲まれる部分の面積は

$\displaystyle\int_0^{\cos\alpha} \{\tan\alpha \cdot x - (x^2 + 2kx)\}dx = \frac{1}{6}\cos^3\alpha$

Ｑの座標は $(\cos(\pi+\beta),\ \sin(\pi+\beta))$　すなわち　Ｑ$(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$

ゆえに，直線 OQ と放物線①で囲まれる部分の面積は

$\displaystyle\int_{-\cos\beta}^{0} \{\tan\beta \cdot x - (x^2 + 2kx)\}dx = \frac{1}{6}\cos^3\beta$

よって　$S(k) = \dfrac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) + \dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha + \cos^3\beta)$

(3)　(1) の結果から　$k = \dfrac{1}{2}(\tan\alpha - \cos\alpha)$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$k \longrightarrow \infty$ のとき　$\alpha \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

また，Ｑは①上にあるから　$-\sin\beta = \cos^2\beta - 2k\cos\beta$

$\cos\beta \neq 0$ であるから　$k = \dfrac{\sin\beta + \cos^2\beta}{2\cos\beta} = \dfrac{1}{2}(\tan\beta + \cos\beta)$

$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$k \longrightarrow \infty$ のとき　$\beta \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

よって　$\displaystyle\lim_{k \to \infty} S(k) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} + \cos^3\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

1

解答　(1)　4　　(2)　3　　(3)　2　　(4)　2

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to0}4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot1=4$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{6}{2}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{6}{2}\cdot1\cdot1=3$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x}=\lim_{x\to0}2\sin x\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}2\cos^2 x=2$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x)=1^2\cdot(1+1)=2$

2

解答　(1)　1　　(2)　-1　　(3)　2

解説

(1)　$\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

(2)　$x-\pi=t$ とおくと，$x\longrightarrow\pi$ のとき　$t\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1$

(3)　$x-\pi=t$ とおくと　$x\longrightarrow\pi$ のとき　$t\longrightarrow0$

また　$1+\cos x=1+\cos(t+\pi)=1-\cos t$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{1-\cos t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2(1+\cos t)=1^2\cdot2=2$

3

解答　$\dfrac{1}{8}$

解説

ODは∠AOBの二等分線であるから　$\angle\mathrm{AOD}=\theta$

$\mathrm{AB}\perp\mathrm{OC}$ より，$\mathrm{OD}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$ であるから　$\mathrm{CD}=\mathrm{OC}-\mathrm{OD}=1-\cos\theta$

また　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=2\theta$

したがって，求める極限は

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\mathrm{CD}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}{}^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{(2\theta)^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{4\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}=\frac{1}{4}\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

4

解答　(1)　連続　　(2)　連続　　(3)　不連続

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$

また　$f(0)=0$　　ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

よって，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}f(x)=-1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=-1$

また　$f(-1)=-1$　　ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

よって，$f(x)$ は $x=-1$ で連続である。

(3)　$0<x<1$　すなわち　$-1<-x<0$ のとき　$[-x]=-1$

$-1<x<0$　すなわち　$0<-x<1$ のとき　$[-x]=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=0$

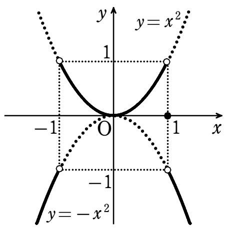
よって，$x\longrightarrow0$ のときの極限はない。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で不連続である。

5

解答　[図]

連続な区間は　$x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$



解説

[1]　$|x|<1$　すなわち　$-1<x<1$ のとき　$y=\dfrac{x^2(1-0)}{1+0}=x^2$

[2]　$x=1$ のとき　$y=\dfrac{1^2(1-1)}{1+1}=0$

[3]　$x=-1$ のとき　$\dfrac{x^2(1-x^n)}{1+x^n}=\dfrac{(-1)^2\{1-(-1)^n\}}{1+(-1)^n}=\dfrac{1-(-1)^n}{1+(-1)^n}=\dfrac{2}{1+(-1)^n}-1$

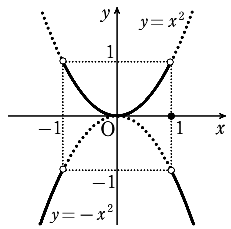
この極限は振動するから，y の値はない。

[4]　$|x|>1$　すなわち　$x<-1$，$1<x$ のとき

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\left(\dfrac{1}{x^n}-1\right)}{\dfrac{1}{x^n}+1}=-x^2$$

したがって，求めるグラフは右の図の実線部分のようになる。

また，連続な区間は　$x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$



6

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(x)=x-2\sin x-3$ とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ \pi]$ で連続である。

また　$f(0)=-3<0$，$f(\pi)=\pi-3>0$

よって，方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\pi$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

(2)　$f(x)=x-3^{-x}$ とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ 1]$ で連続である。

また　$f(0)=-1<0$，$f(1)=\dfrac{2}{3}>0$

よって，方程式 $f(x)=0$ は $0<x<1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

7

解答　略

解説

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。

$f(x)$，$g(x)$ はともに $a\leqq x\leqq b$ で連続であるから，$h(x)=f(x)-g(x)$ も $a\leqq x\leqq b$ で連続である。

また　$h(a)=f(a)-g(a)>0$　　$h(b)=f(b)-g(b)<0$

よって，方程式 $h(x)=0$　すなわち　$f(x)=g(x)$ は中間値の定理により，$a<x<b$ に実数解をもつ。

1

解答　(1) 0　(2) $\dfrac{4}{3}$　(3) $\dfrac{2}{5}$　(4) 2　(5) 2　(6) $-\dfrac{1}{6}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\sin 0=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4}{3}=1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

別解　$4x=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow 0$ のとき　$\theta\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\frac{3}{4}\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{4}{3}=1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}=1\cdot 1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\cdot\frac{1}{\cos 2x}=1\cdot 2\cdot\frac{1}{1}=2$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot(1+\cos x)=1\cdot 2=2$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{3x^2(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{3x^2(\cos x+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{\cos x+1}=1^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{6}$$

2

解答　(1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) $-\pi$　(3) -1　(4) 1　(5) $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$t\longrightarrow 0$

また　$\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$，$2x-\pi=2t$

よって，求める極限値は　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2t}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}=-\frac{1}{2}$

(2) $x-1=t$ とおくと　$x\longrightarrow 1$ のとき　$t\longrightarrow 0$

また　$\sin\pi x=\sin\pi(t+1)=-\sin\pi t$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)\cdot\pi=-1\cdot\pi=-\pi$

(3) $x-\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと　$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{\theta\to 0}\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{\theta}{\tan\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\right)=-1\cdot 1=-1$$

(4) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow +0$

$$\lim_{x\to\infty}(x-1)\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to +0}\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\sin\theta=\lim_{\theta\to +0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}-\sin\theta\right)$$

$$=1-0=1$$

(5) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow +0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to +0}\frac{1}{t^2}(1-\cos t)=\lim_{t\to +0}\frac{\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)}$

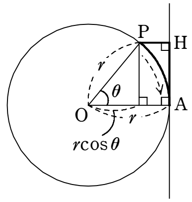
$$=\lim_{t\to +0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos t}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3

解答　$\dfrac{1}{2r}$

解説

P が A に近づくことは $\theta\longrightarrow 0$ で表され，θ が鋭角のときを考えると



$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=r\theta$

$\mathrm{PH}=\mathrm{OA}-r\cos\theta=r(1-\cos\theta)$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{PH}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}=\dfrac{r(1-\cos\theta)}{r^2\theta^2}$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{r\theta^2(1+\cos\theta)}=\frac{\sin^2\theta}{r\theta^2(1+\cos\theta)}$$

よって，求める極限は

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{PH}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{\theta\to 0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{r(1+\cos\theta)}\right\}=1^2\cdot\frac{1}{r(1+1)}=\frac{1}{2r}$$

4

解答　(1) 連続　(2) 連続　(3) 不連続　(4) 不連続

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$，$f(0)=0$ より　$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to -1}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to -1}(-1)=-1$

また　$f(-1)=-1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$

したがって，$f(x)$ は $x=-1$ で連続である。

(3) $-1<x<0$ のとき，$[x]=-1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to -0}f(x)=-1$

$0<x<1$ のとき，$[x]=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=0$

よって，$x\longrightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で不連続である。

(4) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき，$0<\sin x<1$ であるから　$[\sin x]=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f(x)=0$

すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=0$

また　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

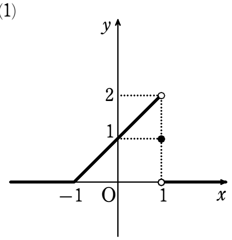
よって　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で不連続である。

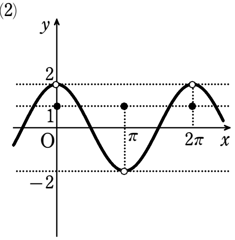
5

解答　(1) [図]，$x=1$ で不連続　(2) [図]，$x=m\pi$ (m は整数) で不連続

(1)



(2)



解説

(1) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$

[1] $x^2<1$ すなわち $-1<x<1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるから　$f(x)=\dfrac{1+x}{1+0}=1+x$

[2] $x^2=1$ すなわち $x=\pm 1$ のとき　$x^{2n}=1$

よって，$x=1$ のとき　$f(x)=\dfrac{1+1}{1+1}=1$

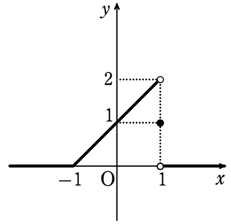
$x=-1$ のとき　$f(x)=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

[3] $x^2>1$ すなわち $x<-1$，$1<x$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$ であるから　$f(x)=0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは[図]のようになる。

また，$f(x)$ が不連続である x の値は　$x=1$



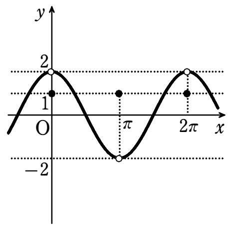
(2) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2x+\frac{1}{n}}{\sin x+\frac{1}{n}}$

[1] $\sin x\neq 0$ すなわち $x\neq m\pi$ (m は整数)のとき

$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2\cos x$

[2] $\sin x=0$ すなわち $x=m\pi$ のとき

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}1=1$



よって，$y=f(x)$ のグラフは[図]のようになる。

また，$f(x)$ が不連続である x の値は　$x=m\pi$　(m は整数)

6

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) $f(x)=x^4-5x+2$ とすると，$f(x)$ は区間 $[0,\ 1]$ で連続で

$f(0)=0-0+2=2>0$，$f(1)=1-5+2=-2<0$

よって，方程式 $f(x)=0$ は $0<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

(2) $f(x)=x-6\cos x$ とすると，$f(x)$ は区間 $\left[-\dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{\pi}{3}\right]$，$\left[-\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right]$ で連続で

$$f\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{9-2\pi}{3}>0,\ f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\left(\frac{\pi}{3}+3\right)<0,\ f(\pi)=\pi+6>0$$

よって，方程式 $f(x)=0$ は $-\frac{2}{3}\pi<x<-\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}<x<\pi$ の範囲に，それぞれ実数解をもつ。

$\boxed{7}$

解答　略

解説

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。

関数 $f(x)$，$g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続であるから，$h(x)$ も区間 $[a,\ b]$ で連続である。

$f(x)$ が $x=x_1$ で最大，$x=x_2$ で最小であるとする。

$g(x)$ が $x=x_3$ で最大，$x=x_4$ で最小であるとする。

条件から　$f(x_1)>g(x_3)$，$f(x_2)<g(x_4)$

一方，$g(x_3)$ は最大値であるから　$g(x_3)\geqq g(x_1)$

$g(x_4)$ は最小値であるから　$g(x_4)\leqq g(x_2)$

以上より　$f(x_1)>g(x_3)\geqq g(x_1)$，$f(x_2)<g(x_4)\leqq g(x_2)$

よって　$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)>0$，$h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)<0$

したがって，方程式 $h(x)=0$ は x_1 と x_2 の間に解をもつ。

$a\leqq x_1\leqq b$，$a\leqq x_2\leqq b$ であるから，方程式 $h(x)=0$ すなわち $f(x)=g(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ の範囲に解をもつ。

$\boxed{1}$

解答　(1) $\frac{\pi}{180}$　(2) 1　(3) -1　(4) $\frac{1}{4}$　(5) $\frac{9}{2}$

解説

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\frac{\pi}{180}}{\cos\frac{\pi}{180}x}=\frac{\pi}{180}$$

(2) $\sin x=t$ とおくと，$x\longrightarrow0$ のとき　$t\longrightarrow0$

よって　$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(3) $x-\pi=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\pi$ のとき　$\theta\longrightarrow0$

よって　$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(\theta+\pi)}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\left(-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=-1$$

(4) $\frac{1}{4x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow+0$

$x=\frac{1}{4\theta}$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{4x}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4\theta}\sin\theta=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{1}{4}$$

(5) $$\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos3\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos3\theta)(1+\cos3\theta)}{\theta^2(1+\cos3\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^2 3\theta}{\theta^2(1+\cos3\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2 3\theta}{\theta^2(1+\cos3\theta)}=\lim_{\theta\to0}9\cdot\left(\frac{\sin3\theta}{3\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos3\theta}$$
$$=9\cdot1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{9}{2}$$

$\boxed{2}$

解答　$a=-\frac{1}{2}$，$b=0$

解説

$$\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つとする。$\lim_{x\to0}(\cos x-1)=0$ であるから

$$\lim_{x\to0}(ax\sin x+b)=0\qquad すなわち\qquad b=0$$

このとき　$$\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{(-a)\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot(\cos x+1)\right\}=-2a$$

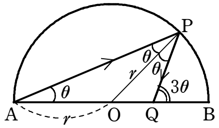
よって，$-2a=1$ のとき ① が成り立つから　$a=-\frac{1}{2}$

したがって　$a=-\frac{1}{2}$，$b=0$

$\boxed{3}$

解答　線分 OB を $1:2$ に内分する点に近づく

解説



図において　$\angle OPQ=\angle APO=\angle PAO=\theta$

よって　$\angle PQB=\angle PAQ+\angle APQ=3\theta$

$\triangle OPQ$ において，正弦定理により

$$\frac{OQ}{\sin\theta}=\frac{OP}{\sin(\pi-3\theta)}$$

よって　$OQ=\frac{r\sin\theta}{\sin3\theta}$

P が限りなく B に近づくとき，$\theta\longrightarrow+0$ であり

$$\lim_{\theta\to+0}OQ=\lim_{\theta\to+0}r\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin3\theta}\cdot\frac{1}{3}=r\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{r}{3}$$

