

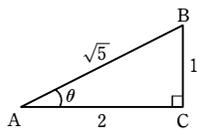
第3章～三角比～ 第1講 例題

1

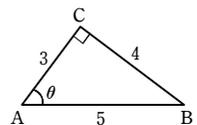
解答 (1)  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \tan \theta = \frac{1}{2}$   
 (2)  $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$

解説

(1)  $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$   
 $\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$



(2)  $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$   
 $\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$   
 $\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$



2

解答 (1)  $k \cos \theta$  (2)  $k \sin \theta \cos \theta$   
 (3)  $k \sin^2 \theta$  ( $k \sin \theta \cos \theta \tan \theta$  または  $k(1 - \cos^2 \theta)$  でもよい)

解説

(1)  $\triangle ABC$  において

$$AC = AB \cos \theta = k \cos \theta$$

(2)  $\triangle ADC$  において

$$CD = AC \sin \theta = (k \cos \theta) \sin \theta = k \sin \theta \cos \theta$$

(3) (解1)  $\triangle ABC$  において

$$BC = AB \sin \theta = k \sin \theta$$

$$\text{また } \angle BCD = 90^\circ - \angle ACD = \angle CAD = \theta$$

よって,  $\triangle BCD$  において

$$BD = BC \sin \theta = (k \sin \theta) \sin \theta = k \sin^2 \theta$$

(解2)  $\angle BCD = \theta$  から,  $\triangle BCD$  において

$$BD = CD \tan \theta = (k \sin \theta \cos \theta) \tan \theta = k \sin \theta \cos \theta \tan \theta$$

(解3)  $\triangle ADC$  において

$$AD = AC \cos \theta = (k \cos \theta) \cos \theta = k \cos^2 \theta$$

$$\text{よって } BD = AB - AD = k - k \cos^2 \theta = k(1 - \cos^2 \theta)$$

注意  $(\sin \theta)^2, (\cos \theta)^2$  は, それぞれ  $\sin^2 \theta, \cos^2 \theta$  と書く。

参考 次の項目で学ぶ三角比の相互関係  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  を用いると,

(3) で求めた3つの解

$$k \sin^2 \theta, k \sin \theta \cos \theta \tan \theta, k(1 - \cos^2 \theta)$$

はどれも同じ形になる。

3

解答 (1)  $\cos 17^\circ$  (2)  $\sin 36^\circ$  (3)  $\frac{1}{\tan 40^\circ}$

解説

(1)  $\sin 73^\circ = \sin(90^\circ - 17^\circ) = \cos 17^\circ$   
 (2)  $\cos 54^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ$   
 (3)  $\tan 50^\circ = \tan(90^\circ - 40^\circ) = \frac{1}{\tan 40^\circ}$

4

解答 略

解説

$$A + B + C = 180^\circ \text{ であるから } A + B = 180^\circ - C$$

$$\text{よって } \sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{180^\circ - C}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$$

5

解答 (1)  $\cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}, \tan \theta = \frac{2}{3}$  (2)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta = \frac{2}{3}$

解説

(1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$$

$\cos \theta > 0$  であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{13}} \div \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{2}{3}$$

(2)  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{よって } \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$\cos \theta > 0$  であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

6

解答 (1) 2 (2) 0

解説

(1)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$   
 $= (\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$   
 $= 1 + 2\sin \theta \cos \theta + (1 - 2\sin \theta \cos \theta)$   
 $= 2$

(2)  $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta) - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$   
 $= 1 - \sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$   
 $= \cos^2 \theta - \cos^2 \theta$   
 $= 0$

7

解答 (1)  $\frac{1}{4}$  (2)  $\frac{3\sqrt{6}}{8}$  (3)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

解説

(1)  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$  の両辺を2乗すると

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{6}{4}$$

$$\text{よって } 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2}$$

$$\text{したがって } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

(2)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$   
 $= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$   
 $= \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$   
 $= \frac{3\sqrt{6}}{4} - \frac{3\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

(3)  $(\sin \theta - \cos \theta)^2$   
 $= \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$   
 $= 1 - 2\sin \theta \cos \theta$   
 $= 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$\text{よって, } \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

第1講 例題演習

1

- 解答 (1)  $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$   
 (2)  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \theta = \frac{1}{3}, \tan \theta = 2\sqrt{2}$   
 (3)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta = \frac{2}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

解説

- (1)  $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$   
 (2)  $AC = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$   
 よって  $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$   
 $\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$   
 (3)  $AB = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3$   
 よって  $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}, \tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2

- 解答 (1)  $BC = k \sin \theta$  (2)  $AC = k \cos \theta$  (3)  $AD = k \cos^2 \theta$   
 (4)  $CD = k \sin \theta \cos \theta$  (5)  $BD = k \sin^2 \theta$

解説

- (1)  $BC = AB \sin \theta = k \sin \theta$   
 (2)  $AC = AB \cos \theta = k \cos \theta$   
 (3)  $AD = AC \cos \theta = (k \cos \theta) \cos \theta = k \cos^2 \theta$   
 (4)  $CD = AC \sin \theta = (k \cos \theta) \sin \theta = k \sin \theta \cos \theta$   
 (5)  $\angle BCD = \theta$  であるから  $BD = BC \sin \theta = (k \sin \theta) \sin \theta = k \sin^2 \theta$

注意  $(\cos \theta)^2, (\sin \theta)^2$  は、それぞれ  $\cos^2 \theta, \sin^2 \theta$  と書く。

3

- 解答 (1)  $\cos 38^\circ$  (2)  $\sin 43^\circ$  (3)  $\frac{1}{\tan 19^\circ}$

解説

- (1)  $\sin 52^\circ = \sin(90^\circ - 38^\circ) = \cos 38^\circ$   
 (2)  $\cos 47^\circ = \cos(90^\circ - 43^\circ) = \sin 43^\circ$   
 (3)  $\tan 71^\circ = \tan(90^\circ - 19^\circ) = \frac{1}{\tan 19^\circ}$

4

- 解答 (1) 略 (2) 略

解説

$A + B + C = 180^\circ$  であるから  $B + C = 180^\circ - A$

よって  $\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$

- (1)  $\cos \frac{B+C}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}$   
 (2)  $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \tan \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} = 1$

5

- 解答 (1)  $\cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}$  (2)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$   
 (3)  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \theta = \frac{1}{3}$

解説

- (1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  
 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$   
 $\cos \theta > 0$  であるから  
 $\cos \theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{12^2}{13^2}} = \frac{12}{13}$   
 また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{12}$

- (2)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  
 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$   
 $\sin \theta > 0$  であるから  
 $\sin \theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$   
 また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- (3)  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から  
 $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (2\sqrt{2})^2 = 1 + 8 = 9$

- よって  $\cos^2 \theta = \frac{1}{9}$   
 $\cos \theta > 0$  であるから

- $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$   
 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  から  
 $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

6

- 解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略 (4) 略 (5) 略 (6) 略

解説

- (1) (左辺)  $= \cos \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta$  = (右辺)  
 (2) (左辺)  $= 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$  = (右辺)  
 (3) (左辺)  $= \tan^2 \theta \cdot \cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$  = (右辺)  
 (4) (左辺)  $= \frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 + \sin \theta)} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta} = 1 - \sin \theta$  = (右辺)  
 (5) (左辺)  $= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$  = (右辺)  
 (6) (左辺)  $= (\sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) + (4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$= 5(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 5$  = (右辺)

7

- 解答 (1)  $\frac{1}{8}$  (2)  $-\frac{9\sqrt{3}}{16}$  (3)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

解説

- (1)  $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  の両辺を2乗すると  $\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$   
 よって  $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$   
 したがって  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$

- (2)  $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$   
 $= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{16}$

- 別解  $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$   
 $= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{16}$

- (3)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$   
 $= 1 + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$

$\theta$  は鋭角なので  $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$

- よって、 $\sin \theta + \cos \theta > 0$  であるから  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

1

【解答】  $5\sqrt{3} + 6.5$  (m)

【解説】

右の図のように、木の頂点を D、木の根元を C とし、目の高さの直線上の点を A'、B'、C' とする。このとき、 $BC = x$  m、 $C'D = h$  m とすると

$$h = (10 + x) \tan 30^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

$$h = x \tan 45^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

② から  $x = h$

これを ① に代入して  $h = \frac{10+h}{\sqrt{3}}$

ゆえに  $(\sqrt{3}-1)h = 10$

よって  $h = \frac{10}{\sqrt{3}-1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 5(\sqrt{3}+1)$

したがって、求める木の高さは、目の高さを加えて

$$5(\sqrt{3}+1) + 1.5 = 5\sqrt{3} + 6.5 \text{ (m)}$$

2

【解答】  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ,  $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ,  $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$ ,

$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ,  $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ,  $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$

【解説】

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$  であるから

$$BD = BC - CD = \sqrt{3} - 1$$

$\triangle BED$  は  $\angle E = 90^\circ$  の直角二等辺三角形であるから

$$DE = BE = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

また、 $AD = \sqrt{2} AC = \sqrt{2}$  であるから

$$AE = AD + DE = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

よって、直角三角形 ABE において

$$\sin 15^\circ = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \div 2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \div 2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

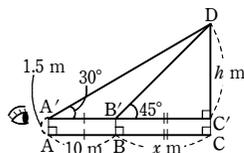
$$\tan 15^\circ = \frac{BE}{AE} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \div \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

また  $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$$



3

【解答】 (1)  $\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{\sqrt{15}}{3}$  (3)  $\frac{2\sqrt{15}}{9}$  (4)  $6\sqrt{15}$

【解説】

$$(1) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 3 \text{ であるから } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 3$$

$$\text{したがって } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$(2) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  より、 $\sin \theta > 0$ ,  $\cos \theta > 0$  であるから  $\sin \theta + \cos \theta > 0$

$$\text{よって } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$(3) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{15}}{9}$$

$$(4) \frac{1}{\sin^3 \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} = \frac{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}{\sin^3 \theta \cos^3 \theta} = \frac{2\sqrt{15}}{9} \div \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{15}}{9} \cdot 27 = 6\sqrt{15}$$

1

【解答】 (1)  $\frac{4+\sqrt{7}}{4}$  (2) 1 (3)  $\frac{2}{3}$

【解説】

$$(1) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ から } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (\sqrt{7})^2 = 8$$

$$\text{したがって } \cos^2 \theta = \frac{1}{8}$$

$$\theta \text{ は鋭角であるから、} \cos \theta > 0 \text{ より } \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{よって } \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\text{ゆえに } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2})^2(\sqrt{7}+1)^2}{4^2} = \frac{2(8+2\sqrt{7})}{16} = \frac{4+\sqrt{7}}{4}$$

【別解】 同様に  $\cos^2 \theta = \frac{1}{8}$

$$\tan \theta = \sqrt{7} \text{ から } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{7} \text{ ゆえに } \sin \theta = \sqrt{7} \cos \theta$$

$$\text{よって } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = ((\sqrt{7}+1)\cos \theta)^2 = (\sqrt{7}+1)^2 \cos^2 \theta = (8+2\sqrt{7}) \cdot \frac{1}{8} = \frac{4+\sqrt{7}}{4}$$

$$(2) \tan^2 \theta + (1 - \tan^4 \theta)(1 - \sin^2 \theta) = \tan^2 \theta + (1 + \tan^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \cos^2 \theta = \tan^2 \theta + \frac{1 - \tan^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta = \tan^2 \theta + 1 - \tan^2 \theta = 1$$

$$(3) \text{ (分子) } = \sin^4 \theta + 4\cos^2 \theta - \cos^4 \theta + 1 = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + 4\cos^2 \theta + 1 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + 4\cos^2 \theta + 1 = (1 - \cos^2 \theta) + 3\cos^2 \theta + 1 = 2(1 + \cos^2 \theta)$$

$$\text{よって (与式) } = \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{3(1 + \cos^2 \theta)} = \frac{2}{3}$$

第2講 例題

1

- 【解答】 (1)  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$   
 (2)  $\sin 180^\circ = 0$ ,  $\cos 180^\circ = -1$ ,  $\tan 180^\circ = 0$

【解説】

- (1) 右の図で、 $\angle AOP = 120^\circ$  とすると  
 $\angle POQ = 60^\circ$   
 半円の半径を  $r=2$  とすると、点 P の座標は

$$(-1, \sqrt{3})$$

そこで  $x=-1$ ,  $y=\sqrt{3}$  として

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

- (2) 右の図で、 $\angle AOP = 180^\circ$  とする。

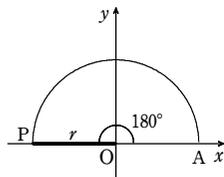
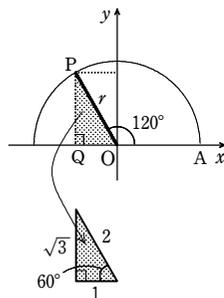
半円の半径を  $r=1$  とすると、点 P の座標は  
 $(-1, 0)$

そこで  $x=-1$ ,  $y=0$  として

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$



2

- 【解答】 (1) 0 (2) 2

【解説】

(1) (与式)  $= \cos(180^\circ - 10^\circ) + \cos(90^\circ - 20^\circ) + \sin(90^\circ - 10^\circ) - \sin(180^\circ - 20^\circ)$   
 $= -\cos 10^\circ + \sin 20^\circ + \cos 10^\circ - \sin 20^\circ = 0$

(2) (与式)  $= \tan(180^\circ - 35^\circ)\tan(90^\circ - 35^\circ) - 3\tan(180^\circ - 25^\circ)\tan(90^\circ - 25^\circ)$   
 $= (-\tan 35^\circ) \cdot \frac{1}{\tan 35^\circ} - 3(-\tan 25^\circ) \cdot \frac{1}{\tan 25^\circ}$   
 $= -1 + 3 = 2$

【別解】 (与式)  $= \tan(90^\circ + 55^\circ)\tan 55^\circ - 3\tan(90^\circ + 65^\circ)\tan 65^\circ$   
 $= -\frac{1}{\tan 55^\circ} \cdot \tan 55^\circ - 3\left(-\frac{1}{\tan 65^\circ}\right)\tan 65^\circ$   
 $= -1 + 3 = 2$