したがって，Q は線分 OB を $1:2$ に内分する点に近づく。

$\boxed{4}$

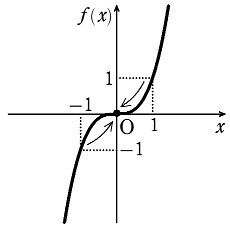
解答　(1) 連続　(2) 不連続　(3) 不連続

解説

(1) $\lim_{x\to0}f(x)=0$，$f(0)=0$ から

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

よって，関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

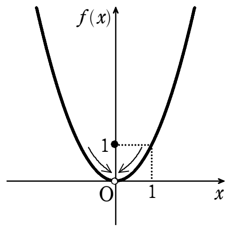


(2) この関数のグラフは右図のようになり，$x=0$ で切れている。

$$\lim_{x\to0}f(x)=0,\ f(0)=1$$

ゆえに　$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

よって，関数 $f(x)$ は $x=0$ で不連続である。



(3) $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$，$x\neq0$ とすると

$0\leqq\cos x<1$

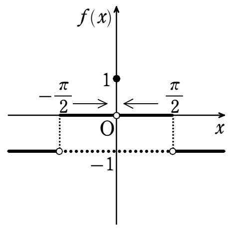
よって　$[\cos x]=0$

ゆえに　$\lim_{x\to0}[\cos x]=0$

また　$f(0)=[1]=1$

よって　$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

したがって，関数 $f(x)$ は $x=0$ で不連続である。



$\boxed{5}$

解答　$a=\frac{9}{2}$

解説

$$\frac{1-\cos3x}{x^2}=\frac{(1-\cos3x)(1+\cos3x)}{x^2(1+\cos3x)}=\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}=\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}$$

よって　$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{3^2}{1+\cos3x}\right\}=1^2\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

また　$f(0)=a$

$f(x)$ が $x=0$ において連続であるとき，$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ であるから　$a=\dfrac{9}{2}$

6

解答　$a=1$，$b=-1$

解説

[1]　$-1<x<1$ のとき　$f(x)=\dfrac{0-0+ax^2+bx}{0+1}=ax^2+bx$

[2]　$x<-1$，$1<x$ のとき　$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=1-\dfrac{1}{x}$

[3]　$x=1$ のとき　$f(1)=\dfrac{a+b}{2}$

[4]　$x=-1$ のとき　$f(-1)=\dfrac{2+a-b}{2}$

$f(x)$ は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ で，それぞれ連続であるから，$f(x)$ がすべての実数 x で連続であるための条件は，$f(x)$ が $x=\pm 1$ で連続であることである。

よって　$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1+0} f(x)=f(-1)$　かつ　$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$

ゆえに　$2=a-b=\dfrac{2+a-b}{2}$　かつ　$a+b=0=\dfrac{a+b}{2}$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$

1

解答　$a=4$，$b=-1$，極限値 $-\dfrac{15}{8}$

解説

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}=P$ とおく。

$\lim_{x\to 0} x^2=0$ であるから，P が有限の値となるためには

$$\lim_{x\to 0}\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)\}=0$$

よって，$\sqrt{9+7}-a=0$　すなわち　$a=4$ であることが必要である。

このとき　$P=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{9-8x+7\cos 2x-(4+bx)^2}{x^2(\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-b^2-8\cdot\dfrac{b+1}{x}-7\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx}\quad\cdots\cdots①$$

ここで　$\lim_{x\to 0}\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx\}=\sqrt{9+7}+4=8$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=2$ であることに注意すると，P が有限の値となるための条件は $\lim_{x\to 0}\dfrac{b+1}{x}$ が有限の値に収束することで，$b=-1$ である。

このとき，①から　$P=\dfrac{-(-1)^2-0-7\cdot 2}{8}=-\dfrac{15}{8}$

以上から　$a=4$，$b=-1$，極限値 $-\dfrac{15}{8}$

2

解答　(1)　$(t\sqrt{1+\sin^2 t}\,,\ 0)$　(2)　$\left(0,\ \dfrac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t+\sqrt{1+\sin^2 t})\right)$

(3)　点 $(0,\ 2)$

解説

(1)　$t>0$ であるから　$\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}=\sqrt{t^2+(t\sin t)^2}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$

よって　$\mathrm{Q}\,(t\sqrt{1+\sin^2 t}\,,\ 0)$

(2)　直線 PQ の方程式 $y=\dfrac{t\sin t}{t-t\sqrt{1+\sin^2 t}}(x-t\sqrt{1+\sin^2 t})$ において，$x=0$ とすると

$$y=\frac{-t^2\sin t\sqrt{1+\sin^2 t}}{t(1-\sqrt{1+\sin^2 t})}=\frac{-t^2\sin t\sqrt{1+\sin^2 t}\,(1+\sqrt{1+\sin^2 t})}{t\{1-(1+\sin^2 t)\}}$$

$$=\frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t+\sqrt{1+\sin^2 t})$$

よって　$\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t+\sqrt{1+\sin^2 t})\right)$

(3)　点 P が原点 O に限りなく近づくとき，$t\to +0$ であり

$$\lim_{t\to +0}\frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t+\sqrt{1+\sin^2 t})=1\cdot(1+0+1)=2$$

したがって，点 R は点 $(0,\ 2)$ に近づく。

3

解答　(1)　略　(2)　$\dfrac{2}{\pi}$

解説

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ とおくと　$a_n=\tan\theta$，$a_{n+1}=\tan\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)=\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\tan\theta=\tan\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$ であるから　$a_n=\dfrac{2a_{n+1}}{1-a_{n+1}{}^2}$

逆数をとって　$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1-a_{n+1}{}^2}{2a_{n+1}}$　ゆえに　$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2a_{n+1}}-\dfrac{a_{n+1}}{2}$

よって　$\dfrac{a_{n+1}}{2}=\dfrac{1}{2a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$　すなわち　$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{2}{a_n}$

(2)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$ とおくと，(1) から

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}a_k=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}a_k+\frac{1}{2}a_1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{2}{a_{k-1}}\right)+\frac{1}{2}a_1$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2^k a_k}-\frac{1}{2^{k-1}a_{k-1}}\right)+\frac{1}{2}a_1=\left(\frac{1}{2^n a_n}-\frac{1}{2a_1}\right)+\frac{1}{2}a_1$$

$$=\frac{1}{2^n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}-\frac{1}{2\tan\dfrac{\pi}{2^2}}+\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{2^2}$$

$$=\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$n\longrightarrow\infty$ のとき $\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\longrightarrow 0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=1$

よって　$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}S_n=1\cdot\dfrac{2}{\pi}\cdot 1=\dfrac{2}{\pi}$

4

解答　(1)　k は偶数である　(2)　略

解説

(1)　$\sum_{n=1}^{\infty}\{(\cos x)^{n-1}-(\cos x)^{n+k-1}\}=\{1-(\cos x)^k\}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos x)^{n-1}$

初項 $1-(\cos x)^k$，公比 $\cos x$ の無限等比級数だから，収束する条件は

$$1-(\cos x)^k=0 \text{ または } -1<\cos x<1$$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから，$\cos x=\pm 1$ のとき $1-(\cos x)^k=0$ となる条件は，k が偶数であることである．答

(2)　$\cos x\neq 1$ のとき．

$x\neq 0$ で $f(x)=(1-\cos^k x)\sum_{k=1}^{\infty}\cos^{n-1}x=\dfrac{1-\cos^k x}{1-\cos x}=1+\cos x+\cdots\cdots+\cos^{k-1}x$

よって　$\lim_{x\to 0}f(x)=k>0$

一方　$f(0)=0$　ゆえに　$\lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$

よって，$x=0$ において $f(x)$ は連続でない．

5

解答　(1)　[略]　(2)　[略]　(3)　$-\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$y=x^3+ax^2+(a-3)x-1=x^3-3x-1+x(x+1)a$ から任意の a に対して $y=x^3-3x-1$, $x(x+1)=0$ が成り立つ．したがって $(0,\ -1)$, $(-1,\ 1)$ を通る．

(2)　$f(x)=x^3+ax^2+(a-3)x-1$ より $f'(x)=3x^2+2ax+a-3$

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=a^2-3a+9=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>0$ で

$y=f(x)$ は極大値と極小値をもつ．ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$f(-1)>0$，$f(0)<0$，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ であるから $f(x)=0$ は３つの異なる実数解をもつ．

(3)　$3x^2+2ax+a-3=0$ を解くと $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-3a+9}}{3}$

$x(a)=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-3a+9}}{3}$ から

$$\lim_{a\to\infty}x(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{-a+\sqrt{a^2-3a+9}}{3}=\lim_{a\to\infty}\frac{-3a+9}{3(\sqrt{a^2-3a+9}+a)}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{-a+3}{\sqrt{a^2-3a+9}+a}=\lim_{a\to\infty}\frac{-1+\dfrac{3}{a}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{a^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

1

解答　3

解説

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\left\{(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right\}}=\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\left\{(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right\}\left\{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right\}}$$

$$=\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\{(n+1)-n\}}=\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}+1$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}+1$$

よって　(与式)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right\}=1+1+1=3$

2

解答　(1)　$a_2=6$，$a_3=12$，$a_4=20$　　(2)　$a_n=n(n+1)$　　(3)　1

解説

(1)　$(a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n)$ から

$a_{n+1}{}^2-2(a_n+1)a_{n+1}+a_n{}^2-2a_n=0$

ゆえに　$a_{n+1}=a_n+1\pm\sqrt{4a_n+1}$

また，$a_1=2$，$a_{n+1}>a_n$ であるから

$a_{n+1}=a_n+1+\sqrt{4a_n+1}$ ……①

よって　$a_2=6$，$a_3=12$，$a_4=20$

(2)　$a_1=2=1\cdot2$，$a_2=6=2\cdot3$，$a_3=12=3\cdot4$，$a_4=20=4\cdot5$ であるから，$a_n=n(n+1)$ と推測できる．これを数学的帰納法で証明する．

[1]　$n=1$ のとき　$a_1=2$ で成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき　$a_k=k(k+1)$ と仮定すると

①から　$a_{k+1}=k(k+1)+1+\sqrt{4k(k+1)+1}$
$=k(k+1)+1+(2k+1)$
$=(k+1)(k+2)$

となり，$n=k+1$ のときも成り立つ．

[1]，[2]から，すべての自然数 n に対して，$a_n=n(n+1)$ が成り立つ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{n(n+1)}\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\}$$

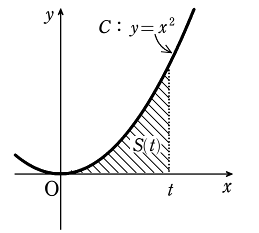
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}\times\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=1$$

3

解答　(1)　$a_n=2^n$　　(2)　$T_n=\dfrac{8^n}{3}$　　(3)　$\dfrac{1}{21}$

解説



(1)　$S(t)=\displaystyle\int_0^t x^2dx=\frac{1}{3}t^3$

$S(a_{n+1})=8S(a_n)$ から　　$\dfrac{1}{3}a_{n+1}{}^3=8\cdot\dfrac{1}{3}a_n{}^3$

よって　$a_{n+1}{}^3=8a_n{}^3$

ゆえに

$a_{n+1}{}^3-8a_n{}^3=a_{n+1}{}^3-(2a_n)^3$
$=(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}{}^2+2a_{n+1}a_n+4a_n{}^2)$
$=0$

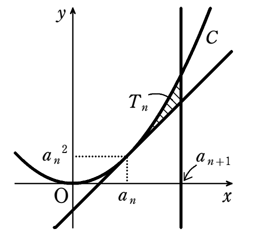
$a_{n+1}>a_n>0$ であるから　　$a_{n+1}=2a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=2$，公比２の等比数列であるから　　$a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$

(2)　$C:y=x^2$ について，$y'=2x$ から，C 上の点 $(a_n,\ a_n{}^2)$ における接線の方程式は

$y-a_n{}^2=2a_n(x-a_n)$　　　ゆえに　　$y=2a_nx-a_n{}^2$

よって



$$T_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}\{x^2-(2a_nx-a_n{}^2)\}dx=\int_{a_n}^{a_{n+1}}(x-a_n)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x-a_n)^3}{3}\right]_{a_n}^{a_{n+1}}=\frac{(a_{n+1}-a_n)^3}{3}=\frac{(2a_n-a_n)^3}{3}$$

$$=\frac{a_n{}^3}{3}=\frac{(2^n)^3}{3}=\frac{8^n}{3}$$

(3)　$U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}T_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{8^k}{3}=\frac{8}{3}\cdot\frac{8^n-1}{8-1}=\frac{8^{n+1}-8}{21}$

よって　$\dfrac{U_{n-1}}{a_n{}^3}=\dfrac{8^n-8}{21}\cdot\dfrac{1}{(2^n)^3}=\dfrac{1}{21}\cdot\dfrac{8^n-8}{8^n}=\dfrac{1}{21}\left(1-\dfrac{1}{8^{n-1}}\right)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n-1}}{a_n{}^3}=\frac{1}{21}$

4

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$1+\sqrt{2}$

解説

(1)　$f(x)=x$ より　　$\sqrt{2x+1}=x$

よって　　$x\geqq0$　かつ　$2x+1=x^2$

$2x+1=x^2$ を解くと　　$x=1\pm\sqrt{2}$　　　　$x\geqq0$ より　　$x=1+\sqrt{2}$

よって　　$\alpha=1+\sqrt{2}$

すべての自然数 n に対して，$a_n>\alpha$ ……① が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=3=1+2>1+\sqrt{2}=\alpha$

よって，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$a_k>\alpha$

$f(x)$ は単調に増加する関数であるから，$a_k>\alpha$ より　　$f(a_k)>f(\alpha)$

$f(\alpha)=\alpha$ であるから　　$a_{k+1}>\alpha$

よって，$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n に対して $a_n>\alpha$ が成り立つ。

(2)　$a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-f(\alpha)=\sqrt{2a_n+1}-\sqrt{2\alpha+1}$

$$=\frac{(2a_n+1)-(2\alpha+1)}{\sqrt{2a_n+1}+\sqrt{2\alpha+1}}=\frac{2(a_n-\alpha)}{\sqrt{2a_n+1}+\sqrt{2\alpha+1}}$$

(1) より，$a_n>\alpha$ であるから

$$a_{n+1}-\alpha<\frac{2(a_n-\alpha)}{\sqrt{2\alpha+1}+\sqrt{2\alpha+1}}=\frac{a_n-\alpha}{\sqrt{2\alpha+1}}$$

ここで　$\sqrt{2\alpha+1}=\alpha=1+\sqrt{2}>1+1=2$

$a_n-\alpha>0$ より　$a_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$

(3)　(2) より，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n-\alpha<\frac{1}{2}(a_{n-1}-\alpha)<\left(\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-2}-\alpha)<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\alpha)$$

(1) と合わせると，$n\geqq 2$ のとき　$0<a_n-\alpha<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\alpha)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\alpha)=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

したがって，数列 $\{a_n\}$ は収束し，その極限値は $\alpha=1+\sqrt{2}$ である。

5

解答　$\log 2$

解説

[1]　$n=2m$ のとき

$$S_{2m}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots\cdots+(b_{2m-1}+b_{2m})$$
$$=\sum_{l=1}^{m}(b_{2l-1}+b_{2l})=\sum_{l=1}^{m}\left(\log\frac{2l+1}{2l-1}-\log\frac{2l+2}{2l}\right)$$
$$=\sum_{l=1}^{m}[\{\log(2l+1)-\log(2l-1)\}+\{\log 2l-\log(2l+2)\}]$$
$$=\log(2m+1)-\log 1+\log 2-\log(2m+2)=\log\frac{2(2m+1)}{2m+2}=\log\frac{2m+1}{m+1}$$

$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ であるから　$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\log\frac{2+\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}}=\log 2$

[2]　$n=2m-1$ のとき

$$S_{2m-1}=S_{2m}-b_{2m}=S_{2m}+\log\frac{2m+2}{2m}$$

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}+\lim_{m\to\infty}\log\frac{2m+2}{2m}=\log 2+\lim_{m\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)=\log 2$$

[1]，[2] より，$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\log 2$ であるから　$\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2$

6

解答　$-\frac{1}{a^2+1}$

解説

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{a}\cos\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{a}\right)^2\cos\pi+\left(\frac{1}{a}\right)^3\cos\frac{3}{2}\pi+\left(\frac{1}{a}\right)^4\cos 2\pi+\cdots\cdots$$

k を自然数とすると，$n=4k-3$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{2}=0$，

$n=4k-2$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{2}=-1$，

$n=4k-1$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{2}=0$，

$n=4k$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{2}=1$

よって，$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}$ とおくと

$$S_{2N}=\sum_{n=1}^{2N}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{a}\right)^{2j}(-1)^j=\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{1}{a^2}\right)^j$$
$$=\frac{-\frac{1}{a^2}\left\{1-\left(-\frac{1}{a^2}\right)^N\right\}}{1-\left(-\frac{1}{a^2}\right)}=-\frac{1}{a^2+1}\left\{1-\left(-\frac{1}{a^2}\right)^N\right\}$$

$a>1$ より，$-1<-\frac{1}{a^2}<0$ であるから　$\lim_{N\to\infty}S_{2N}=-\frac{1}{a^2+1}$

また　$\lim_{N\to\infty}S_{2N+1}=\lim_{N\to\infty}(S_{2N}+0)=-\frac{1}{a^2+1}$

ゆえに，$\lim_{N\to\infty}S_N$ は収束し，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}$ の和は　$\lim_{N\to\infty}S_N=-\frac{1}{a^2+1}$

7

解答　(1)　$1-\left(\frac{5}{6}\right)^k$　(2)　$p_n=\frac{30}{91}\left\{1-\left(\frac{125}{216}\right)^n\right\}$，$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{30}{91}$

解説

(1)　k 回以内に勝者が決まらないのは，1 回目から k 回目まで毎回 1 以外の目が出るときである。

よって，求める確率は　$1-\left(\frac{5}{6}\right)^k$

(2)　$p_n=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^7\cdot\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n-2}\cdot\frac{1}{6}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{3i-2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{36}{25}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3\right\}^i=\frac{6}{25}\cdot\frac{\frac{125}{216}\left\{1-\left(\frac{125}{216}\right)^n\right\}}{1-\frac{125}{216}}=\frac{30}{91}\left\{1-\left(\frac{125}{216}\right)^n\right\}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{30}{91}$

8

解答　$\frac{\pi}{4}\leqq\angle C<\frac{\pi}{2}$

解説

$\angle C=\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とし，$\triangle ABC$ の面積を k とする。

$\triangle CBA\backsim\triangle CAA_1$ で $CB:CA=1:\cos\theta$ から　$\triangle CBA:\triangle CAA_1=1:\cos^2\theta$

ゆえに　$\triangle CAA_1=k\cos^2\theta$

A を A_0 とすると，$n\geqq 1$ のとき $\triangle CA_nA_{n+1}\backsim\triangle CA_{n-1}A_n$ であり，その相似比は

$1:\cos\theta$

よって，$\triangle CA_nA_{n+1}=\triangle CA_{n-1}A_n\cos^2\theta$ であるから　$\triangle CA_{n-1}A_n=k\cos^{2n}\theta$

ゆえに，$\triangle CAA_1$，$\triangle CA_1A_2$，$\triangle CA_2A_3$，…… の面積の総和 S は，初項 $k\cos^2\theta$，公比 $\cos^2\theta$ の無限等比級数である。

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$|\cos^2\theta|<1$ であるから，S は収束して

$$S=\frac{k\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{k\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{k}{\tan^2\theta}$$

S が $\triangle ABC$ の面積 k を超えないことから　$\frac{k}{\tan^2\theta}\leqq k$

すなわち　$\tan^2\theta\geqq 1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta>0$ であるから　$\tan\theta\geqq 1$

よって　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq\angle C<\frac{\pi}{2}$

9

解答　(1)　$\frac{\sqrt{5}}{3}$　(2)　略　(3)　略　(4)　$\frac{3}{4}$

解説

(1)　$r=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(2)　$a_n+b_ni=\left(\frac{1+2i}{3}\right)^{n-1}$ …… ①　とする。

[1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=a_1+b_1i=1$，　(右辺)$=\left(\frac{1+2i}{3}\right)^0=1$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$a_k+b_ki=\left(\frac{1+2i}{3}\right)^{k-1}$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$a_{k+1}+b_{k+1}i=\left(\frac{1}{3}a_k-\frac{2}{3}b_k\right)+\left(\frac{2}{3}a_k+\frac{1}{3}b_k\right)i$$
$$=\frac{1}{3}(a_k+b_ki)+\frac{2}{3}i(a_k+b_ki)=\frac{1+2i}{3}(a_k+b_ki)$$
$$=\frac{1+2i}{3}\cdot\left(\frac{1+2i}{3}\right)^{k-1}=\left(\frac{1+2i}{3}\right)^k$$

よって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n で ① が成り立つ。

(3)　$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$ …… ②　とする。

[1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=1$，　(右辺)$=\frac{1-z}{1-z}=1$

よって，② は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ② が成り立つと仮定すると

$$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{k-1}=\frac{1-z^k}{1-z}$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{k-1}+z^k$$
$$=\frac{1-z^k}{1-z}+z^k=\frac{1-z^k+(1-z)z^k}{1-z}=\frac{1-z^{k+1}}{1-z}$$

よって，$n=k+1$ のときも ② が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n で ② が成り立つ。

(4) $\dfrac{1+2i}{3}=z$ とすると，$z\neq 1$ であるから，(2)，(3) より

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_ni)=\sum_{n=1}^{N}z^{n-1}=\frac{1-z^N}{1-z}$$

(1) より，$|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}<1$ であるから $\displaystyle\lim_{N\to\infty}|z^N|=\lim_{N\to\infty}|z|^N=0$

よって $\displaystyle\lim_{N\to\infty}z^N=0$

ゆえに $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_ni)=\lim_{N\to\infty}\frac{1-z^N}{1-z}=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\frac{1+2i}{3}}=\frac{3}{2(1-i)}$

$$=\frac{3+3i}{4}$$

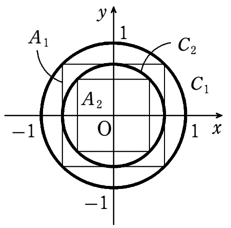
したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n=\frac{3}{4}$

10

解答 4

解説

円 C_n に内接する正方形を A_n とし，A_n をその1辺が x 軸に平行になるように作る。



円 C_n の半径を r_n とすると，正方形 A_n の1辺の長さは

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot r_n=\sqrt{2}\,r_n$$

また，正方形 A_n の1辺の長さは $2r_{n+1}$ であるから

$$2r_{n+1}=\sqrt{2}\,r_n$$

すなわち $r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r_n$

$r_1=1$ であるから，数列 $\{r_n\}$ は初項1，公比 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列である。

ゆえに $r_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

正方形 A_n の1辺の長さは $2r_{n+1}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

よって $a_n=\left\{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}^2=4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

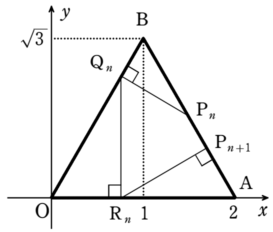
したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

11

解答 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解説

△OAB は1辺の長さが2の正三角形である。



よって，$\triangle P_nBQ_n$，$\triangle Q_nOR_n$，$\triangle R_nAP_{n+1}$ は相似な直角三角形であり，

$$P_nB:BQ_n=Q_nO:OR_n$$
$$=R_nA:AP_{n+1}=2:1$$

が成り立つ。

$AP_n=a_n$ とすると $P_nB=AB-AP_n=2-a_n$

よって $BQ_n=\dfrac{1}{2}P_nB=1-\dfrac{1}{2}a_n$

同様に考えると

$$Q_nO=2-BQ_n=1+\frac{1}{2}a_n,\quad OR_n=\frac{1}{2}Q_nO=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a_n,$$

$$R_nA=2-OR_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}a_n,\quad AP_{n+1}=\frac{1}{2}R_nA=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}a_n$$

したがって $a_{n+1}=-\dfrac{1}{8}a_n+\dfrac{3}{4}$

この漸化式を変形して $a_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(a_n-\dfrac{2}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は，初項 $a_1-\dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

よって $a_n=\left(a_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$

ここで，P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点であるから $0<a_1<2$

$\left|-\dfrac{1}{8}\right|<1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$

よって，$n\to\infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点を P とすると

$$AP=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3},\quad BP=2-AP=\frac{4}{3}$$

したがって，点 P は線分 AB を 1：2 に内分する点であるから，求める点の座標は

$\left(\dfrac{2\cdot2+1\cdot1}{1+2},\ \dfrac{2\cdot0+1\cdot\sqrt{3}}{1+2}\right)$ から $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

12

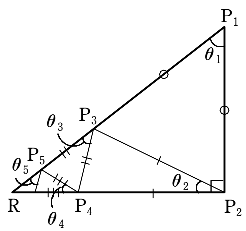
解答 (1) $\theta_2=\dfrac{\theta}{2}$，$\theta_3=\dfrac{3}{4}\theta$ (2) 略 (3) $\dfrac{2}{3}\theta$

解説

(1) $\triangle P_1P_2P_3$ は $P_1P_2=P_1P_3$ の二等辺三角形で，

$\angle P_1P_2P_3=\angle P_1P_3P_2$ であるから

$$\angle P_1P_2P_3=\frac{\pi-\theta}{2}$$



よって $\theta_2=\dfrac{\pi}{2}-\angle P_1P_2P_3=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi-\theta}{2}=\dfrac{\theta}{2}$

同様に，$\angle P_2P_3P_4=\dfrac{\pi-\theta_2}{2}$ であるから

$$\theta_3=\pi-\angle P_2P_3P_4-\angle P_1P_3P_2$$
$$=\pi-\frac{\pi-\theta_2}{2}-\frac{\pi-\theta_1}{2}=\frac{\theta_2+\theta_1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}+\theta\right)=\frac{3}{4}\theta$$

(2) (1) と同様に考えると

$$\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}=\frac{\pi-\theta_n}{2},\quad \angle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}=\frac{\pi-\theta_{n+1}}{2}$$

よって $\theta_{n+2}=\pi-\angle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}-\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}$

$$=\pi-\frac{\pi-\theta_{n+1}}{2}-\frac{\pi-\theta_n}{2}=\frac{\theta_{n+1}}{2}+\frac{\theta_n}{2}$$

変形すると $\theta_{n+2}+\dfrac{\theta_{n+1}}{2}=\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$

ゆえに，$\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は n によらない定数 $\theta_2+\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\theta}{2}=\theta$

である。

(3) $\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}=\theta$ から $\theta_{n+1}-\dfrac{2}{3}\theta=-\dfrac{1}{2}\left(\theta_n-\dfrac{2}{3}\theta\right)$

したがって，数列 $\left\{\theta_n-\dfrac{2}{3}\theta\right\}$ は，初項 $\theta_1-\dfrac{2}{3}\theta=\theta-\dfrac{2}{3}\theta=\dfrac{\theta}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列

であるから $\theta_n-\dfrac{2}{3}\theta=\dfrac{\theta}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに $\theta_n=\dfrac{\theta}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}\theta$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\theta}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\theta\right\}=\frac{2}{3}\theta$

13

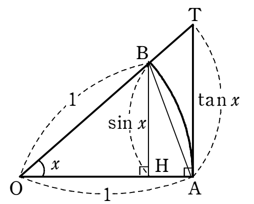
解答 略

解説

$x\longrightarrow 0$ のときを考えるのであるから，$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい。

[1] $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき 点 O を中心とする半径1の円において，中心角 x の扇形 OAB を考える。点 B から OA に下ろした垂線を BH，点 A における円 O の接線が OB の延長と交わる点を T とすると，AT は OA に垂直で，

面積について



$$\triangle OAB<\text{扇形}\ OAB<\triangle OAT$$

$BH=\sin x$，$AT=\tan x$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x$$

よって $\sin x<x<\tan x$

各辺を $\sin x$ で割ると，$\sin x>0$ であるから

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

ゆえに $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x=1$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$

[2] $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき $x=-\theta$ とおくと

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

[1], [2] から　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

14

解答　(1)　$\mathrm{AP}=\sqrt{5-4\cos\theta}$，$\mathrm{BP}=\sqrt{10-6\cos\theta}$

(2)　$\cos\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{\cos\theta-2}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，$\sin\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

(3)　1

解説

(1)　△OAP において，余弦定理により

$\mathrm{AP}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OP}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cos\theta$

よって　$\mathrm{AP}^2=5-4\cos\theta$

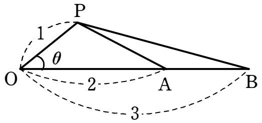
$\mathrm{AP}>0$ であるから　$\mathrm{AP}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

△OBP において，余弦定理により

$\mathrm{BP}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OP}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OP}\cos\theta$