3

【解答】 (1)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2)  $(\cos \theta, \tan \theta) = \left(\frac{3\sqrt{5}}{7}, \frac{2\sqrt{5}}{15}\right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{7}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$

(3)  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

【解説】

(1)  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$\sin \theta \geq 0$  であるから

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2)  $\sin \theta = \frac{2}{7}$  から、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$  または  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である。

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{45}{49}$$

[1]  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき、 $\cos \theta > 0$  であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2/7}{3\sqrt{5}/7}$

$$= \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

[2]  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき、 $\cos \theta < 0$  であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{45}{49}} = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2/7}{-3\sqrt{5}/7}$

$$= -\frac{2}{3\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

[1], [2] から

$$(\cos \theta, \tan \theta) = \left(\frac{3\sqrt{5}}{7}, \frac{2\sqrt{5}}{15}\right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{7}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$$

(3)  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

よって  $\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ,  $\tan \theta = -\frac{4}{3} < 0$  であるから  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

ゆえに  $\cos \theta < 0$  よって  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

また  $\sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$

【別解】  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3}$  から  $\sin \theta = -\frac{4}{3} \cos \theta$  …… ①

① を  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  に代入して  $\left(-\frac{4}{3} \cos \theta\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$

よって  $\frac{25}{9} \cos^2 \theta = 1$  ゆえに  $\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ,  $\tan \theta < 0$  であるから  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

よって  $\cos \theta < 0$  ゆえに  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

① に代入して  $\sin \theta = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$

4

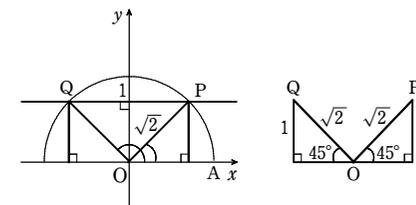
- 【解答】 (1)  $\theta = 45^\circ, 135^\circ$  (2)  $\theta = 150^\circ$  (3)  $\theta = 135^\circ$  (4)  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$   
 (5)  $\theta = 30^\circ$

【解説】

(1)  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  を満たす  $\theta$  は、

右の図で  $\angle AOP$  と  $\angle AOQ$  である。

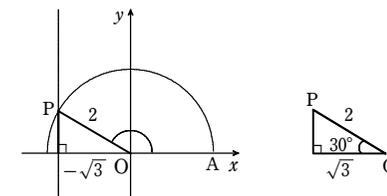
よって  $\theta = 45^\circ, 135^\circ$



(2)  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  を満たす

$\theta$  は、右の図で  $\angle AOP$  である。

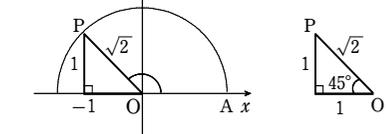
よって  $\theta = 150^\circ$



(3)  $\tan \theta = -1$  を満たす  $\theta$  は、

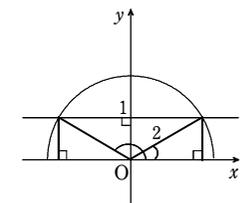
右の図で  $\angle AOP$  である。

よって  $\theta = 135^\circ$



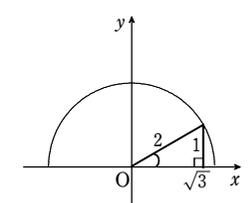
(4)  $2\sin \theta - 1 = 0$  から  $\sin \theta = \frac{1}{2}$

よって  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$



(5)  $3\tan \theta = \sqrt{3}$  から  $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって  $\theta = 30^\circ$

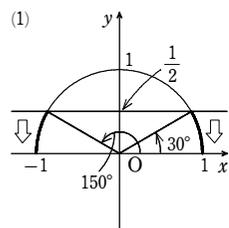


5

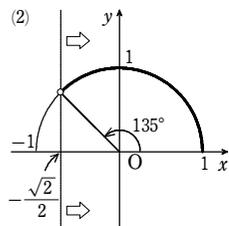
- 【解答】 (1)  $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ, 150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  (2)  $0^\circ \leq \theta < 135^\circ$  (3)  $30^\circ \leq \theta < 90^\circ$

【解説】

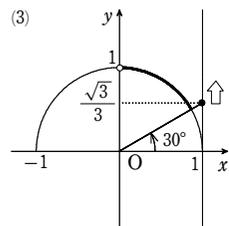
(1)  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  のとき  $\theta = 30^\circ, (180^\circ - 30^\circ) = 150^\circ$   
よって  $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ, 150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$



(2)  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  のとき  $\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$   
よって  $0^\circ \leq \theta < 135^\circ$



(3)  $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$  のとき  $\theta = 30^\circ$   
よって  $30^\circ \leq \theta < 90^\circ$



6

解答  $\theta = 60^\circ, 180^\circ$

解説

$$\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} = 0 \text{ から } (1 - \cos^2 \theta) - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{よって } 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0 \\ (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ であるから } \cos \theta = \frac{1}{2}, -1$$

$$\text{よって } \theta = 60^\circ, 180^\circ$$

7

解答 (1)  $60^\circ < \theta \leq 180^\circ$  (2)  $30^\circ < \theta < 45^\circ, 135^\circ < \theta < 150^\circ$

解説

$$(1) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ であるから } 2(1 - \cos^2 \theta) - 3\cos \theta > 0$$

$$\text{整理すると } 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2 < 0 \\ \cos \theta = t \text{ とおくと, } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } -1 \leq t \leq 1 \text{ ..... ①}$$

$$\text{不等式は } 2t^2 + 3t - 2 < 0 \\ \text{ゆえに } (t+2)(2t-1) < 0$$

$$\text{よって } -2 < t < \frac{1}{2}$$

$$\text{① との共通範囲を求めて } -1 \leq t < \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに, } -1 \leq \cos \theta < \frac{1}{2} \text{ を解いて } 60^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

$$(2) \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ であるから } 4(1 - \sin^2 \theta) + (2 + 2\sqrt{2})\sin \theta > 4 + \sqrt{2}$$

$$\text{整理すると } 4\sin^2 \theta - (2 + 2\sqrt{2})\sin \theta + \sqrt{2} < 0$$

$$\sin \theta = t \text{ とおくと, } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } 0 \leq t \leq 1 \text{ ..... ①}$$

$$\text{不等式は } 4t^2 - (2 + 2\sqrt{2})t + \sqrt{2} < 0 \\ \text{ゆえに } (2t-1)(2t-\sqrt{2}) < 0$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{① との共通範囲は } \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{1}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ を解いて}$$

$$30^\circ < \theta < 45^\circ, 135^\circ < \theta < 150^\circ$$

8

解答  $\theta = 60^\circ$  で最大値 8,  $\theta = 180^\circ$  で最小値 -1

解説

$$y = 4(1 - \cos^2 \theta) + 4\cos \theta + 3 = -4\cos^2 \theta + 4\cos \theta + 7 \\ \cos \theta = x \text{ とおくと}$$

$$y = -4x^2 + 4x + 7 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 8$$

$$\text{また, } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ から } -1 \leq x \leq 1$$

よって,  $y$  は

$$x = \frac{1}{2} \text{ で最大値 } 8,$$

$$x = -1 \text{ で最小値 } -1$$

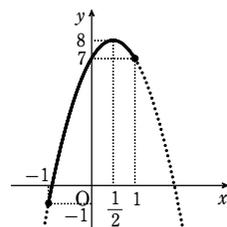
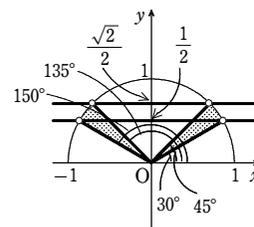
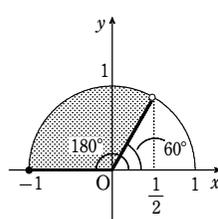
をとる。

$$x = \frac{1}{2} \text{ すなわち } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ のとき } \theta = 60^\circ$$

$$x = -1 \text{ すなわち } \cos \theta = -1 \text{ のとき } \theta = 180^\circ$$

したがって  $\theta = 60^\circ$  で最大値 8

$$\theta = 180^\circ \text{ で最小値 } -1$$



1

解答

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

解説

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2

解答 (1) 0 (2) 0 (3) 1 (4) 4

解説

$$(1) \cos 160^\circ - \cos 110^\circ + \sin 70^\circ - \sin 20^\circ \\ = \cos(180^\circ - 20^\circ) - \cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ \\ = -\cos 20^\circ + \sin 20^\circ + \cos 20^\circ - \sin 20^\circ = 0$$

$$(2) \sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ \\ \sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ \\ \cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ \\ = -\cos(90^\circ - 40^\circ) = -\sin 40^\circ \\ \text{よって } \sin 140^\circ \sin 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 130^\circ \\ = \sin 40^\circ \cos 40^\circ + \cos 40^\circ \cdot (-\sin 40^\circ) = 0$$

$$(3) \cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ \\ \sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ \\ \cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ \\ \text{よって 与式} = \sin 10^\circ \sin 10^\circ - \cos 10^\circ (-\cos 10^\circ) = \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1$$

$$(4) \tan 155^\circ = \tan(180^\circ - 25^\circ) = -\tan 25^\circ \\ \tan 115^\circ = \tan(180^\circ - 65^\circ) = -\tan 65^\circ \\ \text{よって } (\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 - (\tan 155^\circ - \tan 115^\circ)^2 \\ = (\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 - (-\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 \\ = (\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 - (\tan 25^\circ - \tan 65^\circ)^2 \\ = 4\tan 25^\circ \tan 65^\circ = 4\tan 25^\circ \tan(90^\circ - 25^\circ) \\ = 4\tan 25^\circ \cdot \frac{1}{\tan 25^\circ} = 4$$

3

解答 (1)  $\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$  または  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \theta = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

第2講 例題演習

(2)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$  (3)  $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

(4)  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan \theta = 2\sqrt{6}$

解説

(1)  $\sin \theta = \frac{3}{4}$  から,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  または  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき,  $\cos \theta > 0$  であるから

$\cos \theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$\cos \theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

(2)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\sin \theta \geq 0$  であるから  $\sin \theta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times (-2) = -\sqrt{3}$

参考  $\theta = 120^\circ$  である.

(3)  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (-3)^2 = 10$  よって  $\cos^2 \theta = \frac{1}{10}$

$\tan \theta < 0$  であるから,  $\theta$  は鈍角で  $\cos \theta < 0$

ゆえに  $\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

また  $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

(4)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$

$\sin \theta \geq 0$  であるから  $\sin \theta = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \div \frac{1}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \times 5 = 2\sqrt{6}$

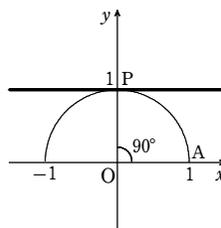
4

解答 (1)  $\theta = 90^\circ$  (2)  $\theta = 60^\circ$  (3)  $\theta = 60^\circ$  (4)  $\theta = 45^\circ, 135^\circ$

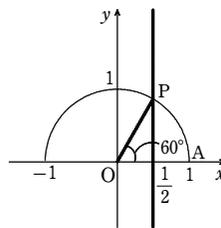
(5)  $\theta = 135^\circ$  (6)  $\theta = 150^\circ$

解説

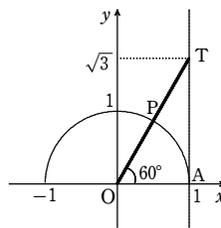
(1) 半径1の半円周上で, y座標が1となる点は, 図の点Pである. 求める  $\theta$  は,  $\angle AOP$  であるから  $\theta = 90^\circ$



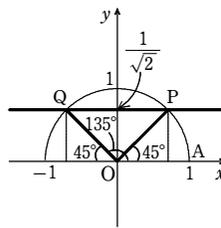
(2) 半径1の半円周上で, x座標が  $\frac{1}{2}$  となる点は, 図の点Pである. 求める  $\theta$  は,  $\angle AOP$  であるから  $\theta = 60^\circ$



(3) 直線  $x=1$  上で, y座標が  $\sqrt{3}$  となる点を T とすると, 直線 OT と半径1の半円の交点は, 図の点Pである. 求める  $\theta$  は,  $\angle AOP$  であるから  $\theta = 60^\circ$

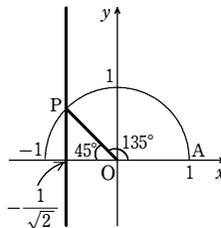


(4)  $2\sin \theta = \sqrt{2}$  から  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
半径1の半円周上で, y座標が  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  となる点は, 図の2点P, Qである. 求める  $\theta$  は,  $\angle AOP$  と  $\angle AOQ$  であるから  $\theta = 45^\circ, 135^\circ$



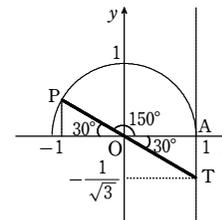
(5)  $\sqrt{2} \cos \theta + 1 = 0$  から  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

半径1の半円周上で, x座標が  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  となる点は, 図の点Pである. 求める  $\theta$  は,  $\angle AOP$  であるから  $\theta = 135^\circ$



(6)  $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$  から  $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

直線  $x=1$  上で, y座標が  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  となる点を T とすると, 直線 OT と半径1の半円の交点は, 図の点Pである. 求める  $\theta$  は,  $\angle AOP$  であるから  $\theta = 150^\circ$



5

解答 (1)  $45^\circ < \theta < 135^\circ$  (2)  $0^\circ \leq \theta < 30^\circ, 150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  (3)  $150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

(4)  $135^\circ < \theta \leq 180^\circ$  (5)  $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$  (6)  $60^\circ \leq \theta < 90^\circ$

(7)  $30^\circ < \theta \leq 60^\circ, 120^\circ \leq \theta < 150^\circ$  (8)  $120^\circ \leq \theta < 150^\circ$

(9)  $0^\circ \leq \theta < 60^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$

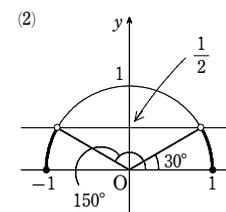
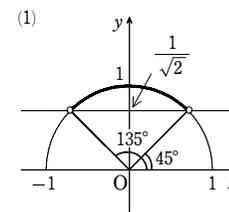
解説