よって　$\mathrm{BP}^2=10-6\cos\theta$

$\mathrm{BP}>0$ であるから　$\mathrm{BP}=\sqrt{10-6\cos\theta}$



(2)　△ABP において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BAP}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}}$$

よって　$\cos\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{1+5-4\cos\theta-(10-6\cos\theta)}{2\cdot1\cdot\sqrt{5-4\cos\theta}}=\dfrac{\cos\theta-2}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

また　$\sin^2\angle\mathrm{BAP}=1-\dfrac{(\cos\theta-2)^2}{5-4\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ であるから　$\sin\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

(3)　△ABP において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\sin\angle\mathrm{BAP}}=2R$

よって　$\theta R=\dfrac{\theta\sqrt{10-6\cos\theta}}{2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}}=\dfrac{\theta\sqrt{(10-6\cos\theta)(5-4\cos\theta)}}{2\sin\theta}$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\theta R=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sqrt{(10-6\cos\theta)(5-4\cos\theta)}}{2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}}=\frac{\sqrt{4\cdot1}}{2\cdot1}=1$

15

解答　(1)　$\mathrm{OQ}=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}$　　(2)　$\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　$\mathrm{OQ}=x$ とおく。△OPQ において，余弦定理により

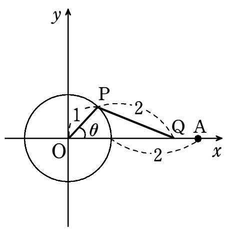
$2^2=1^2+x^2-2x\cos\theta$

よって　$x^2-2(\cos\theta)x-3=0$

ゆえに　$x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+3}$

$x>0$ であるから　$x=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}$

したがって　$\mathrm{OQ}=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}$



(2)　A (3, 0) であるから

$L=\mathrm{OA}-\mathrm{OQ}=3-\left(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)$

$=3-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+3}$

よって　$\dfrac{L}{\theta^2}=\dfrac{3-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+3}}{\theta^2}=\dfrac{(3-\cos\theta)^2-(\cos^2\theta+3)}{\theta^2\left(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)}$

$=6\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2\left(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)}$

$=6\cdot\dfrac{1-\cos^2\theta}{\theta^2\left(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)(1+\cos\theta)}$

$=6\cdot\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\left(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)(1+\cos\theta)}$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{L}{\theta^2}=6\cdot1\cdot\frac{1}{(2+2)\cdot2}=\frac{3}{4}$

16

解答　(1)　$\left(\sqrt{1-4\sin^2\theta},\ 2\sin\theta\right)$　　(2)　$\mathrm{Q}'\left(\dfrac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta},\ 1\right)$，$\mathrm{R}'\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{4}},\ 1\right)$

(3)　8

解説

(1)　$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ であるから　$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

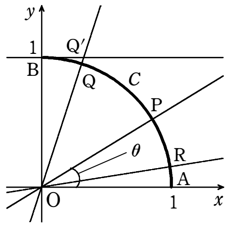
すなわち　$x_1=\cos\theta$，$y_1=\sin\theta$

$y_2=2y_1$ であるから　$y_2=2\sin\theta$

点 Q は曲線 C 上にあるから　$x_2{}^2+y_2{}^2=1$

$x_2>0$ であるから　$x_2=\sqrt{1-4\sin^2\theta}$

よって　$\mathrm{Q}\left(\sqrt{1-4\sin^2\theta},\ 2\sin\theta\right)$



(2)　直線 OQ の式は $y=\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}x$ であるから，

$y=1$ のとき　$x=\dfrac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$　　よって　$\mathrm{Q}'\left(\dfrac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta},\ 1\right)$

また，$\angle\mathrm{AOP}=4\angle\mathrm{AOR}$ であるから　$\angle\mathrm{AOR}=\dfrac{\theta}{4}$

ゆえに，$\mathrm{R}\left(\cos\dfrac{\theta}{4},\ \sin\dfrac{\theta}{4}\right)$ であるから，直線 OR の式は　$y=x\tan\dfrac{\theta}{4}$

$y=1$ のとき　$x=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{4}}$　　したがって　$\mathrm{R}'\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{4}},\ 1\right)$

(3)　(2) から　$\mathrm{BR}'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{4}}$，$\mathrm{BQ}'=\dfrac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$

よって，点 P が点 A に限りなく近づくときの $\dfrac{\mathrm{BR}'}{\mathrm{BQ}'}$ の極限は

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\mathrm{BR}'}{\mathrm{BQ}'}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin\theta}{\tan\dfrac{\theta}{4}\cdot\sqrt{1-4\sin^2\theta}}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin\theta\cos\dfrac{\theta}{4}}{\sin\dfrac{\theta}{4}\cdot\sqrt{1-4\sin^2\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0}2\cdot\frac{\dfrac{\theta}{4}}{\sin\dfrac{\theta}{4}}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\cos\dfrac{\theta}{4}}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}\cdot4=2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot4=8$$

1

解答　(1)　$s=\dfrac{-t^2+t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$　　(2)　$\sqrt{2}$

解説

(1)　AR：RQ$=\alpha:(1-\alpha)$ とすると

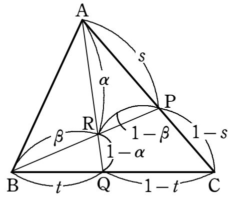
$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

$=(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\alpha(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

BR：RP$=\beta:(1-\beta)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{CP}}+(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$=\beta(1-s)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$



よって

$(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\alpha(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\beta(1-s)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから

$1-\alpha=\beta(1-s)$，$\alpha(1-t)=1-\beta$

これを解くと　$\alpha=\dfrac{s}{s+t-st}$，$\beta=\dfrac{t}{s+t-st}$　……①

ここで，△APR：△BQR＝2：1 であるから

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{AR}\times\mathrm{RP}\sin\angle\mathrm{ARP}=2\times\frac{1}{2}\times\mathrm{BR}\times\mathrm{RQ}\sin\angle\mathrm{BRQ}$$

$\angle\mathrm{ARP}=\angle\mathrm{BRQ}$ であるから　$\mathrm{AR}\times\mathrm{RP}=2\mathrm{BR}\times\mathrm{RQ}$

すなわち　$\alpha\mathrm{AQ}\times(1-\beta)\mathrm{BP}=2\beta\mathrm{BP}\times(1-\alpha)\mathrm{AQ}$

ゆえに　$\alpha(1-\beta)=2\beta(1-\alpha)$

① を代入すると　$\dfrac{s}{s+t-st}\left(1-\dfrac{t}{s+t-st}\right)=\dfrac{2t}{s+t-st}\left(1-\dfrac{s}{s+t-st}\right)$

よって　$(1-t)s^2+2t^2s-2t^2=0$

$0<s<1$，$0<t<1$ であるから

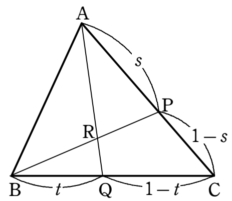
$$s=\frac{-t^2+\sqrt{t^4+(1-t)\cdot2t^2}}{1-t}=\frac{-t^2+t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$$

別解　△BCP と直線 AQ について，メネラウスの定理により

$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RP}}\times\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{AC}}\times\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QB}}=1$ から

$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RP}}\times\dfrac{s}{1}\times\dfrac{1-t}{t}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RP}}=\dfrac{t}{s(1-t)}$



また，△ACQ と直線 BP について，メネラウスの定理により

$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\times\dfrac{\mathrm{QB}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}}=1$ から　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\times\dfrac{t}{1}\times\dfrac{1-s}{s}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}=\dfrac{s}{t(1-s)}$

ゆえに　$\dfrac{\triangle\mathrm{APR}}{\triangle\mathrm{BQR}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AR}\times\mathrm{RP}\sin\angle\mathrm{ARP}}{\dfrac{1}{2}\times\mathrm{BR}\times\mathrm{RQ}\sin\angle\mathrm{BRQ}}=\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\times\dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{BR}}$

$=\dfrac{s}{t(1-s)}\times\dfrac{s(1-t)}{t}=\dfrac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)}$

であり，これが2に等しいから　$\dfrac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)}=2$

よって　$(1-t)s^2+2t^2s-2t^2=0$

$0<s<1$，$0<t<1$ であるから

$$s=\frac{-t^2+\sqrt{t^4+(1-t)\cdot 2t^2}}{1-t}=\frac{-t^2+t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$$

(2)　$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{-t+\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}=\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1)$　　(2)　$\left(\dfrac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}},\ \dfrac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}\right)$

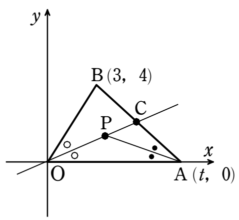
(3)　4

解説

(1)　∠BOAの二等分線と辺ABの交点をCとすると

$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=t:\sqrt{3^2+4^2}=t:5$

よって



$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{t+5}=\frac{1}{t+5}\{5(t,\ 0)+t(3,\ 4)\}$$

$$=\frac{4t}{t+5}(2,\ 1)\quad\cdots\cdots①$$

ゆえに，求めるベクトルは

$\pm\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2,\ 1)$　すなわち　$\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1)$

(2)　①から　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\dfrac{8t}{t+5}-t,\ \dfrac{4t}{t+5}\right)$

よって　$\mathrm{AC}^2=\left(\dfrac{8t}{t+5}-t\right)^2+\left(\dfrac{4t}{t+5}\right)^2=\dfrac{(3t-t^2)^2+16t^2}{(t+5)^2}=\dfrac{t^2(t^2-6t+25)}{(t+5)^2}$

ここで　$t^2-6t+25=(t-3)^2+16>0$

また，$t>0$ から　$t+5>0$

ゆえに　$\mathrm{AC}=\dfrac{t\sqrt{t^2-6t+25}}{t+5}$

OP：PC＝AO：ACであるから，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AO}+\mathrm{AC}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{t}{t+\dfrac{t\sqrt{t^2-6t+25}}{t+5}}\times\frac{4t}{t+5}(2,\ 1)$$

$$=\frac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}(2,\ 1)$$

よって，点Pの座標は　$\left(\dfrac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}},\ \dfrac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}\right)$

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}=\lim_{t\to\infty}\frac{8}{1+\dfrac{5}{t}+\sqrt{1-\dfrac{6}{t}+\dfrac{25}{t^2}}}=\frac{8}{1+1}=4$

$\boxed{3}$

解答　$a_1=1$，$a_2=-1$，$n\geqq 3$ のとき $a_n=\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$

解説

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ であるから

$n(n-2)a_{n+1}=S_n \iff n(n-2)(S_{n+1}-S_n)=S_n \iff n(n-2)S_{n+1}=(n-1)^2S_n$

$n\geqq 3$ のとき　$\dfrac{n}{n-1}S_{n+1}=\dfrac{n-1}{n-2}S_n$

よって　$\dfrac{n}{n-1}S_{n+1}=\dfrac{n-1}{n-2}S_n=\cdots\cdots=\dfrac{3-1}{3-2}S_3$

ゆえに　$S_n=\dfrac{2(n-2)}{n-1}S_3=2\cdot\dfrac{1-\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{1}{n}}S_3$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$ であるから　$S_3=\dfrac{1}{2}$

したがって　$S_n=\dfrac{n-2}{n-1}$

$n\geqq 4$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n-2}{n-1}-\dfrac{n-3}{n-2}=\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$

すなわち　$a_n=\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$　……①

$a_1=1$，$1\times(-1)a_2=a_1$ から　$a_2=-1$

$S_3=\dfrac{1}{2}$ から　$1-1+a_3=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$a_3=\dfrac{1}{2}$

よって，①は $n\geqq 3$ のとき成り立つ。

以上から　$a_1=1$，$a_2=-1$，

$n\geqq 3$ のとき　$a_n=\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$(p+\sqrt{q})^n=a_n+b_n\sqrt{q}$　……①　とする。

このとき，$(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$　……②　が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=1$ のとき

①から　$p+\sqrt{q}=a_1+b_1\sqrt{q}$　　ゆえに　$a_1=p$，$b_1=1$

よって，$n=1$ のとき②が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，②が成り立つ，すなわち $(p-\sqrt{q})^k=a_k-b_k\sqrt{q}$ と仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$(p-\sqrt{q})^{k+1}=(p-\sqrt{q})^k(p-\sqrt{q})=(a_k-b_k\sqrt{q})(p-\sqrt{q})$$
$$=(pa_k+qb_k)-(a_k+pb_k)\sqrt{q}\quad\cdots\cdots③$$

ここで　$(p+\sqrt{q})^{k+1}=(p+\sqrt{q})^k(p+\sqrt{q})=(a_k+b_k\sqrt{q})(p+\sqrt{q})$
$$=(pa_k+qb_k)+(a_k+pb_k)\sqrt{q}\quad\cdots\cdots④$$

①，④から　$a_{k+1}=pa_k+qb_k$，$b_{k+1}=a_k+pb_k$

これと③から　$(p-\sqrt{q})^{k+1}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{q}$

すなわち，$n=k+1$ のときも②が成り立つ。

[1]，[2]により，すべての自然数 n に対して②が成り立つ。

(2)　①，②から　$a_n=\dfrac{1}{2}\{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n\}$

$$b_n=\frac{1}{2\sqrt{q}}\{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n\}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}\lim_{n\to\infty}\frac{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n}{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n}$

$$=\sqrt{q}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}{1-\left(\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}$$

ここで，p，q はともに正であるから

$-(p+\sqrt{q})<p-\sqrt{q}<p+\sqrt{q}$

よって　$-1<\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}<1$　　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}$

参考　a，b，c，d が有理数，$\sqrt{q}$ が無理数のとき，

「$a+b\sqrt{q}=c+d\sqrt{q}$　ならば　$a=c$，$b=d$」が成り立つ。

証明　$b\neq d$ と仮定すると，$a+b\sqrt{q}=c+d\sqrt{q}$ から　$\sqrt{q}=\dfrac{c-a}{b-d}$

a，b，c，d は有理数であるから，この右辺は有理数である。

ところが，左辺は無理数であり，これは矛盾である。

したがって，$b\neq d$ とした仮定は誤りで　$b=d$

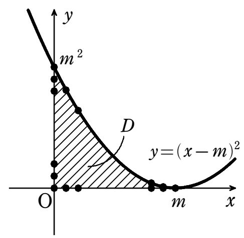
これと $a+b\sqrt{q}=c+d\sqrt{q}$ から　$a=c$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$L_m=m^2+2m$　　(2)　$T_m=\dfrac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)$　　(3)　1

解説

(1)　$y=(x-m)^2$



m は正の整数であるから，図形 D は右図の斜線部分となる。

ただし，境界線を含む。

D の周上の格子点のうち，x 軸上にあるものは $(k,\ 0)$

$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ m)$ で，$(m+1)$ 個ある。

y 軸上にあるものは $(0,\ k)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ m^2)$ で，

(m^2+1) 個ある。

放物線上にあるものは $(k,\ (k-m)^2)$

$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ m)$ で，$(m+1)$ 個ある。

よって，D の周上の格子点の数 L_m は，重複に注意して

$$L_m=(m+1)+(m^2+1)+(m+1)-3=m^2+2m$$

(2)　D の格子点のうち直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ m)$ 上にあるものは $\{(k-m)^2+1\}$ 個ある。

よって，D の周上および内部の格子点の数 T_m は

$$T_m=\sum_{k=0}^{m}\{(k-m)^2+1\}=\sum_{l=0}^{m}(l^2+1)$$
$$=\sum_{l=1}^{m}l^2+\sum_{l=0}^{m}1=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+(m+1)$$
$$=\frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)$$

(3)　D の面積 S_m は

$$S_m=\int_0^m (x-m)^2dx=\left[\frac{(x-m)^3}{3}\right]_0^m=-\frac{(-m)^3}{3}=\frac{m^3}{3}$$

よって $$\lim_{m\to\infty}\frac{T_m}{S_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)}{\frac{m^3}{3}}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)(2m^2+m+6)}{2m^3}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(2+\frac{1}{m}+\frac{6}{m^2}\right)}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}=1$$

6

解答 (1) n が奇数のとき　$a_n=\frac{n-1}{2}$，n が偶数のとき　$a_n=\frac{n-2}{2}$

(2) n が奇数のとき　$b_n=\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$，$n$ が偶数のとき　$b_n=\frac{1}{4}(n-2)^2$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{4}$

解説

k を自然数とする．

(1) n が奇数のとき　$n=2k-1$ とおくと

$(2k-3,\ 1)$，$(2k-5,\ 2)$，……，$(1,\ k-1)$

ゆえに　$a_{2k-1}=k-1$　　よって　$a_n=\frac{n-1}{2}$

n が偶数のとき　$n=2k$ とおくと

$(2k-2,\ 1)$，$(2k-4,\ 2)$，……，$(2,\ k-1)$

ゆえに　$a_{2k}=k-1$　　よって　$a_n=\frac{n-2}{2}$

(2) $n=2k-1$ のとき

$$b_{2k-1}=\sum_{i=1}^{k-1}(a_{2i-1}+a_{2i})=\sum_{i=1}^{k-1}2(i-1)$$
$$=2\left\{\frac{(k-1)k}{2}-(k-1)\right\}=(k-1)(k-2)$$

ゆえに　$b_n=\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$

$n=2k$ のとき

$$b_{2k}=b_{2k-1}+a_{2k-1}=(k-1)(k-2)+(k-1)$$
$$=(k-1)^2$$

ゆえに　$b_n=\frac{1}{4}(n-2)^2$

(3) $n=2k-1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{(2k-1)^2}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k-1)(k-2)}{(2k-1)^2}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{\left(2-\frac{1}{k}\right)^2}=\frac{1}{4}$$

$n=2k$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{(2k)^2}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k-1)^2}{(2k)^2}=\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}{4}=\frac{1}{4}$$

以上から　$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{4}$

7

解答 (1) $\frac{5}{9}$　(2) 略　(3) $a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$，$c_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

(4) 順に $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

解説

(1) さいころを 2 回振った後に動点 P が A にいるのは，2 回とも 2 以下の目が出る，または 2 回とも 3 以上の目が出るときであるから　$a_1=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

(2) さいころを 1 回振ると，点 A または C にいる点 P は点 B または D に移り，点 B または D にいる点 P は点 A または C に移る。よって，A または C にいる点 P は，さいころを 2 回振った後，A または C にいることが分かる。

同様に，B または D にいる点 P は，さいころを 2 回振った後，B または D にいることが分かる。

動点 P は A から出発するから，さいころを $2n$ 回すなわち偶数回振った後，A または C にいる。

(3) さいころを $2(n+1)$ 回振った後に，動点 P が A にいるのは次の場合である。

[1] さいころを $2n$ 回振った後に動点 P が点 A に移動し，その後 A→B→A と移動するか A→D→A と移動する

[2] さいころを $2n$ 回振った後に動点 P が点 C に移動し，その後 C→B→A と移動するか C→D→A と移動する

以上から　$a_{n+1}=a_n\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}+c_n\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)$

すなわち　$a_{n+1}=\frac{5}{9}a_n+\frac{4}{9}c_n$　……①

(2) により　$c_n=1-a_n$　……②

② を ① に代入して　$a_{n+1}=\frac{5}{9}a_n+\frac{4}{9}(1-a_n)$

変形すると　$a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{9}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$，公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列であるから

$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$　　よって　$a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

これを ② に代入して　$c_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

(4) (3) から　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{2}$

8

解答 (1) $\theta_n=\frac{\pi}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$，証明は略　(2) 略　(3) 略　(4) 1

解説

(1) $\theta_{n+1}=\frac{\pi-\theta_n}{2}$ から　$\theta_{n+1}-\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\left(\theta_n-\frac{\pi}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{\theta_n-\frac{\pi}{3}\right\}$ は初項 $\theta_1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから　$\theta_n-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$\theta_n=\frac{\pi}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$

また，$\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ より，すべての自然数 n に対して $-\frac{1}{8}\leqq\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\leqq\frac{1}{4}$ が成り立つから

$$\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)\leqq\frac{\pi}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\leqq\frac{\pi}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}$$

すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta_n\leqq\frac{3}{8}\pi$

したがって，$0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つ。

(2) $\theta_{n+1}=\frac{\pi-\theta_n}{2}$ から　$\cos\theta_{n+1}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_n}{2}\right)=\sin\frac{\theta_n}{2}$

ここで，(1) の結果より，$0<\frac{\theta_n}{2}<\frac{\pi}{4}$ であるから　$\sin\frac{\theta_n}{2}>0$

よって　$\cos\theta_{n+1}=\sin\frac{\theta_n}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta_n}{2}}$

(3) すべての自然数 n に対して，$2\cos\theta_n=a_n$ …… ① が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

(左辺)$=2\cos\theta_1=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，　(右辺)$=a_1=\sqrt{2}$

よって，① が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると　$2\cos\theta_k=a_k$

このとき，$-1\leqq\cos\theta_k\leqq1$ より　$-2\leqq a_k\leqq2$

よって，(2) の結果より，$n=k+1$ のとき

$$2\cos\theta_{k+1}=2\sqrt{\frac{1-\cos\theta_k}{2}}=\sqrt{2-2\cos\theta_k}=\sqrt{2-a_k},$$
$$a_{k+1}=\sqrt{|2-a_k|}=\sqrt{2-a_k}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n に対して ① が成り立つ。

(4) (1) と (3) の結果より　$a_n=2\cos\theta_n=2\cos\left\{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\theta_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=\frac{\pi}{3}$ で，関数 $\cos x$ は連続であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\cos\theta_n=2\cos\frac{\pi}{3}=1$$

9

解答 (1) $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{a}{2x_n}$　(2) 略　(3) 略　(4) $\sqrt{a}$

解説

(1) $f'(x)=2x$ より，点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y=2x_n(x-x_n)+x_n^2-a$$

ここで，$y=0$ のとき $x=x_{n+1}$ であるから　$2x_nx_{n+1}-x_n^2-a=0$

$x_n=0$ とすると，$a=0$ となり，$a>0$ に反する。

よって　$x_n \neq 0$

したがって　$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{a}{2x_n}$

(2)　(1) から　$x_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{x_n{}^2-2\sqrt{a}\,x_n+a}{2x_n}=\dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n}$

すなわち　$x_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n}$　……①

$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{a}{2x_n}$ と $x_1>\sqrt{a}>0$ から　$x_2>0$

同様に繰り返して　$x_n>0$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

よって，① から　$x_{n+1}-\sqrt{a}\geqq 0$

ここで，$x_{n+1}-\sqrt{a}=0$ とすると　$x_n-\sqrt{a}=0$

繰り返して，$x_1-\sqrt{a}=0$ となり，条件に反する。

よって　$x_{n+1}-\sqrt{a}>0$

また　$x_n-x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n-\dfrac{a}{2x_n}=\dfrac{x_n{}^2-a}{2x_n}=\dfrac{(x_n+\sqrt{a})(x_n-\sqrt{a})}{2x_n}>0$

したがって　$\sqrt{a}<x_{n+1}<x_n$

(3)　① から　$x_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n}=\dfrac{1}{2}(x_n-\sqrt{a})\left(1-\dfrac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$

(2) より，$x_n>0$，$0<\sqrt{a}<x_n$ が成り立つから　$0<\dfrac{\sqrt{a}}{x_n}<1$

よって　$0<1-\dfrac{\sqrt{a}}{x_n}<1$

ゆえに　$x_{n+1}-\sqrt{a}<\dfrac{1}{2}(x_n-\sqrt{a})$

(2) から　$x_{n+1}-\sqrt{a}>0$，$x_n-\sqrt{a}>0$

したがって　$|x_{n+1}-\sqrt{a}|<\dfrac{1}{2}|x_n-\sqrt{a}|$

(4)　(3) から

$$0<|x_n-\sqrt{a}|<\frac{1}{2}|x_{n-1}-\sqrt{a}|<\left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2}-\sqrt{a}|<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{a}|$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{a}|=0$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{a}|=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$

10

解答　$1+\sqrt{5}$

解説

数列 $\{a_n\}$ が収束すると仮定して，その極限値を α とすると

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$$

であるから，漸化式より　$\alpha=\sqrt{2\alpha+4}$　$(\alpha>0)$

両辺を 2 乗して整理すると　$\alpha^2-2\alpha-4=0$

$\alpha>0$ であるから　$\alpha=1+\sqrt{5}$

ここで　$0\leqq|a_{n+1}-(1+\sqrt{5})|=|\sqrt{2a_n+4}-(1+\sqrt{5})|$

$$=\frac{|2a_n+4-(1+\sqrt{5})^2|}{\sqrt{2a_n+4}+(1+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{2|a_n-(1+\sqrt{5})|}{\sqrt{2a_n+4}+(1+\sqrt{5})}$$

$\sqrt{2a_n+4}+(1+\sqrt{5})>4$ であるから

$$0\leqq|a_{n+1}-(1+\sqrt{5})|=\frac{2|a_n-(1+\sqrt{5})|}{\sqrt{2a_n+4}+(1+\sqrt{5})}\leqq\frac{1}{2}|a_n-(1+\sqrt{5})|$$

よって　$0\leqq|a_n-(1+\sqrt{5})|\leqq\dfrac{1}{2}|a_{n-1}-(1+\sqrt{5})|\leqq\cdots\cdots\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-(1+\sqrt{5})|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-(1+\sqrt{5})|=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-(1+\sqrt{5})|=0$

したがって，数列 $\{a_n\}$ は収束し　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1+\sqrt{5}$

11

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$ であるから

$$T_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot4}}\right)+\cdots\cdots+\left\{\cancel{\frac{1}{n(n+1)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{4}$

(2)　$k\geqq2$ のとき　$k^3-(k-1)k(k+1)=k>0$　であるから

$k^3>(k-1)k(k+1)$

よって　$\dfrac{1}{k^3}<\dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}$

この式に $k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入して加えると

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}<T_{n-1}$$

両辺に 1 を加えると　$S_n<1+T_{n-1}$

(3)　(2) から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n<1+\lim_{n\to\infty}T_{n-1}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

よって　$S\leqq\dfrac{5}{4}$

また　$S_2=1+\dfrac{1}{8}=\dfrac{9}{8}$

S_n の各項は正であるから，n が十分大きいとき　$S_n\geqq S_2$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n\geqq S_2=\frac{9}{8}$　すなわち　$S\geqq\dfrac{9}{8}$

以上から　$\dfrac{9}{8}\leqq S\leqq\dfrac{5}{4}$

12

解答　(1)　$R_n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$，$S_n=\dfrac{1-r^n}{(1-r)^2}-\dfrac{nr^n}{1-r}$

(2)　$T_n=2\left\{\dfrac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3}-\dfrac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2}\right\}-\dfrac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r}$　(3)　$\dfrac{(r+1)r}{(1-r)^3}$

解説

(1)　$R_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}r^k=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

また　$S_n=1+2r+3r^2+\cdots\cdots+\quad nr^{n-1}$，

$rS_n=\quad r+2r^2+\cdots\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n$

辺々を引くと

$(1-r)S_n=1+\ \ r+\ \ r^2+\cdots\cdots+\quad r^{n-1}-nr^n$

$$=\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n$$

よって　$S_n=\dfrac{1-r^n}{(1-r)^2}-\dfrac{nr^n}{1-r}$

(2)　$n\geqq2$ のとき

$T_n=2\cdot1+3\cdot2r+\cdots\cdots+\quad n(n-1)r^{n-2}$，

$rT_n=\quad 2\cdot1\cdot r+\cdots\cdots+(n-1)(n-2)r^{n-2}+n(n-1)r^{n-1}$

$(k+1)k-k(k-1)=2k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ であるから，辺々を引くと

$(1-r)T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2kr^{k-1}-n(n-1)r^{n-1}$

$=2S_{n-1}-n(n-1)r^{n-1}$

$=2\left\{\dfrac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}-\dfrac{(n-1)r^{n-1}}{1-r}\right\}-n(n-1)r^{n-1}$

よって，$n\geqq2$ のとき

$T_n=2\left\{\dfrac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3}-\dfrac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2}\right\}-\dfrac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r}$　……①

$T_1=0$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$T_n=2\left\{\dfrac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3}-\dfrac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2}\right\}-\dfrac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r}$

(3)　第 n 項までの和を U_n とすると

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}k^2r^k=\sum_{k=0}^{n}\{k(k-1)+k\}r^k=r^2\sum_{k=0}^{n}k(k-1)r^{k-2}+r\sum_{k=0}^{n}kr^{k-1}=r^2T_n+rS_n$$

ここで，$|r|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(n-1)r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{2}{(1-r)^3},\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{(1-r)^2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(r^2T_n+rS_n)$

$$=r^2\cdot\frac{2}{(1-r)^3}+r\cdot\frac{1}{(1-r)^2}$$

$$=\frac{2r^2+r(1-r)}{(1-r)^3}$$

$$=\frac{(r+1)r}{(1-r)^3}$$

すなわち　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^2r^k=\frac{(r+1)r}{(1-r)^3}$

13

解答　(1)　$P_1(q)=q^2(3-2q)$　(2)　$P_2(q)=\dfrac{(2-q)q^2}{q^2-q+1}$　(3)　$0<q\leqq\dfrac{1}{2}$