(1)  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 45^\circ, 135^\circ$

図から, 不等式の解は  $45^\circ < \theta < 135^\circ$

(2)  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

図から, 不等式の解は  $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ, 150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

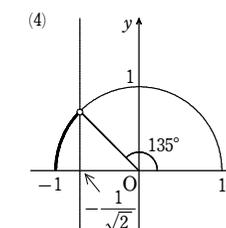
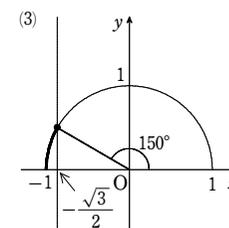


(3)  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 150^\circ$

図から, 不等式の解は  $150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

(4)  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 135^\circ$

図から, 不等式の解は  $135^\circ < \theta \leq 180^\circ$



(5)  $\tan \theta = 0$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

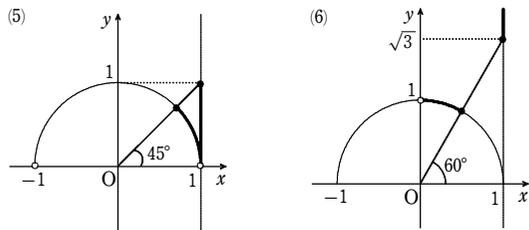
$\tan \theta = 1$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 45^\circ$

図から, 不等式の解は  $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$

(6)  $\tan \theta = \sqrt{3}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 60^\circ$

第2講 例題演習

図から、不等式の解は  $60^\circ \leq \theta < 90^\circ$



(7)  $1 < 2\sin\theta \leq \sqrt{3}$  から  $\frac{1}{2} < \sin\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

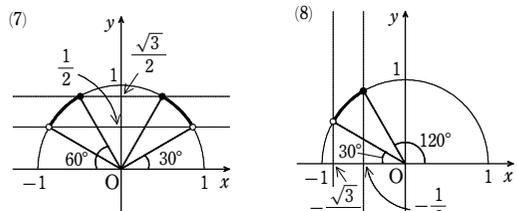
図から、不等式の解は  $30^\circ < \theta \leq 60^\circ, 120^\circ \leq \theta < 150^\circ$

(8)  $1 \leq -2\cos\theta < \sqrt{3}$  から  $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta \leq -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 150^\circ$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 120^\circ$

図から、不等式の解は  $120^\circ \leq \theta < 150^\circ$

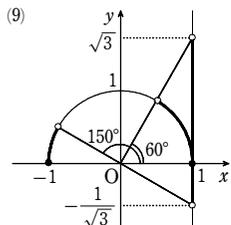


(9)  $-1 < \sqrt{3}\tan\theta < 3$  から  $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan\theta < \sqrt{3}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 150^\circ$

$\tan\theta = \sqrt{3}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 60^\circ$

図から、不等式の解は  $0^\circ \leq \theta < 60^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$



6

解答 (1)  $\theta = 60^\circ$  (2)  $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$

解説

(1)  $4\sin^2\theta - 4\cos\theta - 1 = 0$  から  $4(1 - \cos^2\theta) - 4\cos\theta - 1 = 0$

よって  $4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$

ゆえに  $(2\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 3) = 0$  …… ①

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$  であるから  $2\cos\theta + 3 \neq 0$

よって、①から  $2\cos\theta - 1 = 0$  すなわち  $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 60^\circ$

(2)  $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$  より  $2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$

整理して  $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

よって  $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

ゆえに  $\sin\theta = 1, \frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから

$\sin\theta = 1$  より  $\theta = 90^\circ$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$  より  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

したがって、求める  $\theta$  は  $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$

7

解答 (1)  $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ, \theta = 180^\circ$  (2)  $0^\circ \leq \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$

解説

(1)  $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$  であるから  $2(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta - 1 \leq 0$

整理すると  $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \geq 0$

$\cos\theta = t$  とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $-1 \leq t \leq 1$  …… ①

不等式は  $2t^2 + t - 1 \geq 0$  ゆえに  $(t+1)(2t-1) \geq 0$

よって  $t \leq -1, \frac{1}{2} \leq t$

①との共通範囲を求めて  $t = -1, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$

$t = -1$  すなわち  $\cos\theta = -1$  を解いて  $\theta = 180^\circ$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  すなわち  $\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq 1$  を解いて

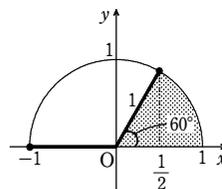
$0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

以上から  $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ, \theta = 180^\circ$

(2)  $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$  であるから  $2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta < 3$

整理すると  $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 > 0$

$\sin\theta = t$  とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $0 \leq t \leq 1$  …… ①



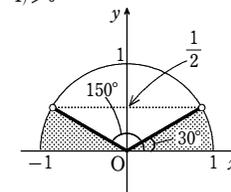
不等式は  $2t^2 - 3t + 1 > 0$  ゆえに  $(2t-1)(t-1) > 0$

よって  $t < \frac{1}{2}, 1 < t$

①との共通範囲を求めて  $0 \leq t < \frac{1}{2}$

求める解は、 $0 \leq t < \frac{1}{2}$  すなわち  $0 \leq \sin\theta < \frac{1}{2}$

を解いて  $0^\circ \leq \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$



8

解答 (1)  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$  のとき最大値 0;  $\theta = 90^\circ$  のとき最小値 -3

(2)  $\theta = 0^\circ$  のとき最大値 5,  $\theta = 90^\circ$  のとき最小値 -1

(3)  $\theta = 120^\circ$  のとき最大値  $\frac{5}{4}$ ,  $\theta = 0^\circ$  のとき最小値 -1

解説

(1)  $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$  であるから

$y = (1 - \sin^2\theta) - 2\sin\theta - 1 = -\sin^2\theta - 2\sin\theta$

$\sin\theta = t$  とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき

$0 \leq t \leq 1$  …… ①

$y$  を  $t$  の式で表すと

$y = -t^2 - 2t = -(t+1)^2 + 1$

①の範囲において、 $y$  は

$t = 0$  で最大値 0,

$t = 1$  で最小値 -3

をとる。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから

$t = 0$  となるのは、 $\sin\theta = 0$  から  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

$t = 1$  となるのは、 $\sin\theta = 1$  から  $\theta = 90^\circ$

したがって

$\theta = 0^\circ, 180^\circ$  のとき最大値 0;  $\theta = 90^\circ$  のとき最小値 -3

(2)  $\sin\theta = t$  とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  のとき

$0 \leq t \leq 1$  …… ①

$y$  を  $t$  の式で表すと

$y = 2t^2 - 8t + 5 = 2(t-2)^2 - 3$

①の範囲において、 $y$  は

$t = 0$  で最大値 5,

$t = 1$  で最小値 -1

をとる。 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  であるから

$t = 0$  となるのは、 $\sin\theta = 0$  から  $\theta = 0^\circ$

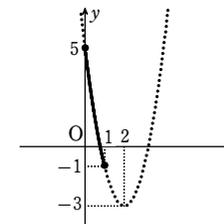
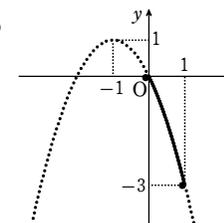
$t = 1$  となるのは、 $\sin\theta = 1$  から  $\theta = 90^\circ$

したがって

$\theta = 0^\circ$  のとき最大値 5,  $\theta = 90^\circ$  のとき最小値 -1

(3)  $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$  であるから

$y = \sin^2\theta - \cos\theta = (1 - \cos^2\theta) - \cos\theta = -\cos^2\theta - \cos\theta + 1$



$\cos\theta = t$  とおくと,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  
 $-1 \leq t \leq 1$  …… ①

$y$  を  $t$  の式で表すと

$$y = -t^2 - t + 1 = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

①の範囲において,  $y$  は

$$t = -\frac{1}{2} \text{ で最大値 } \frac{5}{4},$$

$$t = 1 \text{ で最小値 } -1$$

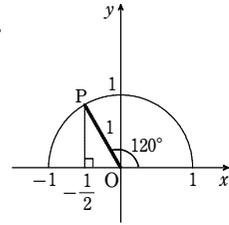
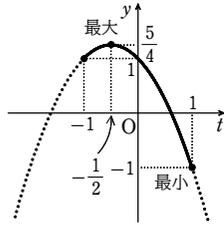
をとる.  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから

$$t = -\frac{1}{2} \text{ となるのは, } \cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ から } \theta = 120^\circ$$

$$t = 1 \text{ となるのは, } \cos\theta = 1 \text{ から } \theta = 0^\circ$$

よって  $\theta = 120^\circ$  のとき最大値  $\frac{5}{4}$ ,

$\theta = 0^\circ$  のとき最小値  $-1$



1

- 解答 (1)  $2 \leq \sin\theta + 2 \leq 3$  (2)  $-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$  (3)  $-1 \leq 2\sin\theta - 1 \leq 1$   
 (4)  $-2 \leq -3\cos\theta + 1 \leq 4$  (5)  $1 \leq 2\tan\theta + 1 \leq 2\sqrt{3} + 1$   
 (6)  $\tan^2\theta + 1 \geq 1$

解説

- (1)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $0 \leq \sin\theta \leq 1$   
 各辺に 2 を加えて  $2 \leq \sin\theta + 2 \leq 3$   
 (2)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$   
 各辺に 2 を掛けて  $-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$   
 (3)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $0 \leq \sin\theta \leq 1$   
 各辺に 2 を掛けて  $0 \leq 2\sin\theta \leq 2$   
 各辺から 1 を引いて  $-1 \leq 2\sin\theta - 1 \leq 1$   
 (4)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$   
 各辺に  $-3$  を掛けて  $-3 \leq -3\cos\theta \leq 3$   
 各辺に 1 を加えて  $-2 \leq -3\cos\theta + 1 \leq 4$   
 (5)  $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$  のとき  $0 \leq \tan\theta \leq \sqrt{3}$   
 各辺に 2 を掛けて  $0 \leq 2\tan\theta \leq 2\sqrt{3}$   
 各辺に 1 を加えて  $1 \leq 2\tan\theta + 1 \leq 2\sqrt{3} + 1$   
 (6)  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  のとき  $\tan\theta \geq 0$   
 両辺を 2 乗して  $\tan^2\theta \geq 0$   
 両辺に 1 を加えて  $\tan^2\theta + 1 \geq 1$

2

- 解答 (1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) 1

解説

(1) (与式)  $= \sin\theta \sin\theta - \cos\theta(-\cos\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) (与式)  $= \cos^2\theta + \sin^2\theta + (-\sin\theta)^2 + (-\cos\theta)^2$   
 $= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta$   
 $= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2$

(3)  $\cos 124^\circ = \cos(180^\circ - 56^\circ) = -\cos 56^\circ$   
 $\cos 146^\circ = \cos(90^\circ + 56^\circ) = -\sin 56^\circ$

よって (与式)  $= \cos 56^\circ(-\cos 56^\circ) + \sin 56^\circ(-\sin 56^\circ)$   
 $= -\cos^2 56^\circ - \sin^2 56^\circ$   
 $= -(\sin^2 56^\circ + \cos^2 56^\circ) = -1$

(4)  $\tan 130^\circ = \tan(90^\circ + 40^\circ) = -\frac{1}{\tan 40^\circ}$

よって (与式)  $= \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \left(-\frac{1}{\tan 40^\circ}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \left(-\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\right)^2$   
 $= \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \frac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} = \frac{1 - \cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} = \frac{\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} = 1$

3

- 解答 (1)  $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$  (2)  $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$  (3)  $-\frac{4+\sqrt{7}}{3}$

解説

(1)  $\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{2}$  から  $\cos\theta = \frac{1}{2} - \sin\theta$

これを  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  に代入すると  $\sin^2\theta + \left(\frac{1}{2} - \sin\theta\right)^2 = 1$

整理して  $2\sin^2\theta - \sin\theta - \frac{3}{4} = 0$

よって  $8\sin^2\theta - 4\sin\theta - 3 = 0$  これを解くと  $\sin\theta = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  より  $0 \leq \sin\theta \leq 1$  であるから  $\sin\theta = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$

(2) (1) より  $\cos\theta = \frac{1}{2} - \frac{1 + \sqrt{7}}{4} = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$

(3)  $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1 + \sqrt{7}}{4}}{\frac{1 - \sqrt{7}}{4}} = \frac{1 + \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}} = \frac{(1 + \sqrt{7})^2}{(1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})} = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{-6} = -\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$

4

- 解答 (ア) 2 (イ) 2 (ウ) 1 (エ)  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  (オ) 1

(カ)  $45^\circ, 135^\circ$  (キ)  $\frac{1}{2}$

解説

$\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = (1 - \sin^2\theta)^2$  であるから

$$y = \sin^4\theta + (1 - \sin^2\theta)^2 = (\sin^2\theta)^2 + (1 - \sin^2\theta)^2$$

$\sin^2\theta = t$  とおくと,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $0 \leq t \leq 1$  …… ①

$y$  を  $t$  の式で表すと

$$y = t^2 + (1 - t)^2 = 2t^2 - 2t + 1$$

$$= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

①の範囲において,  $y$  は

$$t = 0, 1 \text{ のとき最大値 } 1; t = \frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{2}$$

をとる.  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  では,  $\sin\theta \geq 0$  であるから

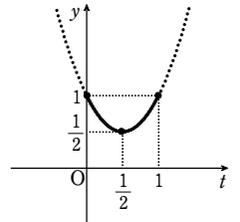
$$t = 0 \text{ となるのは, } \sin^2\theta = 0 \text{ から } \theta = 0^\circ, 180^\circ$$

$$t = 1 \text{ となるのは, } \sin^2\theta = 1 \text{ から } \theta = 90^\circ$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ となるのは, } \sin^2\theta = \frac{1}{2} \text{ から } \theta = 45^\circ, 135^\circ$$