(解説)

チーム A が勝つことを A，チーム B が勝つことを B で表し，例えば，1 回目にチーム A が勝ち，2 回目にチーム B が勝ち，3 回目にチーム A が勝つことを ABA で表す。

(1) チーム A が優勝するのは，AA，ABA，BAA のいずれかの場合である。

AA となる確率は　q^2

ABA，BAA となる確率はともに　$q^2(1-q)$

よって，チーム A が優勝する確率 $P_1(q)$ は

$$P_1(q)=q^2+2q^2(1-q)=q^2(3-2q)$$

(2) k を 0 以上の整数とする。

チーム A が優勝するのは，次の [1], [2] のどちらかの場合である。

[1] AB が k 回続いたあと，AA と続く場合

[2] 1 回目が B で，そのあと AB が k 回続き，さらに AA と続く場合

[1] が起こる確率は　$\{q(1-q)\}^kq^2$

[2] が起こる確率は　$(1-q)\{q(1-q)\}^kq^2$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\{q(1-q)\}^kq^2$ は初項 q^2，公比 $q(1-q)$ の無限等比級数である。

公比について，$q(1-q)=q-q^2=-\left(q-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ であり，$0<q<1$ であるから

$$0<q(1-q)\leqq\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots ①$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\{q(1-q)\}^kq^2$ は収束し　$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\{q(1-q)\}^kq^2=\frac{q^2}{1-q(1-q)}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1-q)\{q(1-q)\}^kq^2$ は初項 $(1-q)q^2$，公比 $q(1-q)$ の無限等比級数である。

① から，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1-q)\{q(1-q)\}^kq^2$ は収束し

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-q)\{q(1-q)\}^kq^2=\frac{(1-q)q^2}{1-q(1-q)}$$

チーム A が優勝する確率 $P_2(q)$ は

$$\begin{aligned}P_2(q)&=\sum_{k=0}^{\infty}\{q(1-q)\}^kq^2+\sum_{k=0}^{\infty}(1-q)\{q(1-q)\}^kq^2\\&=\frac{q^2}{1-q(1-q)}+\frac{(1-q)q^2}{1-q(1-q)}\\&=\frac{(2-q)q^2}{q^2-q+1}\end{aligned}$$

(3) $P_1(q)\geqq P_2(q)$ とすると　$q^2(3-2q)\geqq\dfrac{(2-q)q^2}{q^2-q+1}$

両辺を $q^2\,(>0)$ で割ると　$3-2q\geqq\dfrac{2-q}{q^2-q+1}$

① より，$q^2-q+1=1-q(1-q)\geqq\dfrac{3}{4}$ であるから，この不等式の両辺に q^2-q+1 を掛けると　$(3-2q)(q^2-q+1)\geqq 2-q$

左辺を展開して整理すると　$2q^3-5q^2+4q-1\leqq 0$

すなわち　$(q-1)^2(2q-1)\leqq 0$

$(q-1)^2>0$ であるから　$2q-1\leqq 0$　　よって　$q\leqq\dfrac{1}{2}$

ゆえに，求める条件は　$0<q\leqq\dfrac{1}{2}$

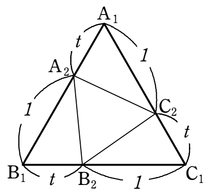
14

(解答) (1) $\dfrac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t}a$　(2) $S(t)=\dfrac{\sqrt{3}\,(t+1)^2}{12t}a^2$

(3) $t=1$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$

(解説)

(1) $\mathrm{A_1A_2}=\dfrac{t}{1+t}a$，$\mathrm{A_1C_2}=\dfrac{1}{1+t}a$



余弦定理により

$\mathrm{A_2C_2}^2$

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{t}{1+t}a\right)^2+\left(\frac{1}{1+t}a\right)^2-2\left(\frac{t}{1+t}a\right)\left(\frac{1}{1+t}a\right)\cos 60^\circ\\&=\left(\frac{t}{1+t}a\right)^2+\left(\frac{1}{1+t}a\right)^2-\frac{t}{(1+t)^2}a^2\\&=\frac{t^2-t+1}{(1+t)^2}a^2\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathrm{A_2C_2}=\dfrac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t}a$

(2) 正三角形 T_1 の面積は　$\dfrac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

正三角形 T_n，T_{n+1} は相似であり，

相似比が $1:\dfrac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t}$ であるから，

面積比は $1:\dfrac{t^2-t+1}{(1+t)^2}$ となる.

また，$0<\dfrac{t^2-t+1}{(1+t)^2}<1$ から，

$S(t)$ は，初項 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，公比 $\dfrac{t^2-t+1}{(1+t)^2}$ の無限等比数列の和である.

$$\begin{aligned}\text{ゆえに}\quad S(t)&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{1}{1-\dfrac{t^2-t+1}{(1+t)^2}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{(t+1)^2}{3t}\\&=\frac{\sqrt{3}\,(t+1)^2}{12t}a^2\end{aligned}$$

(3) $S(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(t+2+\dfrac{1}{t}\right)$

$t>0$ から，相加平均・相乗平均の関係により

$$S(t)\geqq\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(2+2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

等号は，$t=\dfrac{1}{t}$，$t>0$ から，$t=1$ のとき成り立つ.

以上から，$t=1$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$

15

(解答) (1) $p_1=\dfrac{1}{a+3}$，$p_2=\dfrac{a+2}{(a+1)(a+3)}$

(2) $p_n=-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{a+2}$　(3) $\dfrac{1}{a+2}$

(解説)

(1) はじめに袋 U の中に，白球 $(a+2)$ 個，赤球 1 個の計 $(a+3)$ 個が入っている。

よって，1 回目に赤球を取り出す確率は　$p_1=\dfrac{1}{a+3}$

次に，p_2 を考える。

[1] 1 回目に白球を取り出すとき

(A) から，操作後の袋の中に，白球 a 個，赤球 1 個の計 $(a+1)$ 個が入っている。

[2] 1 回目に赤球を取り出すとき

(B) から，操作後の袋の中に，赤球は入っていない。

[1], [2] から，2 回目に赤球を取り出す確率は

$$p_2=\frac{a+2}{a+3}\cdot\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+3}\cdot 0=\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

(2) $n\geqq 3$ とする。3 回目以降，袋の中に「白球 a 個，赤球 1 個」または「白球 a 個，赤球 0 個」が入っている。

[1] n 回目に白球を取り出すとき

(A) から，操作後の袋の中に，白球 a 個，赤球 1 個の計 $(a+1)$ 個が入っている。

[2] n 回目に赤球を取り出すとき

(B) から，操作後の袋の中に，赤球は入っていない。

[1], [2] から，$(n+1)$ 回目に赤球を取り出す確率は

$$p_{n+1}=(1-p_n)\cdot\frac{1}{a+1}+p_n\cdot 0$$

よって　$p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\left(p_n-\dfrac{1}{a+2}\right)$

また　$p_1-\dfrac{1}{a+2}=\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}$

ゆえに，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{a+2}\right\}$ は 初項 $-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}$，公比 $-\dfrac{1}{a+1}$ の等比数列であるから　$p_n-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}$

よって　$p_n=-\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{a+2}$　……①

(3) $n=1$，2 のとき，① の右辺はそれぞれ

$$\frac{1}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}=\frac{1}{a+3},$$

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

よって，① は すべての自然数 n に対して成り立つ。

$$\begin{aligned}\text{ゆえに}\quad\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}p_k&=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(a+2)(a+3)}\cdot\frac{1-\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^m}{1-\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)}\\&=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{m}\cdot\frac{a+1}{(a+2)^2(a+3)}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}\end{aligned}$$

a は自然数より $\left|-\dfrac{1}{a+1}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m=0$

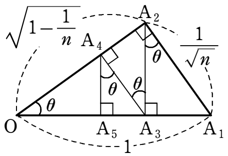
したがって　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}p_k=\frac{1}{a+2}$

$\boxed{16}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k$　　(2)　$\dfrac{1}{e}-1$

解説

(1)　$\angle A_1OA_2=\theta$ とおくと，



$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}\backsim\triangle A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}$ で，その相似比は

$1 : \cos\theta$

ゆえに　$A_{k+1}A_{k+2}=A_kA_{k+1}\cos\theta$

$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

よって　$A_kA_{k+1}=A_1A_2(\cos\theta)^{k-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)^{k-1}$

$\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ のなす角は $\pi-\theta$ であるから

$$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=\left|\overrightarrow{h_k}\right|\left|\overrightarrow{h_{k+1}}\right|\cos(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k-1}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k}(-\cos\theta)$$

$$=-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=-\frac{1}{n}\times\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}-1+\frac{1}{n}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^2}=\frac{1}{e}$$

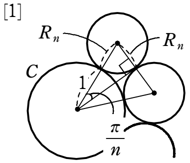
ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}-1+\frac{1}{n}\right\}=\frac{1}{e}-1$

$\boxed{17}$

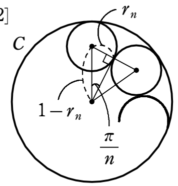
解答　(1)　$R_6=1$，$r_6=\dfrac{1}{3}$　　(2)　$2\pi^2$

解説

[1]



[2]



図[1]から　$(1+R_n)\sin\dfrac{\pi}{n}=R_n$　　よって　$R_n=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$

図[2]から　$(1-r_n)\sin\dfrac{\pi}{n}=r_n$　　よって　$r_n=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$

(1)　$R_6=\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{1-\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，　$r_6=\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

(2)　$\dfrac{\pi}{n}=\theta$ とおくと

$$R_n-r_n=\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$\dfrac{\pi}{n}=\theta$ から　$n=\dfrac{\pi}{\theta}$

$n\to\infty$ のとき，$\theta\to0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}n^2(R_n-r_n)=\lim_{\theta\to0}\frac{\pi^2}{\theta^2}\cdot\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\lim_{\theta\to0}2\pi^2\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

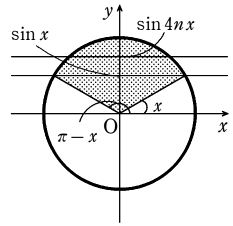
$$=2\pi^2\cdot1^2\cdot\frac{1}{1^2}=2\pi^2$$

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{1}{8}\pi$

解説

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$0\leqq 4nx\leqq 2n\pi$



この範囲で $\sin 4nx\geqq\sin x$ を満たす条件は

$x+2k\pi\leqq 4nx\leqq(\pi-x)+2k\pi$

$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

よって　$\dfrac{2k\pi}{4n-1}\leqq x\leqq\dfrac{(2k+1)\pi}{4n+1}$

$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

区間の長さの総和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4n+1}-\frac{2k\pi}{4n-1}\right\}=\frac{\pi}{16n^2-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-4k+4n-1)$$

$$=\frac{\pi}{16n^2-1}\left\{-4\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=0}^{n-1}(4n-1)\right\}=\frac{\pi}{16n^2-1}\left\{-4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(4n-1)n\right\}$$

$$=\frac{2n^2+n}{16n^2-1}\pi$$

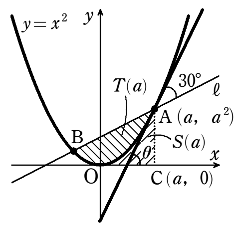
ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{16-\frac{1}{n^2}}\pi=\frac{1}{8}\pi$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$y=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$　　(2)　4

解説

(1)　$y=x^2$ から　$y'=2x$



点 A における接線と，x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると　$\tan\theta=2a$

よって，ℓ の傾きは

$$\tan(\theta-30°)=\frac{\tan\theta-\tan30°}{1+\tan\theta\tan30°}$$

$$=\frac{2a-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+2a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$$

ゆえに，ℓ の方程式は　$y-a^2=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)$

すなわち　$y=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$

(2)　$S(a)=\displaystyle\int_0^a x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{3}$

点 B の x 座標を b とすると　$x^2-\left\{\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2\right\}=(x-a)(x-b)$

よって　$a+b=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$　　ゆえに　$b=-a+\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$　……①

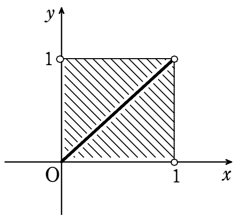
また　$T(a)=\displaystyle\int_b^a\{-(x-a)(x-b)\}dx=-\int_b^a(x-a)(x-b)dx=\frac{1}{6}(a-b)^3$

ゆえに，① から

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{(a-b)^3}{2a^3}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1-\left(-1+\frac{2\sqrt{3}-\frac{1}{a}}{2a+\sqrt{3}}\right)\right\}^3=\frac{1}{2}\cdot 2^3=4$$

$\boxed{3}$

解答 〔図〕境界線上の点は，x 軸，y 軸と直線 $y=x$ を除き，他は含む



解説

$y>0$ であるから，漸化式の両辺を y^{n+1} で割ると $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{y^{n+1}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{a_n}{y^n}+1$

$\displaystyle\frac{a_n}{y^n}=b_n$ とおくと $\displaystyle b_{n+1}=\frac{x}{y}b_n+1,\ b_1=\frac{a_1}{y^1}=0$

この漸化式を変形すると $\displaystyle b_{n+1}-\frac{y}{y-x}=\frac{x}{y}\left(b_n-\frac{y}{y-x}\right)$

よって，数列 $\displaystyle\left\{b_n-\frac{y}{y-x}\right\}$ は，初項 $\displaystyle b_1-\frac{y}{y-x}=-\frac{y}{y-x}$，公比 $\displaystyle\frac{x}{y}$ の等比数列であるから $\displaystyle b_n-\frac{y}{y-x}=-\frac{y}{y-x}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

ゆえに $\displaystyle b_n=-\frac{y}{y-x}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}+\frac{y}{y-x}=\frac{y}{y-x}\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$

よって $\displaystyle a_n=y^nb_n=\frac{y^{n+1}}{y-x}\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$ ……①

[1] $0<x<y$ のとき

$\displaystyle 0<\frac{x}{y}<1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}=1$

よって，数列 $\{a_n\}$ が有限の値に収束するための条件は，数列 $\{y^{n+1}\}$ が有限の値に収束することである。

したがって $0<y\leqq 1$

$0<x<y$ であるから $0<x<y\leqq 1$ ……②

[2] $0<y<x$ のとき

① を変形して $\displaystyle a_n=\frac{x^{n-1}y^2}{y-x}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}-1\right\}$

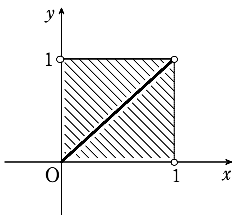
$\displaystyle 0<\frac{y}{x}<1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}-1\right\}=-1$

よって，数列 $\{a_n\}$ が有限の値に収束するための条件は，数列 $\{x^{n-1}\}$ が有限の値に収束することである。

したがって $0<x\leqq 1$

$0<y<x$ であるから $0<y<x\leqq 1$ ……③

以上から，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，②，③ の不等式が表す領域で，右の図の斜線部分。ただし，境界線上の点は，x 軸，y 軸と直線 $y=x$ を除き，他は含む。



$\boxed{4}$

解答 (1) $p=2b$，$q=a-3b$，$r=-a+b$

(2) $b=0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=a\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$a=0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=b\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$

(3) $\displaystyle\frac{5}{6}a+\frac{7}{6}b$

解説

(1) $\displaystyle x_k=\frac{p}{k}+\frac{q}{k+1}+\frac{r}{k+3}$ から $\displaystyle\frac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}=\frac{p}{k}+\frac{q}{k+1}+\frac{r}{k+3}$

両辺に $k(k+1)(k+3)$ を掛けると

$2ak+6b=p(k+1)(k+3)+qk(k+3)+rk(k+1)$

すなわち $2ak+6b=(p+q+r)k^2+(4p+3q+r)k+3p$

よって，$\displaystyle x_k=\frac{p}{k}+\frac{q}{k+1}+\frac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つとき

$0=p+q+r$，$2a=4p+3q+r$，$6b=3p$

ゆえに $p=2b$，$q=a-3b$，$r=-a+b$

(2) $b=0$ のとき，(1) から $p=0$，$q=a$，$r=-a$

このとき $\displaystyle x_k=\frac{a}{k+1}-\frac{a}{k+3}=a\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

したがって，$n\geqq 3$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=a\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=a\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\quad\cdots\cdots①$$

また，$a=0$ のとき，(1) から $p=2b$，$q=-3b$，$r=b$

このとき

$$x_k=\frac{2b}{k}-\frac{3b}{k+1}+\frac{b}{k+3}=b\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=b\left(\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=2b\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-b\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=2b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$ ……②

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

また，$n\geqq 3$ のとき，① から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$

ゆえに，$n\geqq 4$ のとき，② から

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-b\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=b\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\quad\cdots\cdots③$$

(3) (1) から $\displaystyle x_k=\frac{2b}{k}+\frac{a-3b}{k+1}+\frac{-a+b}{k+3}$

したがって $\displaystyle x_k=a\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)+b\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$

よって，①，③ から，4 以上の自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)+b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=a\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+b\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{5}{6}a+\frac{7}{6}b$

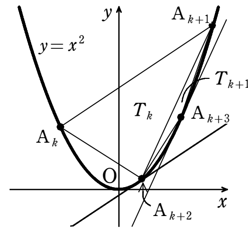
$\boxed{5}$

解答 (1) $\displaystyle\frac{1}{8}$ (2) $\displaystyle\frac{6}{7}S$

解説

(1) 直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ の傾きは

$$\frac{{a_{k+1}}^2-{a_k}^2}{a_{k+1}-a_k}=a_{k+1}+a_k$$



また，$y=x^2$ から $y'=2x$

点 A_{k+2} における C の接線と直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ が平行であるから

$$2a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$$

よって $\displaystyle a_{k+2}=\frac{1}{2}(a_{k+1}+a_k)$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+2}\mathrm{A}_k}=(a_k-a_{k+2},\ \ {a_k}^2-{a_{k+2}}^2)$，

$\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+2}\mathrm{A}_{k+1}}=(a_{k+1}-a_{k+2},\ \ {a_{k+1}}^2-{a_{k+2}}^2)$

から

$$T_k=\frac{1}{2}\left|(a_k-a_{k+2})({a_{k+1}}^2-{a_{k+2}}^2)-(a_{k+1}-a_{k+2})({a_k}^2-{a_{k+2}}^2)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|(a_k-a_{k+2})(a_{k+1}+a_{k+2})(a_{k+1}-a_{k+2})-(a_{k+1}-a_{k+2})(a_k+a_{k+2})(a_k-a_{k+2})\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|(a_k-a_{k+2})(a_{k+1}-a_{k+2})(a_{k+1}-a_k)\right|$$

ここで，① を代入すると

$$T_k=\frac{1}{2}\left|\left(a_k-\frac{a_{k+1}+a_k}{2}\right)\left(a_{k+1}-\frac{a_{k+1}+a_k}{2}\right)\times(a_{k+1}-a_k)\right|$$
$$=\frac{1}{8}|a_{k+1}-a_k|^3$$

したがって

$$T_{k+1}=\frac{1}{8}|a_{k+2}-a_{k+1}|^3=\frac{1}{8}\left|\frac{a_{k+1}+a_k}{2}-a_{k+1}\right|^3=\frac{1}{64}|a_{k+1}-a_k|^3$$

よって $\displaystyle\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{1}{8}$

(2) 直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の方程式は $y=(a_1+a_2)x-a_1a_2$

$a_1<a_2$ から　$S=\int_{a_1}^{a_2}\{(a_1+a_2)x-a_1a_2-x^2\}dx=\int_{a_1}^{a_2}\{-(x-a_1)(x-a_2)\}dx$

$$=\frac{1}{6}(a_2-a_1)^3$$

よって　　$T_1=\frac{1}{8}|a_2-a_1|^3=\frac{1}{8}(a_2-a_1)^3=\frac{3}{4}S$

(1) より，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k$ は，初項 $T_1=\frac{3}{4}S$，公比 $\frac{1}{8}$ の無限等比級数の和であるから

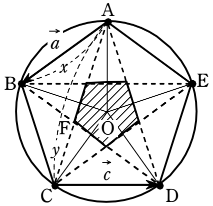
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{\frac{3}{4}S}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{7}S$$

6

解答　(1)　略　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$　　(3)　$\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$　　(4)　$\frac{3+\sqrt{5}}{6}$

解説

(1)　正五角形 ABCDE の外接円の中心を O とすると，



$\angle\mathrm{AOB}=\frac{2\pi}{5}$ であるから，円周角の定理により

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{5}$$

$\triangle$ABC は AB＝BC の二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{CAB}=\frac{\pi}{5},$$

$$\angle\mathrm{ABC}=\frac{3}{5}\pi$$

また，線分 AC と線分 BD の交点を F とすると，

$\angle\mathrm{CBF}=\angle\mathrm{BCF}=\frac{\pi}{5}$ より，$\triangle$CFB は CF＝FB の二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{FCB}=\angle\mathrm{FBC}=\frac{\pi}{5}$$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{CFB}$

ゆえに　　AB：CF＝AC：CB

したがって　　AB・CB＝CF・AC

AB＝CB＝x，AC＝y，CF＝AC－AF＝$y-x$ であるから　　$x^2=y(y-x)$

(2)　AB∥EC，CD∥BE であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CD}}\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{y}{x}(\vec{a}+\vec{c})$$

(1) より，$y^2-xy-x^2=0$ $(x>0,\ y>0)$ であるから　　$\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}-1=0$

これと $\frac{y}{x}>0$ より　　$\frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

(3)　R_2 の 1 辺の長さは

$$\mathrm{AC}-2\cdot\mathrm{CF}=y-2(y-x)=2x-y=\left(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　(3) より，R_1 と R_2 の相似比は $1:\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ であり，R_n と R_{n+1} の相似比は，これと等しい。

よって　　$S_{n+1}=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2S_n=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}S_n$

ゆえに　　$S_n=\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}S_1$

したがって，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$ であり，これは初項 1，公比 $-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ の無限等比級数と等しい。

$-1<-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}<0$ であるから，この無限等比級数は収束し，求める極限値は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

7

解答　(1)　$p_k={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$　　(2)　$e-\frac{1}{e}$

解説

(1)　$p_k={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$

(2)　$q_n=\sum_{k=1}^{n}2^kp_k=\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

$$=\left(\frac{2}{n}+1-\frac{1}{n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

よって　　$\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ において，$\frac{1}{n}=h$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $h\to0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

また，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ において，$-\frac{1}{n}=k$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $k\to0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{k\to0}(1+k)^{-\frac{1}{k}}=\frac{1}{e}$$

よって　　$\lim_{n\to\infty}q_n=e-\frac{1}{e}$

8

解答　(1)　n が偶数のとき $p(n)=\frac{n}{2^{n+1}}$，n が奇数のとき $p(n)=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$

(2)　$\frac{16}{27}$

解説

(1)　表を ○，裏を × で表し，その上段には投げる人 A，B をかいて表すこととする。

[1]　B が 0 点で A が勝利するとき

コインを投げる人とコインの表裏の出方は次のようになる。

$$\begin{array}{cc}\mathrm{A\,B\,A\,B}\cdots\cdots\mathrm{A\,B\,A} & \mathrm{A\,B\,A\,B}\cdots\cdots\mathrm{A\,B\,A}\\ \underbrace{\times\times\times\times\cdots\cdots\times\times}_{\text{偶数回}}\bigcirc & \underbrace{\times\times\times\times\cdots\cdots\times\times}_{\text{偶数回}}\bigcirc\end{array}$$

このとき，$n=2k$（k は自然数）とおける。

1，3，……，$(2k-1)$ 回目のどこかで表を 1 回出し，$2k$ 回目で表を出せばよいから

$$p(n)=k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2^{n+1}}$$

[2]　B が 1 点で A が勝利するとき

コインを投げる人とコインの表裏の出方は次の 2 通りとなる。

(i)
$$\begin{array}{ccc}\mathrm{A\,B}\cdots\cdots\mathrm{A\,B\,B\,A} & \cdots\cdots\mathrm{B\,A\,A\,B} & \cdots\cdots\mathrm{A\,B\,A}\\ \underbrace{\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{奇数回}}\bigcirc & \underbrace{\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{奇数回}}\bigcirc & \underbrace{\times\times\cdots\cdots\times\times}_{\text{偶数回}}\bigcirc\end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccc}\mathrm{A\,B}\cdots\cdots\mathrm{B\,A\,A\,B} & \cdots\cdots\mathrm{A\,B\,B\,A} & \cdots\cdots\mathrm{A\,B\,A}\\ \underbrace{\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{偶数回}}\bigcirc & \underbrace{\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{奇数回}}\bigcirc & \underbrace{\times\times\cdots\cdots\times\times}_{\text{奇数回}}\bigcirc\end{array}$$

どちらも，$n=2k+1$（k は 2 以上の自然数）とおける。

(i) のとき，2，4，……，$2k$ 回目のどこかで表を 2 回出し，$(2k+1)$ 回目で表を出せばよい。

(ii) のとき，1，3，……，$(2k-1)$ 回目のどこかで表を 2 回出し，$(2k+1)$ 回目で表を出せばよい。

以上から　　$p(n)={}_k\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}+{}_k\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$

$$=\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$$

$p(1)=0$，$p(3)=0$ であるから，これは $n=1$，3 のときも成り立つ。

[1]，[2] より　　$p(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\text{ が偶数のとき})\\ \dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$

(2)　$\sum_{n=1}^{2N}p(n)=\sum_{n=1}^{N}\{p(2n)+p(2n-1)\}=\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{2n}{2^{2n+1}}+\frac{(2n-2)(2n-4)}{2^{2n+1}}\right\}$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{4^n}+2\sum_{n=1}^{N}\frac{(n-1)(n-2)}{4^n}$$

ここで，$T(N)=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{4^n}$，$U(N)=\sum_{n=1}^{N}\frac{(n-1)(n-2)}{4^n}$ とおく。

$$T(N)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{N-1}{4^{N-1}}+\frac{N}{4^N}$$

$$\frac{1}{4}T(N)=\qquad\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{N-2}{4^{N-1}}+\frac{N-1}{4^N}+\frac{N}{4^{N+1}}$$

これらより　　$T(N)-\frac{1}{4}T(N)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4^n}-\frac{N}{4^{N+1}}$

$$\frac{3}{4}T(N)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^N}{1-\frac{1}{4}}-\frac{N}{4^{N+1}}$$

$$T(N)=\frac{4}{9}\left(1-\frac{1}{4^N}\right)-\frac{N}{3\cdot4^N}$$

同様に　$U(N)-\frac{1}{4}U(N)=\sum_{n=1}^{N}\frac{(n-1)(n-2)}{4^n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{(n-1)(n-2)}{4^{n+1}}$

$$\frac{3}{4}U(N)=\sum_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n-2)-(n-2)(n-3)}{4^n}-\frac{(N-1)(N-2)}{4^{N+1}}$$

$$U(N)=\frac{4}{3}\sum_{n=2}^{N}\frac{2n-4}{4^n}-\frac{N^2-3N+2}{3\cdot4^N}$$

$$=\frac{8}{3}\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{4^n}-\frac{16}{3}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{4^n}-\frac{N^2}{3\cdot4^N}+\frac{N}{4^N}-\frac{2}{3\cdot4^N}$$

$$=\frac{8}{3}\left\{T(N)-\frac{1}{4}\right\}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N-1}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{N^2}{3\cdot4^N}+\frac{N}{4^N}-\frac{2}{3\cdot4^N}$$

$$=\frac{8}{3}T(N)-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\left(1-\frac{1}{4^{N-1}}\right)-\frac{N^2}{3\cdot4^N}+\frac{N}{4^N}-\frac{2}{3\cdot4^N}$$

よって　$\lim_{N\to\infty}T(N)=\frac{4}{9}$，$\lim_{N\to\infty}U(N)=\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{9}-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{27}$

ゆえに　$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{2N}p(n)=\lim_{N\to\infty}\{T(N)+2U(N)\}=\frac{4}{9}+2\cdot\frac{2}{27}=\frac{16}{27}$

一方　$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{2N+1}p(n)=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{2N}p(n)+p(2N+1)\right\}=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{2N}p(n)+\frac{2N(2N-2)}{2^{2N+3}}\right\}$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{2N}p(n)+\frac{1}{2}\cdot\frac{N^2-N}{4^N}\right\}=\frac{16}{27}$$

以上から　$\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{16}{27}$

注意　本解答では $\lim_{N\to\infty}\frac{N^m}{a^N}=0$ ($a>1$，m は自然数) を，証明をせずに用いた。

9

解答　$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-2}$，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$

解説

$x^2-x+\frac{n-1}{n^2}=\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-1+\frac{1}{n}\right)$ であるから，$x=\frac{1}{n}$，$1-\frac{1}{n}$ をそれぞれ

$x^{2n}=P_n(x)\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-1+\frac{1}{n}\right)+a_nx+b_n$　に代入すると

$$\frac{1}{n}a_n+b_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}\ \cdots\cdots①,\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)a_n+b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\ \cdots\cdots②$$