よって  $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  のとき最大値 1

$$\theta = 45^\circ, 135^\circ \text{ のとき最小値 } \frac{1}{2}$$



1

【解答】  $x=60^\circ, y=30^\circ$  または  $x=120^\circ, y=30^\circ$

【解説】

第1式から  $(1-\sin^2 x) + (1-\cos^2 y) = \frac{1}{2}$

よって  $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}$  ……①

第2式から  $\sin x(-\cos y) = -\frac{3}{4}$

よって  $\sin x \cos y = \frac{3}{4}$  ……②

②の両辺を2乗して、①を代入すると  $\sin^2 x \left(\frac{3}{2} - \sin^2 x\right) = \frac{9}{16}$

整理して  $16\sin^4 x - 24\sin^2 x + 9 = 0$  ゆえに  $(4\sin^2 x - 3)^2 = 0$

よって  $\sin^2 x = \frac{3}{4}$   $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$  より  $\sin x \geq 0$  であるから  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって  $x=60^\circ, 120^\circ$

②から  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos y = \frac{3}{4}$  ゆえに  $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって  $y=30^\circ$

以上から  $x=60^\circ, y=30^\circ$  または  $x=120^\circ, y=30^\circ$

2

【解答】 (1)  $a=\sqrt{2}, \theta=45^\circ$

(2)  $\theta=0^\circ$  のとき最大値  $a+1, \theta=180^\circ$  のとき最小値  $-a+1$

【解説】

(1)  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  であるから

$$f(\theta) = \sin^2 \theta + a \cos \theta + 1 = -\cos^2 \theta + a \cos \theta + 2$$

$\cos \theta = t$  とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $-1 \leq t \leq 1$  ……①

$f(\theta)$  を  $t$  の式で表すと  $f(\theta) = -t^2 + at + 2 = -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 2$

$0 < \frac{a}{2} < 1$  であるから、①の範囲において、 $f(\theta)$  は  $t = \frac{a}{2}$  のとき最大値  $\frac{a^2}{4} + 2$  をと

る。最大値が  $\frac{5}{2}$  となるための条件は  $\frac{a^2}{4} + 2 = \frac{5}{2}$

ゆえに  $a^2 = 2$   $0 < a < 2$  であるから  $a = \sqrt{2}$

このとき、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  から  $\theta = 45^\circ$

(2)  $a \geq 2$  のとき、 $y=f(\theta)$  のグラフの軸について

$$t = \frac{a}{2} \geq 1$$

したがって、①の範囲において、 $f(\theta)$  は

$$t=1 \text{ で最大値 } a+1, t=-1 \text{ で最小値 } -a+1$$

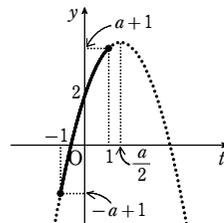
をとる。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから

$$t=1 \text{ となるのは、} \cos \theta = 1 \text{ から } \theta = 0^\circ$$

$$t=-1 \text{ となるのは、} \cos \theta = -1 \text{ から } \theta = 180^\circ$$

よって  $\theta = 0^\circ$  のとき最大値  $a+1,$

$\theta = 180^\circ$  のとき最小値  $-a+1$



3

【解答】 (1)  $30^\circ < \theta < 60^\circ, 120^\circ < \theta < 150^\circ$  (2) 略 (3)  $120^\circ < \theta < 150^\circ$

【解説】

(1) この2次方程式の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (-2\cos \theta)^2 - \{-2(1+\sqrt{3})\sin \theta + 4 + \sqrt{3}\}$$

$$= 4\cos^2 \theta + (2+2\sqrt{3})\sin \theta - 4 - \sqrt{3}$$

$$= 4(1-\sin^2 \theta) + (2+2\sqrt{3})\sin \theta - 4 - \sqrt{3}$$

$$= -[4\sin^2 \theta - (2+2\sqrt{3})\sin \theta + \sqrt{3}]$$

$$= -(2\sin \theta - 1)(2\sin \theta - \sqrt{3})$$

異なる2つの実数解をもつとき、 $D > 0$  であるから

$$-(2\sin \theta - 1)(2\sin \theta - \sqrt{3}) > 0$$

ゆえに  $(2\sin \theta - 1)(2\sin \theta - \sqrt{3}) < 0$

よって  $\frac{1}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$  であるから  $30^\circ < \theta < 60^\circ, 120^\circ < \theta < 150^\circ$

(2)  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  より  $0 < \sin \theta \leq 1$

$$\sin \theta = t \text{ とおくと } 0 < t \leq 1$$

$f(t) = -2(1+\sqrt{3})t + 4 + \sqrt{3}$  とすると、 $y=f(t)$  のグラフは傾きが負の直線である。

ゆえに、1次関数  $f(t)$  は単調に減少する。

また  $f(1) = 2 - \sqrt{3} > 0$

よって、 $0 < t \leq 1$  の範囲で常に  $f(t) > 0$

したがって、与えられた不等式が常に成り立つ。

(3)  $g(x) = x^2 - 4(\cos \theta)x - 2(1+\sqrt{3})\sin \theta + 4 + \sqrt{3}$

とする。このとき、放物線  $y=g(x)$  の軸は直線

$$x = 2\cos \theta \text{ である。}$$

与えられた2次方程式が異なる2つの実数解をもち、

それらがともに負となるような条件は

$$\begin{cases} D > 0 & \dots\dots ① \\ g(0) > 0 & \dots\dots ② \\ 2\cos \theta < 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①は、(1)から

$$30^\circ < \theta < 60^\circ, 120^\circ < \theta < 150^\circ \dots\dots ④$$

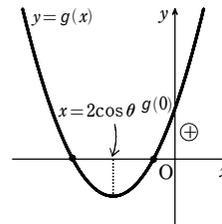
②は、 $g(0) = -2(1+\sqrt{3})\sin \theta + 4 + \sqrt{3} > 0$  であり、(2)から、この不等式は

$0^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき常に成り立つ。

③から  $\cos \theta < 0$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$  であるから  $90^\circ < \theta < 180^\circ \dots\dots ⑤$

ゆえに、④、⑤の共通範囲を求めて  $120^\circ < \theta < 150^\circ$



1

【解答】 (1)  $b=\sqrt{3}$  (2)  $C=60^\circ, 120^\circ$  (3)  $R=5\sqrt{3}$  (4)  $B=30^\circ, 150^\circ$

【解説】

(1) 正弦定理により  $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 120^\circ}$

よって  $b = \sqrt{2} \cdot \sin 120^\circ \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ}$   
 $= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3}$

(2) 正弦定理により  $\frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{\sin C}$

よって  $\sin C = \frac{15\sqrt{3}}{15} \cdot \sin 30^\circ$   
 $= \frac{15\sqrt{3}}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$  より  $0^\circ < C < 150^\circ$  であるから  $C=60^\circ, 120^\circ$

(3) 正弦定理により  $\frac{5\sqrt{3}}{\sin 150^\circ} = 2R$

よって  $R = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \frac{2}{1} = 5\sqrt{3}$

(4) 正弦定理により  $\frac{5}{\sin B} = 2 \cdot 5$

よって  $\sin B = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$

したがって  $B=30^\circ, 150^\circ$

2

【解答】 (1)  $a=\sqrt{5}$  (2)  $B=60^\circ$

【解説】

(1) 余弦定理から  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$   
 $= 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ$   
 $= 9 + 2 - 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5$

$a > 0$  であるから  $a = \sqrt{5}$

(2) 余弦定理から  $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{40}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$

よって  $B=60^\circ$

3

【解答】  $c=1+\sqrt{3}$

【解説】

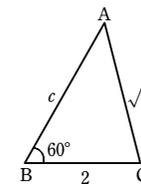
余弦定理により

$$(\sqrt{6})^2 = c^2 + 2^2 - 2 \cdot c \cdot 2 \cos 60^\circ$$

整理すると  $c^2 - 2c - 2 = 0$

これを解いて  $c = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-2)} = 1 \pm \sqrt{3}$

$c > 0$  であるから  $c = 1 + \sqrt{3}$



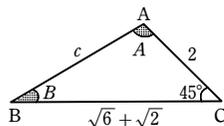
4

【解答】  $c = 2\sqrt{2}$ ,  $A = 105^\circ$ ,  $B = 30^\circ$

【解説】

余弦定理により

$$\begin{aligned} c^2 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot 2 \cos 45^\circ \\ &= (6 + 2\sqrt{12} + 2) + 4 - 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 12 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$



$c > 0$  であるから  $c = 2\sqrt{2}$

正弦定理により  $\frac{2}{\sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

よって  $\sin B = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \sin 45^\circ = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$A + B = 180^\circ - C = 135^\circ$  であるから  $B < 135^\circ$

ゆえに  $B = 30^\circ$

したがって  $A = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

5

【解答】 (1)  $5 : 8 : 7$  (2)  $60^\circ$

【解説】

(1) 正弦定理により

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 8 : 7$$

(2) (1)から,  $a = 5k$ ,  $b = 8k$ ,  $c = 7k$  ( $k > 0$ ) とおける。

$a < c < b$  であるから  $A < C < B$

よって,  $C$  が 2 番目に大きい角である。

余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(5k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 8k} = \frac{40k^2}{2 \cdot 5 \cdot 8k^2} = \frac{1}{2}$$

よって  $C = 60^\circ$

したがって, 求める角の大きさは  $60^\circ$

6

【解答】 (1)  $b = c$  の二等辺三角形 (2)  $A = 90^\circ$  または  $B = 90^\circ$  の直角三角形

【解説】

(1)  $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とする。

正弦定理により  $\sin B = \frac{b}{2R}$ ,  $\sin C = \frac{c}{2R}$

これらを等式に代入すると  $b \cdot \frac{b}{2R} = c \cdot \frac{c}{2R}$

両辺に  $2R$  を掛けて  $b^2 = c^2$   $b > 0$ ,  $c > 0$  であるから  $b = c$

よって,  $\triangle ABC$  は  $b = c$  の二等辺三角形である。

(2) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

これらを等式に代入すると  $a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

両辺に  $2abc$  を掛けて  $a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$

整理して  $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4 = 0$

よって  $(a^2 - b^2)^2 - (c^2)^2 = 0$

ゆえに  $(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2) = 0$

したがって  $a^2 - b^2 - c^2 = 0$  または  $a^2 - b^2 + c^2 = 0$

すなわち  $a^2 = b^2 + c^2$  または  $a^2 + c^2 = b^2$

よって,  $\triangle ABC$  は  $A = 90^\circ$  または  $B = 90^\circ$  の直角三角形である。

1

【解答】 (1)  $a = 10\sqrt{3}$  (2)  $b = 6\sqrt{6}$  (3)  $A = 30^\circ$  (4)  $B = 30^\circ, 150^\circ$   
(5)  $R = 5$

【解説】

(1) 正弦定理により  $\frac{a}{\sin 120^\circ} = 2 \cdot 10$

よって  $a = 2 \cdot 10 \sin 120^\circ = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

(2)  $A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により  $\frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$

よって  $b = 12 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{6}$

(3) 正弦定理により  $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$

よって  $\sin A = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$C = 120^\circ$  より  $0^\circ < A < 60^\circ$  であるから  $A = 30^\circ$

(4) 正弦定理により  $\frac{5}{\sin B} = 2 \cdot 5$

よって  $\sin B = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$  したがって  $B = 30^\circ, 150^\circ$

(5)  $C = 180^\circ - (50^\circ + 100^\circ) = 30^\circ$

正弦定理により  $\frac{5}{\sin 30^\circ} = 2R$  よって  $R = \frac{5}{2 \sin 30^\circ} = 5$

2

【解答】 (1)  $b = 2\sqrt{7}$  (2)  $a = 5$  (3)  $A = 60^\circ$  (4)  $C = 45^\circ$

【解説】

(1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 28 \end{aligned}$$

$b > 0$  であるから  $b = 2\sqrt{7}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= (2\sqrt{2} - 1)^2 + (2\sqrt{2} + 1)^2 - 2 \cdot (2\sqrt{2} - 1) \cdot (2\sqrt{2} + 1) \cos 120^\circ \\ &= (9 - 4\sqrt{2}) + (9 + 4\sqrt{2}) + 7 = 25 \end{aligned}$$

$a > 0$  であるから  $a = \sqrt{25} = 5$

(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 15} \\ &= \frac{105}{2 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって  $A = 60^\circ$

(4) 余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}$$

第3講 例題演習

$$= \frac{2+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって  $C=45^\circ$

3

【解答】 (1)  $a=\sqrt{3}+1$  (2)  $c=2+2\sqrt{3}$

【解説】

(1) 余弦定理により  $b^2=c^2+a^2-2cacosB$  であるから

$$(\sqrt{2})^2=2^2+a^2-2\cdot 2\cdot acos30^\circ$$

$$\text{よって } a^2-2\sqrt{3}a+2=0$$

$$\text{これを解いて } a=\sqrt{3}+1$$

(2) 余弦定理により  $a^2=b^2+c^2-2bccosA$  であるから

$$(2\sqrt{6})^2=4^2+c^2-2\cdot 4\cdot ccos60^\circ$$

$$\text{よって } c^2-4c-8=0$$

$$\text{これを解いて } c=2\pm 2\sqrt{3}$$

$$c>0 \text{ であるから } c=2+2\sqrt{3}$$

4

【解答】 (1)  $A=120^\circ, b=\sqrt{2}, c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$  (2)  $a=\sqrt{2}, B=45^\circ, C=105^\circ$

【解説】

(1)  $A=180^\circ-(B+C)=120^\circ$

$$\text{正弦定理により } \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{よって } b = \frac{\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\text{余弦定理により } (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + c^2 - 2\sqrt{2}ccos120^\circ$$

$$c^2 + \sqrt{2}c - 1 = 0 \text{ を解いて } c = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$c>0 \text{ であるから } c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

【別解】 (後半)  $b^2=c^2+a^2-2cacosB$  を用いると,  $c^2-\sqrt{6}c+1=0$  から

$$c = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2} \quad B>C \text{ であるから } b>c$$

$$\text{よって } c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

(2) 余弦定理により  $a^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2(\sqrt{3}+1)cos30^\circ$

$$= 4+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=2$$

$$a>0 \text{ であるから } a=\sqrt{2}$$

余弦定理により

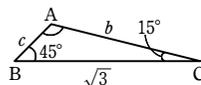
$$cosB = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot \sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ゆえに } B=45^\circ$$

$$\text{よって } C=180^\circ-(A+B)=105^\circ$$

【別解】 (後半)  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  を用いると  $\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



ゆえに  $B=45^\circ, 135^\circ$

$a<b<c$  であるから,  $\angle C$  が最大角。

よって  $B=45^\circ$

5

【解答】  $C=135^\circ$

【解説】

正弦定理により  $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$

$$\text{よって } a:b:c = 1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$$

ゆえに,  $a=k, b=\sqrt{2}k, c=\sqrt{5}k (k>0)$  とおける。

よって, 辺 AB が最大辺で,  $\angle C$  が最大の角である。

$$\text{余弦定理により } cosC = \frac{k^2+(\sqrt{2}k)^2-(\sqrt{5}k)^2}{2\cdot k\cdot \sqrt{2}k} = \frac{-2k^2}{2\sqrt{2}k^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって, 最大の角の大きさは  $C=135^\circ$

6

【解答】 (1) BC=CA の二等辺三角形 (2)  $A=90^\circ$  の直角三角形 (3) 正三角形

(4)  $\angle B=90^\circ$  または  $\angle C=90^\circ$  の直角三角形

【解説】

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とする。

(1) 正弦定理により  $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$

$$\text{これらを等式 } a\sin A = b\sin B \text{ に代入して } a \cdot \frac{a}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R}$$

$$\text{両辺に } 2R \text{ を掛けて } a^2 = b^2$$

$$a>0, b>0 \text{ であるから } a=b$$

よって,  $\triangle ABC$  は BC=CA の二等辺三角形

(2)  $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とする。

$$\text{正弦定理により } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\text{これらを等式に代入すると } \left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right)(b+c-a) = 2c \cdot \frac{b}{2R}$$

$$\text{よって } (a+b+c)(b+c-a) = 2bc$$

$$\text{ゆえに } b^2+2bc+c^2-a^2=2bc \quad \text{したがって } b^2+c^2=a^2$$

よって,  $\triangle ABC$  は  $A=90^\circ$  の直角三角形である。

(3) 等式から  $\frac{cosA}{a} = \frac{cosB}{b} \dots\dots ①, \frac{cosB}{b} = \frac{cosC}{c} \dots\dots ②$

余弦定理により

$$cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad cosB = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad cosC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを ①, ② に代入すると

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{b} \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \quad \dots\dots ①'$$

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{1}{c} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad \dots\dots ②'$$

$$①' \text{ から } b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2 \quad \text{整理すると } a^2=b^2$$

$$a>0, b>0 \text{ であるから } a=b \quad \dots\dots ③$$

$$②' \text{ から } c^2+a^2-b^2=a^2+b^2-c^2 \quad \text{整理すると } b^2=c^2$$

$$b>0, c>0 \text{ であるから } b=c \quad \dots\dots ④$$

③, ④ から  $a=b=c$  よって,  $\triangle ABC$  は 正三角形

(4) 正弦定理, 余弦定理により

$$\frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

両辺に  $4Rabc$  を掛けて

$$a^2(b^2+c^2-a^2) = b^2(c^2+a^2-b^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)$$

$$\text{ゆえに } a^2b^2+a^2c^2-a^4 = b^2c^2+b^2a^2-b^4 + c^2a^2+c^2b^2-c^4$$

$$\text{整理すると } a^4-b^4+2b^2c^2-c^4=0$$

$$\text{したがって } a^4-(b^2-c^2)^2=0$$

$$\text{よって } \{a^2+(b^2-c^2)\}\{a^2-(b^2-c^2)\}=0$$

$$\text{ゆえに } a^2+b^2=c^2 \text{ または } a^2+c^2=b^2$$

したがって,  $\triangle ABC$  は  $\angle B=90^\circ$  または  $\angle C=90^\circ$  の直角三角形

第3講 レベルA

1

【解答】  $c = \sqrt{3} + 1$ ,  $B = 45^\circ$ ,  $C = 105^\circ$  または  $c = \sqrt{3} - 1$ ,  $B = 135^\circ$ ,  $C = 15^\circ$

【解説】

余弦定理より  $(\sqrt{2})^2 = 2^2 + c^2 - 2 \cdot 2c \cos 30^\circ$   
 よって  $c^2 - 2\sqrt{3}c + 2 = 0$  したがって  $c = \sqrt{3} \pm 1$

[1]  $c = \sqrt{3} + 1$  のとき

$$\cos B = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに  $B = 45^\circ$   
 よって  $C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

[2]  $c = \sqrt{3} - 1$  のとき

$$\cos B = \frac{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに  $B = 135^\circ$  よって  $C = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$

以上から  $c = \sqrt{3} + 1$ ,  $B = 45^\circ$ ,  $C = 105^\circ$   
 または  $c = \sqrt{3} - 1$ ,  $B = 135^\circ$ ,  $C = 15^\circ$

【解説】 正弦定理から  $\frac{2}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$  ゆえに  $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A = 30^\circ$  より,  $0^\circ < B < 150^\circ$  であるから  $B = 45^\circ$ ,  $135^\circ$

[1]  $B = 45^\circ$  のとき

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ \\ c &= b \cos A + a \cos B \\ &= 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

[2]  $B = 135^\circ$  のとき

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ \\ c &= b \cos A + a \cos B \\ &= 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 135^\circ \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

2

【解答】  $AC = 500\sqrt{3}$  (m),  $AD = \frac{500\sqrt{6}}{3}$  (m),  $DC = \frac{500\sqrt{15}}{3}$  (m)

【解説】

$$\angle ABC = 180^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$$

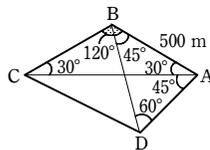
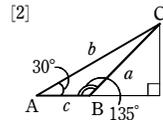
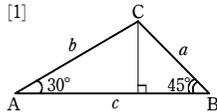
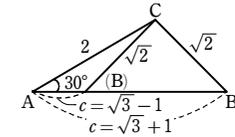
$\triangle ABC$  において, 正弦定理により

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{500}{\sin 30^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } AC &= \frac{500}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 120^\circ \\ &= 500 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3} \text{ (m)} \end{aligned}$$

次に,  $\triangle ABD$  において, 正弦定理により  $\frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{500}{\sin 60^\circ}$

$$\text{よって } AD = \frac{500}{\sin 60^\circ} \cdot \sin 45^\circ = 500 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{500\sqrt{6}}{3} \text{ (m)}$$



また  $\angle CAD = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$

よって,  $\triangle ACD$  において, 余弦定理により

$$\begin{aligned} DC^2 &= AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos 45^\circ \\ &= (500\sqrt{3})^2 + \left(\frac{500\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 500\sqrt{3} \cdot \frac{500\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 500^2 \left(3 + \frac{2}{3} - 2\right) = 500^2 \cdot \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$DC > 0$  であるから  $DC = \sqrt{500^2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{500\sqrt{15}}{3}$  (m)

3

【解答】  $AM = 2\sqrt{7}$ ,  $AD = \sqrt{33}$

【解説】

$\triangle ABC$  において, 余弦定理により

$$\cos B = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{7}$$

また  $BM = 3$ ,  $BD = 2$

$\triangle ABM$  において, 余弦定理により

$$AM^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \frac{5}{7} = 28$$

$AM > 0$  であるから  $AM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\triangle ABD$  において, 余弦定理により

$$AD^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \frac{5}{7} = 33$$

$AD > 0$  であるから  $AD = \sqrt{33}$

4

【解答】 (1)  $2\sqrt{7}$  (2) 4

【解説】

(1)  $\triangle ABC$  において, 余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 36 + 16 - 24 = 28 \end{aligned}$$

$AC > 0$  であるから  $AC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

よって  $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

(1) から  $AC = 2\sqrt{7}$

$\triangle ADC$  において, 余弦定理により

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos 120^\circ$$

$$\text{よって } (2\sqrt{7})^2 = AD^2 + 2^2 - 2 \cdot AD \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

整理すると  $AD^2 + 2AD - 24 = 0$

$$(AD + 6)(AD - 4) = 0$$

$AD > 0$  であるから  $AD = 4$

5

【解答】 (1)  $150^\circ$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{5}$

【解説】

(1) 正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  から  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

条件から  $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

よって  $a : b : c = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

ゆえに,  $a = \sqrt{7}k$ ,  $b = \sqrt{3}k$ ,  $c = k$  ( $k > 0$ ) とおける。

よって,  $a$  が最大の辺であるから,  $\angle A$  が最大の角である。

$$\text{余弦定理により } \cos A = \frac{(\sqrt{3}k)^2 + k^2 - (\sqrt{7}k)^2}{2 \cdot \sqrt{3}k \cdot k} = \frac{-3k^2}{2\sqrt{3}k^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって, 最大の角の大きさは  $A = 150^\circ$

(2) (1) から, 2 番目に大きい角は  $\angle B$

$$\text{余弦定理により } \cos B = \frac{k^2 + (\sqrt{7}k)^2 - (\sqrt{3}k)^2}{2 \cdot k \cdot \sqrt{7}k} = \frac{5k^2}{2\sqrt{7}k^2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$1 + \tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$  であるから

$$\tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B} - 1 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{28}{25} - 1 = \frac{3}{25}$$

$A > 90^\circ$  より  $B < 90^\circ$  であるから  $\tan B > 0$

$$\text{したがって } \tan B = \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

6

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1)  $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とする。

$$\text{正弦定理により } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\text{よって 左辺} = c \left[ \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \right] = \frac{c(a^2 + b^2)}{4R^2}$$

$$\text{右辺} = \left(a \cdot \frac{a}{2R} + b \cdot \frac{b}{2R}\right) \cdot \frac{c}{2R} = \frac{c(a^2 + b^2)}{4R^2}$$

したがって 左辺 = 右辺

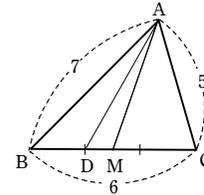
(2) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{よって 左辺} = 2 \left( bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + ca \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)$$

$$= (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

したがって 左辺 = 右辺



1

解答 120°

解説

$x > 1$  のとき  $x^2 + x + 1 - (x^2 - 1) = x + 2 > 0$   
 $x^2 + x + 1 - (2x + 1) = x^2 - x = x(x - 1) > 0$

よって、3辺の長さを  $x^2 - 1$ ,  $2x + 1$ ,  $x^2 + x + 1$  とする三角形が存在するための条件は  $x^2 + x + 1 < (x^2 - 1) + (2x + 1)$

整理すると  $x > 1$

したがって、 $x > 1$  のとき三角形が存在する。

また、長さが  $x^2 + x + 1$  である辺が最大の辺であるから、この辺に対する角が最大の内角である。

この角を  $\theta$  とすると、余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(x^2 - 1)^2 + (2x + 1)^2 - (x^2 + x + 1)^2}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} \\ &= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 + 4x + 1 - (x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2)}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} \\ &= \frac{-2x^3 - x^2 + 2x + 1}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} = \frac{-2x^3 + x^2 - 2x - 1}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} \\ &= -\frac{(x^2 - 1)(2x + 1)}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって  $\theta = 120^\circ$

2

解答 (ア)  $\frac{6}{7} < a < 2$  (イ)  $\frac{3}{2}$

解説

(ア) 三角形の成立条件から

$$BC + CA > AB, CA + AB > BC, AB + BC > CA$$

よって

$$a + (3a - 2) > 5a - 4, (3a - 2) + (5a - 4) > a, (5a - 4) + a > 3a - 2$$

それぞれを解くと  $a < 2, a > \frac{6}{7}, a > \frac{2}{3}$

これらの共通範囲を求めて  $\frac{6}{7} < a < 2$  ……①

(イ) 正弦定理から  $\frac{5a - 4}{\sin C} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} (5a - 4)$

よって  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって  $C = 60^\circ$  または  $120^\circ$

[1]  $C = 60^\circ$  のとき、余弦定理から

$$(5a - 4)^2 = a^2 + (3a - 2)^2 - 2a(3a - 2)\cos 60^\circ$$

整理すると  $18a^2 - 30a + 12 = 0$

$$6(a - 1)(3a - 2) = 0$$

①を満たすのは  $a = 1$

このとき、 $AB = BC = CA = 1$  であるから、 $\triangle ABC$  は正三角形となり不適。

[2]  $C = 120^\circ$  のとき、余弦定理から

$$(5a - 4)^2 = a^2 + (3a - 2)^2 - 2a(3a - 2)\cos 120^\circ$$

整理すると  $12a^2 - 26a + 12 = 0$   
 $2(2a - 3)(3a - 2) = 0$

①を満たすのは  $a = \frac{3}{2}$

3

解答 (1) 略 (2)  $AM = 7$

解説

(1)  $\angle AMB = \theta$  とすると  $\angle AMC = 180^\circ - \theta$

$\triangle AMB$  において、余弦定理により

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cos \theta \quad \dots\dots ①$$

$\triangle AMC$  において、余弦定理により

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cos(180^\circ - \theta)$$

$CM = BM$ ,  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$  であるから

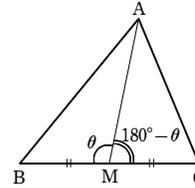
$$AC^2 = AM^2 + BM^2 + 2AM \cdot BM \cos \theta \quad \dots\dots ②$$

①+②から  $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

(2)  $AB = 9, AC = 7, BM = 4$  を (1) で証明した等式に代入すると

$$9^2 + 7^2 = 2(AM^2 + 4^2) \quad \text{よって} \quad AM^2 = 49$$

$AM > 0$  であるから  $AM = 7$



1

解答 (1)  $S = \frac{35}{2}$  (2)  $S = 6\sqrt{11}$

解説

(1)  $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$

(2)  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{120}{2 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{5}{6}$

$\sin A > 0$  であるから  $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

よって  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 6\sqrt{11}$

別解 ヘロンの公式を用いると、 $s = \frac{5+9+8}{2} = 11$  であるから

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{11 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3} = 6\sqrt{11}$$

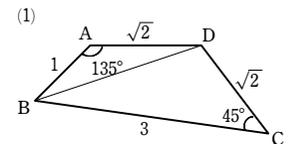
2

解答 (1) 2 (2)  $\frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6}$

解説

(1) 四角形 ABCD の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \sin 135^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{aligned}$$