②−① から

$\left(1-\frac{2}{n}\right)a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}$　　よって　$\left(1-\frac{2}{n}\right)a_n=\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^2-\frac{1}{n^{2n}}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{-1}=e^{-1}$　であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-2}$

よって，① から　$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{2n}}-\frac{1}{n}a_n\right)=0$

10

解答　(1)　$P_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}$　　(2)　$\frac{1}{2}+\frac{1}{2e}$

解説

(1)　0 が 0 として伝わるのは，$2n$ 回の伝達のうち，$2k$ 回 ($0\leqq k\leqq n$) の逆転がある場合で，その確率を Q_{2k} とすると

$$Q_{2k}={}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{2n-2k}\left(\frac{1}{4n}\right)^{2k}$$

よって　$P_{2n}=\sum_{k=0}^{n}Q_{2k}=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{2n-2k}\left(\frac{1}{4n}\right)^{2k}$

また，二項定理により

$$(a+b)^{2n}=a^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_1a^{2n-1}b+{}_{2n}\mathrm{C}_2a^{2n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}b^{2n}$$

$$(a-b)^{2n}=a^{2n}-{}_{2n}\mathrm{C}_1a^{2n-1}b+{}_{2n}\mathrm{C}_2a^{2n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}b^{2n}$$

辺々を加えて

$$(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2(a^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_2a^{2n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}b^{2n})$$

すなわち　$\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}a^{2n-2k}b^{2k}=\frac{1}{2}(a+b)^{2n}+\frac{1}{2}(a-b)^{2n}$

この等式を用いて

$$P_{2n}=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)+\frac{1}{4n}\right\}^{2n}+\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)-\frac{1}{4n}\right\}^{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

(2)　$-\frac{1}{2n}=h$ とおくと，$n\to\infty$ のとき　$h\to-0$

よって　$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\lim_{h\to-0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}=\frac{1}{e}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}P_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2e}$

11

解答　(1)　$a_n=\frac{n}{n+1}$　　(2)　$B_n=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$，$C_n=\frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}$

(3)　$\frac{2}{e}$

解説

(1)　$f_n(x)=x^{n+1}(1-x)=x^{n+1}-x^{n+2}$ から　　$f_n'(x)=(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}$

よって，点 $(a_n,\ f_n(a_n))$ における接線の方程式は

$$y-(a_n)^{n+1}(1-a_n)=\{(n+1)(a_n)^n-(n+2)(a_n)^{n+1}\}(x-a_n)$$

これが原点を通るとき

$$0-(a_n)^{n+1}(1-a_n)=\{(n+1)(a_n)^n-(n+2)(a_n)^{n+1}\}(0-a_n)$$

ゆえに　$-(a_n)^{n+1}(1-a_n)=-(n+1)(a_n)^{n+1}+(n+2)(a_n)^{n+2}$

両辺を $(a_n)^{n+1}$ (>0) で割ると　$-(1-a_n)=-(n+1)+(n+2)a_n$

よって　$(n+1)a_n=n$　　$n+1>0$ から　$a_n=\frac{n}{n+1}$

(2)　$0\leqq x\leqq1$ の範囲で，$f_n(x)=x^{n+1}(1-x)\geqq0$ であるから

$$B_n=\int_0^1f_n(x)dx=\int_0^1(x^{n+1}-x^{n+2})dx=\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}-\frac{1}{n+3}x^{n+3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$0<\frac{n}{n+1}<1$ であるから　$0<a_n<1$

よって　$C_n=\int_0^{a_n}f_n(x)dx=\int_0^{\frac{n}{n+1}}(x^{n+1}-x^{n+2})dx=\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}-\frac{1}{n+3}x^{n+3}\right]_0^{\frac{n}{n+1}}$

$$=\frac{n^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}}-\frac{n^{n+3}}{(n+3)(n+1)^{n+3}}$$

$$=\frac{n^{n+2}\{(n+3)(n+1)-n(n+2)\}}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}=\frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}$$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}\times(n+2)(n+3)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=\frac{2}{e}$$

12

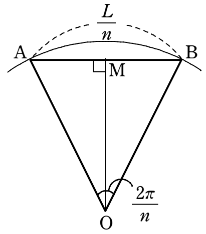
解答　(1)　$A_n=\frac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}$　　(2)　$L_n=L+2\pi r$，$S_n=A_n+Lr+\pi r^2$　　(3)　$\frac{1}{4\pi}$

解説

(1)　P_n に外接する円の中心を O とする。

P_n のある 1 辺を AB とし，その中点を M とする。

△OABは二等辺三角形であり，P_n は，△OABと合同な n 個の二等辺三角形に分割できる。



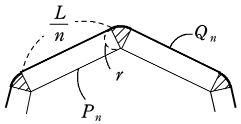
$\angle\mathrm{AOB}=\frac{2\pi}{n}$ であるから　　$\angle\mathrm{AOM}=\frac{\pi}{n}$

$\mathrm{AB}=\frac{L}{n}$ より　　$\mathrm{AM}=\frac{L}{2n}$

よって　　$\mathrm{OM}=\frac{\mathrm{AM}}{\tan\angle\mathrm{AOM}}=\frac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}$

ゆえに　　$A_n=n\cdot\triangle\mathrm{OAB}=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OM}=\frac{n}{2}\cdot\frac{L}{n}\cdot\frac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}$

(2)　Q_n における P_n の各頂点付近は右の図のようになっている。各頂点付近の斜線部分の扇形をすべて合わせると，半径 r の 1 つの円となる。



よって　　$L_n=L+2\pi r$

$$S_n=A_n+r\cdot\frac{L}{n}\cdot n+\pi r^2=A_n+Lr+\pi r^2$$

(3)　$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}$

$\frac{\pi}{n}=t$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}=\lim_{t\to+0}\frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to+0}\frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t=\frac{L^2}{4\pi}$$

よって　　$\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{L^2}{4\pi}$

ゆえに　　$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(L_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n+Lr+\pi r^2}{(L+2\pi r)^2}=\frac{\frac{L^2}{4\pi}+Lr+\pi r^2}{(L+2\pi r)^2}$

$$=\frac{L^2+4\pi Lr+4\pi^2r^2}{4\pi(L+2\pi r)^2}=\frac{(L+2\pi r)^2}{4\pi(L+2\pi r)^2}=\frac{1}{4\pi}$$

$\boxed{13}$

解答 (1) $a_n=2^n-1$ (2) $\tan\theta_n=\dfrac{2^n}{10\cdot2^{2n}-9\cdot2^n+2}$ (3) 略 (4) $\dfrac{1}{10}$

解説

(1) $a_{n+1}=2a_n+1$ を変形すると $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$$

したがって $a_n=2^n-1$

(2) $\overrightarrow{p_n}=(a_n,\ a_{n+1})$ と x 軸の正の向きとのなす角を α_n とおくと

$$\tan\alpha_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2a_n+1}{a_n}=2+\frac{1}{a_n}>0$$

また $0<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2}$

同様にして，$\overrightarrow{p_{n+1}}=(a_{n+1},\ a_{n+2})$ と x 軸の正の向きとのなす角を α_{n+1} とおくと

$$\tan\alpha_{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2+\frac{1}{a_{n+1}}>0$$

また $0<\alpha_{n+1}<\dfrac{\pi}{2}$

$a_{n+1}>a_n>0$ であるから $0<\dfrac{1}{a_{n+1}}<\dfrac{1}{a_n}$

よって $0<\tan\alpha_{n+1}<\tan\alpha_n$，$0<\alpha_{n+1}<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2}$

$\theta_n=\alpha_n-\alpha_{n+1}$，$\theta_n\neq\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\tan\theta_n=\tan(\alpha_n-\alpha_{n+1})=\frac{\tan\alpha_n-\tan\alpha_{n+1}}{1+\tan\alpha_n\tan\alpha_{n+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}}{1+\left(2+\dfrac{1}{a_n}\right)\left(2+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}+(2a_{n+1}+1)(2a_n+1)}$$

$$=\frac{(2a_n+1)-a_n}{a_n(2a_n+1)+(4a_n+3)(2a_n+1)}=\frac{a_n+1}{10{a_n}^2+11a_n+3}$$

$$=\frac{2^n}{10(2^n-1)^2+11(2^n-1)+3}=\frac{2^n}{10\cdot2^{2n}-9\cdot2^n+2}$$

(3) $0<\alpha_{n+1}<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\theta_n=\alpha_n-\alpha_{n+1}$ であるから $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$

よって $0<\theta_n<\tan\theta_n$

(2) から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{10\cdot2^{2n}-9\cdot2^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2^n}}{10-\dfrac{9}{2^n}+\dfrac{2}{2^{2n}}}=0$

したがって，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n\theta_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\cdot2^n\sin\theta_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\cdot2^n\cos\theta_n\tan\theta_n\right)$

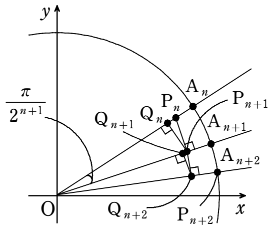
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\cdot\cos\theta_n\cdot\frac{2^{2n}}{10\cdot2^{2n}-9\cdot2^n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\cdot\cos\theta_n\cdot\frac{1}{10-\dfrac{9}{2^n}+\dfrac{2}{2^{2n}}}\right)=\frac{1}{10}$$

$\boxed{14}$

解答 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{2}{\pi}$

解説



(1) $\angle A_nOA_{n+1}=\dfrac{\pi}{2^n}-\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

よって $P_{n+1}Q_n=OP_{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

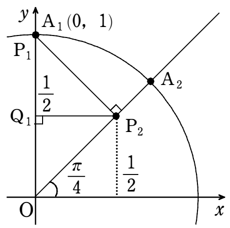
$=OP_n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ ……①

また $OP_{n+1}=OP_n\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

ゆえに $\dfrac{P_{n+2}Q_{n+1}}{P_{n+1}Q_n}=\dfrac{OP_{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{OP_n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$

$$=\frac{OP_n\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{OP_n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}$$



(2) (1) から $P_{n+2}Q_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_{n+1}Q_n$

ここで，右の図から $P_2Q_1=\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\{P_{n+1}Q_n\}$ は 初項 $P_2Q_1=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから $P_{n+1}Q_n=\dfrac{1}{2^n}$

ここで，① から $OP_n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=P_{n+1}Q_n$

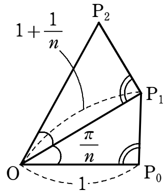
ゆえに $OP_n=\dfrac{\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\dfrac{\dfrac{1}{2^{n-1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}OP_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}$

$\boxed{15}$

解答 $(e-1)\sqrt{1+\pi^2}$

解説



$\triangle OP_0P_1$ において余弦定理により

$${a_1}^2=1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$$

よって $a_1=\sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n^2}-2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cos\dfrac{\pi}{n}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)}$

条件 (A) から $\triangle OP_{k-1}P_k\backsim\triangle OP_0P_1$ $(2\leqq k\leqq n)$

ゆえに，$\triangle OP_{k-1}P_k$ において $OP_k=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)OP_{k-1}$ $(1\leqq k\leqq n)$

よって $OP_{k-1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}OP_0$

ゆえに $a_k=\dfrac{OP_{k-1}}{OP_0}\times a_1=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}a_1$

数列 $\{a_k\}$ は初項 a_1，公比 $1+\dfrac{1}{n}$ の等比数列であるから

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1}=n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}\sqrt{\frac{1}{n^2}+2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}\sqrt{1+2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{n}}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}}$$

ここで，$\dfrac{1}{n}=h$ とおくと，$n\longrightarrow\infty$ のとき $h\longrightarrow0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{n}}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h\pi}{h^2}=\lim_{h\to0}\left(\frac{\sin h\pi}{h\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{1+\cos h\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=(e-1)\sqrt{1+\pi^2}$

$\boxed{16}$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$g(x)=f(x)-x$ とおくと，$g(x)$ は連続で $f(x)=g(x)+x$

(1) 不等式により $|g(x)-g(a)+x-a|\leqq\dfrac{2}{3}|x-a|$

よって $-\dfrac{2}{3}|x-a|\leqq g(x)-g(a)+x-a\leqq\dfrac{2}{3}|x-a|$

ここで $h(x)=-\dfrac{2}{3}|x-a|-x+a+g(a)$

$\leqq g(x)\leqq\dfrac{2}{3}|x-a|-x+a+g(a)=k(x)$

のように $h(x)$，$k(x)$ を定める。

$x\longrightarrow-\infty$ のとき $-x=t$ とおくと $t\longrightarrow\infty$

このとき $-\dfrac{2}{3}|x-a|-x=-\dfrac{2}{3}|t+a|+t=t\left(-\dfrac{2}{3}\left|1+\dfrac{a}{t}\right|+1\right)\longrightarrow\infty$

よって，$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$ であるから　$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$

また，$x \longrightarrow \infty$ のとき　$\frac{2}{3}|x-a| - x = x\left(\frac{2}{3}\left|1-\frac{a}{x}\right|-1\right) \longrightarrow -\infty$

よって，$\lim_{x \to \infty} k(x) = -\infty$ であるから　$\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$

すなわち　$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$，$\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$

ゆえに，中間値の定理により $g(c)=0$ すなわち $f(c)=c$ となる実数 c が存在し，曲線 $y=f(x)$ は直線 $y=x$ と必ず交わる。

(2)　x_1，x_2 を任意の実数とし，$x_1 > x_2$ とする。

$$\begin{aligned} g(x_1)-g(x_2) &= f(x_1)-x_1-\{f(x_2)-x_2\} \\ &= f(x_1)-f(x_2)-(x_1-x_2) \end{aligned}$$

$|f(x_1)-f(x_2)| \leqq \frac{2}{3}|x_1-x_2|$ が成り立つならば

$$f(x_1)-f(x_2) \leqq \frac{2}{3}(x_1-x_2)$$

両辺から x_1-x_2 を引いて

$$f(x_1)-f(x_2)-(x_1-x_2) \leqq -\frac{1}{3}(x_1-x_2)$$

すなわち　$g(x_1)-g(x_2) \leqq -\frac{1}{3}(x_1-x_2)$

$x_1 > x_2$ より $-\frac{1}{3}(x_1-x_2) < 0$ であるから

$$g(x_1)-g(x_2) < 0 \quad \text{すなわち} \quad g(x_1) < g(x_2)$$

$x_2 < x_1 \Longrightarrow g(x_2) > g(x_1)$ であるから，$g(x)$ は単調に減少し，(1) の交点はただ 1 つしかない。