(2)  $\triangle ABC$  に余弦定理を適用して

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ = 49$$

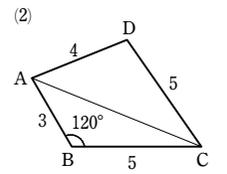
$\triangle ACD$  に余弦定理を適用して

$$\cos D = \frac{5^2 + 4^2 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{1}{5}$$

$\sin D > 0$  であるから  $\sin D = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

よって、四角形 ABCD の面積  $S$  は

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6}$$



3

解答 (ア)  $\frac{5}{7}$  (イ)  $\frac{2\sqrt{6}}{7}$  (ウ)  $4\sqrt{6}$  (エ)  $\frac{35\sqrt{6}}{24}$  (オ)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

解説

余弦定理により  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{40}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{5}{7}$

$0^\circ < A < 180^\circ$  であるから  $\sin A > 0$

よって  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

ゆえに  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = 4\sqrt{6}$

さらに、正弦定理により  $\frac{a}{\sin A} = 2R$

したがって  $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{5}{2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{35}{4\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$

また、 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$  と表されるから  $4\sqrt{6} = \frac{1}{2}r(5+7+4)$

よって  $r = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

4

解答 (1)  $\sqrt{17}$  (2)  $6\sqrt{2}$

解説

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$C = 180^\circ - A$$

$\triangle ABD$  において、余弦定理により

$$\begin{aligned} BD^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos A \\ &= 13 - 12 \cos A \quad \dots \text{①} \end{aligned}$$

$\triangle BCD$  において、余弦定理により

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos(180^\circ - A) \\ &= 25 + 24 \cos A \quad \dots \text{②} \end{aligned}$$

①, ② から  $13 - 12 \cos A = 25 + 24 \cos A$

整理して  $36 \cos A = -12$  よって  $\cos A = -\frac{1}{3}$  …… ③

これを①に代入して  $BD^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 17$

$BD > 0$  であるから  $BD = \sqrt{17}$

(2)  $\sin A > 0$  であるから、③より

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって  $\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって、四角形 ABCD の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin A + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin C \\ &= 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

5

解答 (1)  $\frac{3}{10}$  (2)  $\frac{\sqrt{91}}{10}$  (3)  $\frac{3\sqrt{91}}{2}$

解説

(1) 三平方の定理により  $AF = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$$CF = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

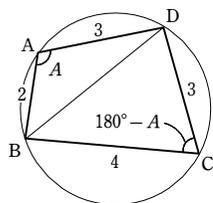
$$AC = \sqrt{4^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{43}$$

よって、 $\triangle AFC$  において、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{AF^2 + CF^2 - AC^2}{2AF \cdot CF} = \frac{36 + 25 - 43}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{18}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

(2)  $\sin \theta > 0$  であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{91}{100}} = \frac{\sqrt{91}}{10}$$



(3)  $\triangle AFC = \frac{1}{2} AF \cdot CF \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{91}}{10} = \frac{3\sqrt{91}}{2}$

6

解答 (1)  $V = 1$  (2)  $S = \frac{7}{2}$  (3)  $\frac{6}{7}$

解説

(1)  $\triangle OBC = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ ,  $OA = 3$  であるから

$$V = \frac{1}{3} \triangle OBC \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1$$

(2)  $\triangle OAB$  において、三平方の定理により  $AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

同様に、 $\triangle OBC$  において  $BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\triangle OCA$  において  $CA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\cos \angle BAC = \frac{13 + 10 - 5}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$\sin \angle BAC > 0$  であるから

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{130}} = \frac{7}{\sqrt{130}}$$

したがって  $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{7}{\sqrt{130}} = \frac{7}{2}$

(3)  $V = \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot OH$  であるから  $1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} OH$  よって  $OH = \frac{6}{7}$

1

解答 (1)  $14\sqrt{2}$  (2)  $\sqrt{3}$  (3)  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$  (4)  $6\sqrt{10}$  (5)  $\sqrt{5}$

解説

$\triangle ABC$  の面積を  $S$  とする。

(1)  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \sin 45^\circ = 14\sqrt{2}$

(2)  $S = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} \sin 150^\circ = \sqrt{3}$

(3)  $C = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$

よって  $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \sin 45^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

(4) 余弦定理により  $\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 11^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{-36}{2 \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{3}{7}$

$\sin A > 0$  であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

よって  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} = 6\sqrt{10}$

(5) 余弦定理により  $\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

$\sin A > 0$  であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$

2

解答 (1) 7 (2)  $-\frac{1}{5}$  (3)  $\frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6}$

解説

(1)  $\triangle ABD$  において、余弦定理により

$$BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120^\circ = 49$$

$BD > 0$  であるから  $BD = \sqrt{49} = 7$

(2)  $\triangle BCD$  において、余弦定理により

$$\cos C = \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{-8}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{1}{5}$$

(3)  $\sin C > 0$  であるから

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって、四角形 ABCD の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

3

解答 (ア)  $\frac{3}{4}$  (イ)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$  (ウ)  $\frac{15\sqrt{7}}{4}$  (エ)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$  (オ)  $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

解説

余弦定理より  $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5^2+6^2-4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{7}{4}$

$0^\circ < A < 180^\circ$  であるから  $\sin A > 0$

よって  $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

ゆえに  $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

また、 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$  と表されるから  $\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2}r(4+5+6)$

よって  $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

さらに、正弦定理により  $\frac{a}{\sin A} = 2R$

したがって  $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

4

解答  $A = 60^\circ$ ,  $BD = 7$ ,  $S = \frac{55\sqrt{3}}{4}$

解説

四角形 ABCD は円に内接するから  $C = 180^\circ - A$

$\triangle ABD$  において、余弦定理より

$$BD^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos A$$

$$= 89 - 80 \cos A \quad \dots\dots ①$$

$\triangle CDB$  において、余弦定理より

$$BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos(180^\circ - A)$$

$$= 34 + 30 \cos A \quad \dots\dots ②$$

①, ② から  $89 - 80 \cos A = 34 + 30 \cos A$

よって  $\cos A = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ③$

したがって  $A = 60^\circ$

①, ③ から  $BD^2 = 89 - 40 = 49$

$BD > 0$  であるから  $BD = 7$

また  $\sin A = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに  $\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって  $S = \triangle ABD + \triangle CDB$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{55\sqrt{3}}{4}$$

5

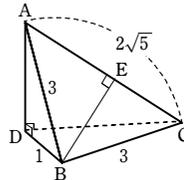
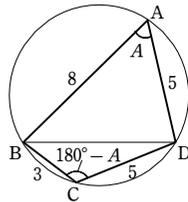
解答 (1)  $\frac{8\sqrt{5}}{25}$  (2)  $\frac{\sqrt{305}}{25}$  (3)  $\sqrt{61}$

解説

(1)  $AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$FC = \sqrt{FG^2 + GC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$CA = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$



よって  $\cos \theta = \frac{AF^2 + FC^2 - CA^2}{2AF \cdot FC} = \frac{(2\sqrt{5})^2 + 5^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{8\sqrt{5}}{25}$

(2)  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{8\sqrt{5}}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{305}}{25}$

(3)  $\triangle AFC = \frac{1}{2}AF \cdot FC \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{305}}{25} = \sqrt{61}$

6

解答 (1)  $2\sqrt{3}$  (2)  $\frac{4}{3}$  (3)  $2\sqrt{5}$  (4)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解説

(1)  $\triangle ADB$  において、三平方の定理により

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$\triangle ADC$  において、三平方の定理により

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

(2)  $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$  から  $AD \perp \triangle BCD$

$\triangle BCD$  において、余弦定理により

$$\cos \angle DBC = \frac{BD^2 + BC^2 - CD^2}{2BD \cdot BC} = \frac{1^2 + 3^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{-2}{2 \cdot 1 \cdot 3} = -\frac{1}{3}$$

$\sin \angle DBC > 0$  であるから

$$\sin \angle DBC = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって  $\triangle BCD = \frac{1}{2}BD \cdot BC \sin \angle DBC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

したがって、四面体 ABCD の体積を  $V$  とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle BCD \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}$$

(3)  $\triangle ABC$  は  $AB = BC$  の二等辺三角形であるから、

$B$  から辺  $AC$  に下ろした垂線を  $BE$  とすると

$$AE = CE = \sqrt{5}$$

よって、三平方の定理により

$$BE = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4} = 2$$

ゆえに  $\triangle ABC = \frac{1}{2}AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2 = 2\sqrt{5}$

別解  $\angle ABC = \theta$  とおく。

$\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{3^2 + 3^2 - (2\sqrt{5})^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{-2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = -\frac{1}{9}$$

$\sin \theta > 0$  であるから  $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

よって  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{9} = 2\sqrt{5}$

(4)  $V = \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot DH$  であるから

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot DH \quad \text{よって} \quad DH = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

1

解答 (1)  $\sqrt{10}$  (2)  $\sqrt{2}$  (3) 7

解説

(1)  $\triangle ABC$  に余弦定理を適用して

$$AC^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cos 45^\circ = 10$$

$AC > 0$  であるから  $AC = \sqrt{10}$

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle D = 180^\circ - \angle B = 135^\circ$$

したがって  $\triangle ACD$  に余弦定理を適用して

$$(\sqrt{10})^2 = AD^2 + 2^2 - 2 \cdot AD \cdot 2 \cos 135^\circ$$

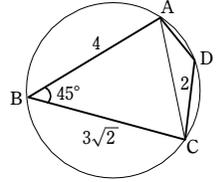
$$\text{よって} \quad AD^2 + 2\sqrt{2}AD - 6 = (AD - \sqrt{2})(AD + 3\sqrt{2}) = 0$$

$AD > 0$  であるから  $AD = \sqrt{2}$

(3) 四角形 ABCD の面積を  $S$  とする。

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \sin 135^\circ = 7$$



2

解答  $6\sqrt{3}$

解説

$AD = x$  とおく。

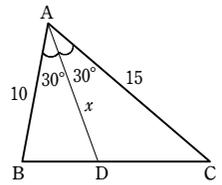
$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$  であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot x \sin 30^\circ$$

よって  $\frac{75\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}x + \frac{15}{4}x$

これを解くと  $x = 6\sqrt{3}$

したがって  $AD = 6\sqrt{3}$



3

解答 (1)  $AD = 1$  のとき最小値 1 (2)  $AD = 1$  のとき最小値  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

解説

$AD = CE = x$  とすると  $0 < x < 2 \quad \dots\dots ①$

(1)  $\triangle ADE$  において、余弦定理により

$$DE^2 = x^2 + (2-x)^2 - 2x(2-x)\cos 60^\circ$$

$$= x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x + x^2$$

$$= 3x^2 - 6x + 4$$

$$= 3(x-1)^2 + 1$$

① の範囲において、 $DE^2$  は  $x = 1$  のとき最小値 1 をとる。

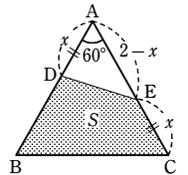
$DE > 0$  であるから、 $DE$  は  $AD = 1$  のとき最小値 1 をとる。

(2)  $S = \triangle ABC - \triangle ADE$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{2}x(2-x)\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - x(2-x))$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 2x + 4) = \frac{\sqrt{3}}{4}\{(x-1)^2 + 3\}$$

① の範囲において、 $S$  は  $AD = 1$  のとき最小値  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  をとる。



4

【解答】 (ア)  $-\frac{1}{2}$  (イ) 28 (ウ)  $12\pi$

【解説】

(1) 外接円の半径を  $R$  とすると、正弦定理により

$$\sin A = \frac{BC}{2R}, \sin B = \frac{CA}{2R}, \sin C = \frac{AB}{2R}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3 \text{ より } \frac{BC}{2R} : \frac{CA}{2R} : \frac{AB}{2R} = 7 : 5 : 3$$

ゆえに  $BC : CA : AB = 7 : 5 : 3$

したがって、最大の辺は  $BC$  であるから、最大の角  $\theta$  は  $A$  である。

$BC = 7k, CA = 5k, AB = 3k$  ( $k > 0$ ) とおくと、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$$

(2) (1) より  $\theta = A = 120^\circ$

$$\text{よって、三角形 } ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5k \cdot 3k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} k^2$$

$$\text{ゆえに } \frac{15\sqrt{3}}{4} k^2 = 60\sqrt{3} \text{ よって } k^2 = 16$$

$k > 0$  であるから  $k = 4$  したがって  $BC = 7k = 28$

$$\text{三角形 } ABC \text{ の内接円の半径を } r \text{ とすると } \frac{1}{2} r(7 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4) = 60\sqrt{3}$$

よって  $r = 2\sqrt{3}$

ゆえに、内接円の面積は  $\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$

5

【解答】 (ア)  $\frac{2\sqrt{7} + \sqrt{3}}{3}$  (イ)  $\frac{5\sqrt{3}}{36}$

【解説】

$\triangle BCP$  において、余弦定理により

$$BP^2 = BC^2 + CP^2 - 2BC \cdot CP \cos \angle BCP$$

すなわち

$$\begin{aligned} BP^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cos 60^\circ \\ &= 1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$BP > 0 \text{ であるから } BP = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\triangle BCP \text{ と } \triangle BAQ \text{ は合同な三角形であるから } BQ = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$\triangle APQ$  において、余弦定理により

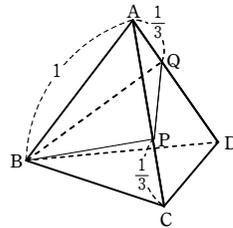
$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos \angle PAQ$$

$$\text{すなわち } PQ^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cos 60^\circ$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{9}$$

$$PQ > 0 \text{ であるから } PQ = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、 $\triangle BPQ$  の周の長さは



$$BP + PQ + QB = \frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{7} + \sqrt{3}}{3}$$

また、線分  $PQ$  の中点を  $M$  とすると

$$PM = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\triangle BPQ$  は  $BP = BQ$  の二等辺三角形であるから

$$\angle BMP = 90^\circ$$

ゆえに  $BM = \sqrt{BP^2 - PM^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

$$\text{したがって、} \triangle BPQ \text{ の面積は } \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{36}$$

6

【解答】  $\sqrt{7}a$

【解説】

右図のような展開図を考えると、四角形  $AOO'A'$  は平行四辺形であり、求める最短経路の長さは図の線分  $OA'$  の長さである。

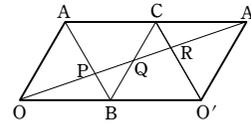
$\triangle OAA'$  で  $OA = a, AA' = 2a,$

$\angle OAA' = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$  であるから、余弦定理により

$$\begin{aligned} OA'^2 &= AA'^2 + OA^2 - 2AA' \cdot OA \cos 120^\circ \\ &= (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2 \end{aligned}$$

$a > 0, OA' > 0$  であるから  $OA' = \sqrt{7}a$

よって、求める最短経路の長さは  $\sqrt{7}a$



1

【解答】 (ア)  $2\sqrt{2}$  (イ) 2 (ウ)  $\sqrt{6}$  (エ)  $-1 + \sqrt{3}$

(オ)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$  (カ) 2

【解説】

$AD$  は円の直径であるから、外接円  $O$  の半径を  $R$  とすると  $AD = 2R$

$\triangle ABC$  において、正弦定理により

$$2R = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \sqrt{2} \div \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$

ゆえに  $AD = 2\sqrt{2}$

また、 $\triangle ABC$  において、正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin 135^\circ} = 2R$$

$$\text{よって } BC = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

$\angle ABD = 90^\circ$  であるから、三平方の定理により

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

$\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$2^2 = AC^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot AC \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ$$

$$\text{すなわち } 4 = AC^2 + 2 - 2\sqrt{2} AC \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{よって } AC^2 + 2AC - 2 = 0$$

これを解くと  $AC = -1 \pm \sqrt{3}$

$AC > 0$  であるから  $AC = -1 + \sqrt{3}$

ゆえに、 $\triangle ABC$  の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ここで、円周角の定理により

$$\angle BOC = 360^\circ - 135^\circ \times 2 = 90^\circ$$

よって、 $\triangle OBC$  の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$$

ゆえに、四角形  $ABOC$  の面積  $S_1$  は

$$S_1 = \triangle ABC + \triangle OBC = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

辺  $BC$  と線分  $AD$  の交点を  $E$  とする。

$\triangle ABC, \triangle OBC, \triangle DBC$  の底辺を  $BC$  と考えると

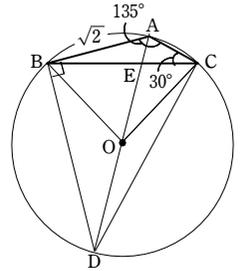
$$\triangle ABC : \triangle OBC : \triangle DBC = AE : OE : DE$$

よって  $S_1 : S_2 = (\triangle ABC + \triangle OBC) : (\triangle ABC + \triangle DBC)$

$$\begin{aligned} &= (AE + OE) : (AE + DE) = AO : AD = \sqrt{2} : 2\sqrt{2} \\ &= 1 : 2 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \frac{S_2}{S_1} = \frac{2}{1} = 2$$

【別解】  $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$  の値



第4講 レベルB

$\angle ACD = 90^\circ$  であるから、三平方の定理により

$$CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (-1 + \sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{8 - (4 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

よって  $S_2 = \triangle ABD + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{2} \cdot (-1 + \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} + 1$$

したがって  $\frac{S_2}{S_1} = (\sqrt{3} + 1) \div \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 2$

2

【解答】 (1)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  (2)  $AE = \frac{\sqrt{33} - 3}{3}$

【解説】

(1) 点 P から正三角形 ABC に垂線 PH を引く。

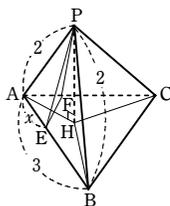
PA = PB = PC から HA = HB = HC

よって、点 H は  $\triangle ABC$  の外心である。

ゆえに  $AH = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \frac{3}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$

したがって  $PH = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$

ゆえに、求める体積は  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3^2 \times \sin 60^\circ \times 1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$



(2)  $AE = AF$ ,  $\angle EAF = 60^\circ$  から  $EF = AE = AF$

また  $PE = PF$

$AE = x$  ( $0 < x < 3$ ) とおく。

余弦定理から  $\cos \angle PAB = \frac{AP^2 + AB^2 - BP^2}{2AP \cdot AB} = \frac{2^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{3}{4}$

よって  $PE^2 = PF^2 = 4 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos \angle PAB$

$$= 4 + x^2 - 4x \times \frac{3}{4} = x^2 - 3x + 4$$

このとき  $\cos \angle EPF = \frac{PE^2 + PF^2 - EF^2}{2 \cdot PE \cdot PF} = \frac{2(x^2 - 3x + 4) - x^2}{2(x^2 - 3x + 4)}$

ゆえに  $\frac{2(x^2 - 3x + 4) - x^2}{2(x^2 - 3x + 4)} = \frac{4}{5}$

よって  $8(x^2 - 3x + 4) = 10(x^2 - 3x + 4) - 5x^2$

したがって  $3x^2 + 6x - 8 = 0$

$0 < x < 3$  から  $x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{3}$

ゆえに  $AE = \frac{\sqrt{33} - 3}{3}$

3

【解答】  $\frac{\sqrt{41}}{2}$

【解説】

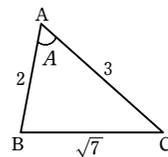
$\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$  であるから  $A = 60^\circ$

よって、 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



D から  $\triangle ABC$  を含む平面に下ろした垂線を DH とし、 $DH = h$  とする。

直角三角形 DAH, DBH, DCH は、斜辺が等しく、DH が共通であるから

$$\triangle DAH \cong \triangle DBH \cong \triangle DCH$$

ゆえに  $AH = BH = CH$

したがって、H は  $\triangle ABC$  の外接円の中心である。

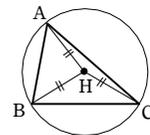
$\triangle ABC$  において、正弦定理により  $\frac{BC}{\sin A} = 2AH$

よって  $AH = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$h^2 + AH^2 = 4^2$  であるから

$$h = \sqrt{4^2 - AH^2} = \sqrt{16 - \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{41}{3}}$$

したがって  $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{41}{3}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$



章末問題A

1

解答  $\frac{5}{2}$

解説

$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$  から (与式)  $= \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

別解  $\cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ$ ,  $\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$  から

(与式)  $= (\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) + (\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

2

解答 (1)  $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$

(2)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$ ,  $\cos \theta = -\frac{2}{5}$ ,  $\tan \theta = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

解説

(1) 等式  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$$

ここで、 $\theta$  は鋭角であるから  $\cos \theta > 0$

よって  $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ゆえに  $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

また  $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{2}$

別解 右の図のような、 $BC=2$ ,  $CA=1$ ,  $\angle B=90^\circ - \theta$ ,  $\angle C=90^\circ$  の直角三角形  $ABC$  を考えると

$$AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

よって  $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,

$$\cos \theta = \frac{CA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

また  $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{CA}{BC} = \frac{1}{2}$

(2) 等式  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$  から

$$\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{2}{5}$$

等式  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\sin \theta \geq 0$

よって  $\sin \theta = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{21}}{5} \div \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

3

解答 (1)  $\frac{52}{9}$  (2)  $4 \leq a \leq \frac{23}{4}$

解説

(1)  $4\cos x + 5\sin^2 x = a$  から

$$4\cos x + 5(1 - \cos^2 x) = a$$

よって  $-5\cos^2 x + 4\cos x + 5 = a$

したがって、 $\cos x = \frac{1}{3}$  となるとき  $a = -5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 = \frac{52}{9}$

(2)  $\cos x = t$  とおくと、 $0^\circ \leq x \leq 60^\circ$  のとき  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  であり、 $x$  の値と  $t$  の値は 1 対 1

に対応する。

このとき、方程式は  $-5t^2 + 4t + 5 = a$

よって、 $y = -5t^2 + 4t + 5$  ( $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ ) …… ① のグラフと直線  $y = a$  が共有点をただ

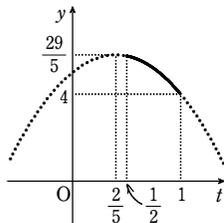
1 つもつような  $a$  の範囲が求めるものである。

$-5t^2 + 4t + 5 = -5\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{29}{5}$  より、① のグラフは

右の図の実線部分である。

また、 $t = \frac{1}{2}$  のとき  $y = \frac{23}{4}$

よって、求める  $a$  の範囲は  $4 \leq a \leq \frac{23}{4}$



4

解答  $AB = \sqrt{2}$ ,  $BC = \sqrt{10}$ ,  $CA = 4$

解説

$\triangle ABC$  の外接円の半径が  $\sqrt{5}$  であるから、 $\triangle ABC$  において正弦定理により

$$2\sqrt{5} = \frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle CAB}$$

よって  $AB = 2\sqrt{5} \sin \angle BCA = 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$ ,

$$BC = 2\sqrt{5} \sin \angle CAB = 2\sqrt{5} \sin 45^\circ = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{10}$$

また、 $\triangle ABC$  において余弦定理により  $BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cos 45^\circ$

すなわち  $(\sqrt{10})^2 = CA^2 + (\sqrt{2})^2 - 2CA \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

整理すると  $CA^2 - 2CA - 8 = 0$  よって  $(CA + 2)(CA - 4) = 0$

$CA > 0$  であるから  $CA = 4$

5

解答 (1)  $b = 2$ ,  $A = 30^\circ$ ,  $C = 105^\circ$  (2)  $a = 3\sqrt{2}$ ,  $B = 45^\circ$ ,  $C = 15^\circ$

(3)  $b = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{2}$ ,  $c = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ ,  $A = 45^\circ$

(4)  $b = 4(\sqrt{3} + 1)$ ,  $c = 4\sqrt{2}$ ,  $B = 105^\circ$

(5)  $A = 30^\circ$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $C = 90^\circ$  (6)  $A = 30^\circ$ ,  $B = 135^\circ$ ,  $C = 15^\circ$

解説

(1) 余弦定理により  $b^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ = 4$

$b > 0$  であるから  $b = \sqrt{4} = 2$

余弦定理により  $\cos A = \frac{2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに  $A = 30^\circ$

よって  $C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

参考  $b$  を求めた後で  $A$  を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により  $\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$

よって  $\sin A = \frac{\sqrt{2} \sin 45^\circ}{2} = \frac{1}{2}$

ここで、 $\sqrt{2} < 2$  より  $a < b$  であるから、 $A < B$  である。ゆえに、 $A$  は鋭角であるから

$$A = 30^\circ$$

以下同様。

(2) 余弦定理により  $a^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3 - \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3}(3 - \sqrt{3}) \cos 120^\circ = 18$

$a > 0$  であるから  $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

余弦定理により  $\cos B = \frac{(3 - \sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot (3 - \sqrt{3}) \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに  $B = 45^\circ$

よって  $C = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$

参考  $a$  を求めた後で  $B$  を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により  $\frac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B}$

よって  $\sin B = \frac{2\sqrt{3} \sin 120^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A = 120^\circ$  より  $B$  は鋭角であるから  $B = 45^\circ$

以下同様。

(3)  $A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により  $\frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$

よって  $b = \frac{5 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 5 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{2}$

$$c = \frac{5 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

(4)  $B = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$

正弦定理により  $\frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 105^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ}$

よって  $b = \frac{8 \sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{8 \sin(180^\circ - 75^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 8 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2}$

$$= 4(\sqrt{3} + 1)$$

$$c = \frac{8 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

(5) 余弦定理により  $\cos A = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  よって  $A = 30^\circ$

章末問題A

$$\cos B = \frac{4^2 + 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad B = 60^\circ$$

ゆえに  $C = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$

別解  $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$  から  $A = 30^\circ, B = 60^\circ, C = 90^\circ$

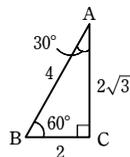
(6) 余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{2^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2 \cdot 2(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2 \cdot 2(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって  $A = 30^\circ$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって  $B = 135^\circ$  ゆえに  $C = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$

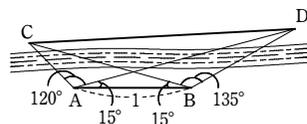


[6]

解答 (1)  $15^\circ$  (2)  $\sqrt{2}$  (3)  $\sqrt{5}$

解説

(1)  $\angle BDA = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABD)$   
 $= 180^\circ - \angle BAD$   
 $- (\angle ABC + \angle CBD)$   
 $= 180^\circ - 15^\circ - (15^\circ + 135^\circ)$   
 $= 15^\circ$



(2)  $\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC)$

$$= 180^\circ - (\angle BAD + \angle DAC) - \angle ABC = 180^\circ - (15^\circ + 120^\circ) - 15^\circ = 30^\circ$$

よって、 $\triangle ABC$  において、正弦定理より  $\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 135^\circ}$

$$\text{したがって} \quad BC = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

(3) (1) より、 $\triangle ABD$  は二等辺三角形であるから  $BD = AB = 1$

$\triangle BCD$  において、余弦定理より

$$CD^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 135^\circ = 2 + 1 - 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5$$

$CD > 0$  であるから  $CD = \sqrt{5}$

[7]

解答  $3\sqrt{10}$

解説

AD は  $\angle A$  の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 12 : 10 = 6 : 5$$

$$\text{よって} \quad BD = \frac{6}{6+5} BC = \frac{6}{11} \cdot 11 = 6$$

$\triangle ABD$  において、余弦定理より

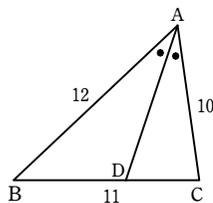
$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos B \quad \dots\dots ①$$

$\triangle ABC$  において、余弦定理より

$$\cos B = \frac{12^2 + 11^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{165}{2 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{5}{8}$$

① に代入して  $AD^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{5}{8} = 90$

$AD > 0$  であるから  $AD = 3\sqrt{10}$



[8]

解答 (ア)  $3\sqrt{5}$  (イ)  $\frac{9\sqrt{55}}{11}$  (ウ)  $\frac{5\sqrt{11}}{18}$  (エ)  $5\sqrt{5}$  (オ)  $\frac{25\sqrt{11}}{4}$

解説

$\triangle ABC$  において、余弦定理から

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$$

$$= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = 45$$

$AC > 0$  であるから  $AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

円 S の半径を R とする。

$\triangle ABC$  において、正弦定理から  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$

よって  $R = \frac{AC}{2\sin \angle ABC} \quad \dots\dots ①$

ここで、 $\sin \angle ABC > 0$  であるから

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{ゆえに、①から} \quad R = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{9\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = \frac{9\sqrt{55}}{11}$$

四角形 ABCD は円 S に内接するから

$$\cos \angle ADC = \cos(180^\circ - \angle ABC) = -\cos \angle ABC = \frac{5}{6}$$

AD = x とおくと、 $\triangle ACD$  において、余弦定理から

$$AC^2 = x^2 + CD^2 - 2 \cdot x \cdot CD \cos \angle ADC$$

$$\text{すなわち} \quad 45 = x^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2x \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{5}{6}$$

$$\text{したがって} \quad x^2 - 5\sqrt{5}x = 0$$

$$x(x - 5\sqrt{5}) = 0$$

$x > 0$  であるから  $x = 5\sqrt{5}$

すなわち  $AD = 5\sqrt{5}$

また、 $\triangle ACD$  において、正弦定理から  $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = 2R$

$$\text{よって} \quad \sin \angle ACD = \frac{AD}{2R} = \frac{5\sqrt{5}}{2 \cdot \frac{9\sqrt{55}}{11}} = \frac{55}{18\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{18}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \triangle ACD &= \frac{1}{2} AC \cdot CD \sin \angle ACD = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{5\sqrt{11}}{18} \\ &= \frac{25\sqrt{11}}{4} \end{aligned}$$

[9]

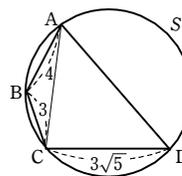
解答 正三角形

解説

$\triangle ABC$  の外接円の半径を R とすると、正弦定理から

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

これを  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C$  に代入して



$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 - \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}$$

両辺に  $4R^2$  を掛けて  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad \dots\dots ①$

余弦定理から  $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ ,  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

これを  $a \cos B = b \cos A$  に代入して

$$a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

両辺に  $2c$  を掛けて  $c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2$

よって  $a^2 = b^2$

$a > 0, b > 0$  であるから  $a = b$

$a = b$  を ① に代入して  $b^2 = b^2 + c^2 - bc$

よって  $c(b - c) = 0$   $c > 0$  であるから  $b = c$

したがって、 $a = b = c$  であるから、 $\triangle ABC$  は正三角形である。

[10]

解答 (1)  $a > 2$  (2)  $2 < a < 4$  (3) 順に  $\frac{7\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)  $a - 1 < a < a + 1$  であるから、三角形が存在するための条件は

$$a - 1 + a > a + 1$$

これを解いて  $a > 2 \quad \dots\dots ①$

(2) 鈍角三角形となるための条件は  $(a + 1)^2 > (a - 1)^2 + a^2$

$$\text{ゆえに} \quad a^2 - 4a < 0 \quad \text{すなわち} \quad a(a - 4) < 0$$

よって  $0 < a < 4 \quad \dots\dots ②$

①, ② の共通範囲を求めて  $2 < a < 4 \quad \dots\dots ③$

(3) 1 つの内角が  $120^\circ$  である三角形は鈍角三角形であり、最大の長さ  $a + 1$  の辺に対する角が鈍角である。

したがって、余弦定理により

$$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + a^2 - 2a(a - 1)\cos 120^\circ$$

$$\text{ゆえに} \quad (a + 1)^2 = (a - 1)^2 + a^2 + a(a - 1)$$

$$\text{よって} \quad 2a^2 - 5a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = 0, \frac{5}{2}$$

③ を満たすものは  $a = \frac{5}{2}$

このとき、三角形の 3 辺の長さは  $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$

外接円の半径を R とすると、正弦定理により  $\frac{7}{2} / \sin 120^\circ = 2R$

$$\text{ゆえに} \quad R = \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

また、内接円の半径を r とすると、三角形の面積について

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} \right) r$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{15\sqrt{3}}{16} = \frac{15}{4} r \quad \text{よって} \quad r = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

章末問題A

11

解答 (1)  $\frac{9\sqrt{13}}{65}$  (2)  $\sqrt{61}$  (3)  $\frac{12\sqrt{61}}{61}$

解説

(1) 直角三角形 ABC, ACD, ADB において、三平方の定理により

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$CD = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$DB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

よって、△BCD において、余弦定理により

$$\cos \angle DBC = \frac{25 + 13 - 20}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{5\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{65}$$

(2)  $0^\circ < \angle DBC < 180^\circ$  であるから

$$\sin \angle DBC = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{5\sqrt{13}}\right)^2} = \sqrt{\frac{244}{25 \cdot 13}} = \frac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}}$$

よって  $\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}} = \sqrt{61}$

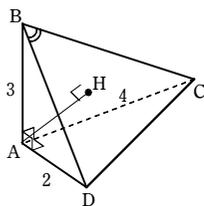
(3) 四面体 ABCD の底面を △BCD と考えると、四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot AH = \frac{\sqrt{61}}{3} AH$$

一方、△ACD を底面と考えると

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle ACD \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\right) \cdot 3 = 4$$

よって、 $\frac{\sqrt{61}}{3} AH = 4$  から  $AH = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$



章末問題B

1

解答  $90^\circ < \theta < 120^\circ$

解説

判別式を D とし、 $f(x) = x^2 - (\cos \theta)x + \cos \theta$  とする。

2 次方程式  $f(x) = 0$  が  $-1 < x < 2$  の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は、放物線  $y = f(x)$  が x 軸の  $-1 < x < 2$  の部分と、異なる 2 点で交わることである。

したがって、次の [1] ~ [4] が同時に成り立つ。

また、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  …… ①

[1]  $D = (-\cos \theta)^2 - 4\cos \theta = \cos \theta(\cos \theta - 4) > 0$

常に  $\cos \theta - 4 < 0$  であるから  $\cos \theta < 0$  …… ②

[2] 放物線の軸は直線  $x = \frac{\cos \theta}{2}$  で、この軸について

$$-1 < \frac{\cos \theta}{2} < 2 \quad \text{すなわち} \quad -2 < \cos \theta < 4$$

これは常に成り立つ。

[3]  $f(-1) > 0$  から  $1 + 2\cos \theta > 0$

したがって  $\cos \theta > -\frac{1}{2}$  …… ③

[4]  $f(2) > 0$  から  $4 - \cos \theta > 0$

これは常に成り立つ。

①, ②, ③ の共通範囲を求めて  $-\frac{1}{2} < \cos \theta < 0$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $90^\circ < \theta < 120^\circ$

2

解答  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , 証明略

解説

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2\cos \beta & \dots\dots ① \\ \sin \beta = 2\cos \alpha & \dots\dots ② \end{cases} \text{ とする。}$$

$0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $0^\circ < \beta < 180^\circ$  から  $\sin \alpha > 0$ ,  $\sin \beta > 0$

①, ② から  $\cos \beta > 0$ ,  $\cos \alpha > 0$

$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$  であるから  $4\cos^2 \alpha + \frac{1}{4}\sin^2 \alpha = 1$

よって  $16\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 4$

ゆえに  $16(1 - \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = 4$  したがって  $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$

$\sin \alpha > 0$  から  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

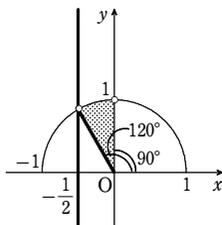
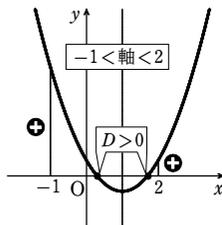
また、 $\cos \alpha > 0$  から  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

したがって  $\cos \beta = \frac{1}{2}\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \beta = 2\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

ゆえに、 $\sin \alpha = \sin \beta$ ,  $\cos \alpha = \cos \beta$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $0^\circ < \beta < 180^\circ$  から  $\alpha = \beta$

3

解答 (1)  $\cos C = \frac{3t}{t+12}$  (2)  $S = \sqrt{-2t^2 + 6t + 36}$



(3)  $t = \frac{3}{2}$  のとき最大値  $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$A = 180^\circ - C$$

△ABD, △BCD において、それぞれ余弦定理により

$$BD^2 = 4^2 + (3-t)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (3-t) \cos(180^\circ - C) = t^2 - 6t + 25 + 8(3-t) \cos C$$

$$BD^2 = 5^2 + t^2 - 2 \cdot 5 \cdot t \cos C = t^2 + 25 - 10t \cos C$$

よって  $t^2 - 6t + 25 + 8(3-t) \cos C = t^2 + 25 - 10t \cos C$

整理して  $2(t+12) \cos C = 6t$

$0 < t < 3$  であるから  $\cos C = \frac{3t}{t+12}$

(2)  $0^\circ < C < 180^\circ$  より、 $\sin C > 0$  であるから

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{3t}{t+12}\right)^2} = \sqrt{\frac{(t+12)^2 - 9t^2}{(t+12)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{4(-2t^2 + 6t + 36)}}{\sqrt{(t+12)^2}} = \frac{2\sqrt{-2t^2 + 6t + 36}}{t+12} \end{aligned}$$

また  $\sin A = \sin(180^\circ - C) = \sin C$

したがって  $S = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 4(3-t) \sin A + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t \sin C$

$$= \frac{1}{2}(12+t) \sin C = \frac{1}{2}(12+t) \cdot \frac{2\sqrt{-2t^2 + 6t + 36}}{t+12}$$

$$= \sqrt{-2t^2 + 6t + 36}$$

(3)  $S = \sqrt{-2t^2 + 6t + 36} = \sqrt{-2(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{81}{2}}$  と変形できる。

$0 < t < 3$  の範囲において、 $-2t^2 + 6t + 36$  が最大となるとき S は最大となる。

よって、 $0 < t < 3$  の範囲において、S は  $t = \frac{3}{2}$  のとき最大値  $\sqrt{\frac{81}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$  をとる。

4

解答 (1)  $120^\circ$  (2)  $\frac{37\sqrt{3}}{4}$

解説

(1) 円の中心を O とすると

$$\triangle OAB \equiv \triangle OCD \equiv \triangle OEF$$

$$\triangle OBC \equiv \triangle ODE \equiv \triangle OFA$$

よって  $\angle ABC = \angle CDE = \angle EFA$

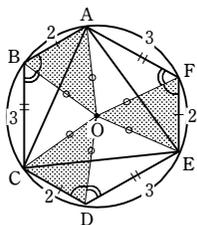
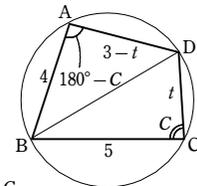
ゆえに  $\triangle ABC \equiv \triangle CDE \equiv \triangle EFA$  …… ①

よって、 $AC = CE = EA$  であり、△ACE は正三角形である。

四角形 ABCE は円に内接しているから

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle AEC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

(2) 六角形 ABCDEF の面積を S とすると



章末問題B

$$S = \triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFA + \triangle ACE$$

$$(1) \text{ から } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ここで, ① から

$$\triangle ABC = \triangle CDE = \triangle EFA = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

また,  $\triangle ABC$  において余弦定理により

$$AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 13 - 12 \left(-\frac{1}{2}\right) = 19$$

よって  $AC = \sqrt{19}$

$\triangle ACE$  は 1 辺の長さが  $\sqrt{19}$  の正三角形であるから

$$\triangle ACE = \frac{1}{2} AC \cdot AE \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{19})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{よって } S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 + \frac{19\sqrt{3}}{4} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$$

5

解答 (1)  $OC = -\sqrt{5}a$ , 証明略 (2)  $S = \frac{5}{2}(a-1)^2 \sin \theta$  (3)  $-3$

解説

(1) 直線 OA の方程式は  $y=2x$  であるから, 点 C の y 座標は  $y=2a$

$$\text{よって } OC^2 = (-a)^2 + (-2a)^2 = 5a^2$$

$$\text{ゆえに } OC = \sqrt{5}|a| = -\sqrt{5}a$$

また, 円周角の定理から

$$\angle OBC = \angle OAD, \angle OCB = \angle ODA$$

ゆえに  $\triangle OBC \sim \triangle OAD$

条件より  $OA = OD$  であるから  $OB = OC$

(2)  $OA = OD = \sqrt{5}$ ,  $OB = OC = -\sqrt{5}a$  であるから

$$S = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA$$

$$= \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin(180^\circ - \theta) + \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin \theta$$

$$+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \sin(180^\circ - \theta) + \frac{1}{2} OD \cdot OA \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}a) \cdot 2 + (-\sqrt{5}a)^2 + (\sqrt{5})^2 \} \sin \theta$$

$$= \frac{5}{2} (a-1)^2 \sin \theta$$

(3)  $\theta = 30^\circ$  から  $S = \frac{5}{2} (a-1)^2 \sin 30^\circ = \frac{5}{4} (a-1)^2$

$$20 \leq S \leq 40 \text{ から } 20 \leq \frac{5}{4} (a-1)^2 \leq 40$$

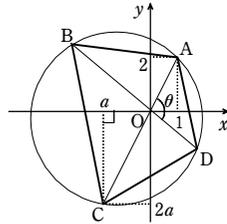
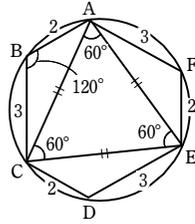
$$\text{ゆえに } 16 \leq (a-1)^2 \leq 32$$

$$\text{よって } 4 \leq |a-1| \leq 4\sqrt{2} \dots\dots ①$$

$a < 0$  より  $|a-1| = -(a-1)$  であるから, ① は

$$4 \leq -(a-1) \leq 4\sqrt{2}$$

$$\text{ゆえに } 1 - 4\sqrt{2} \leq a \leq -3$$



よって,  $a$  のとりうる値の最大値は  $-3$

6

解答 (1)  $x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$ ,  $y = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$  (2) 略

解説

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$D = 180^\circ - B$$

$\triangle ABC$  において, 余弦定理により

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B \dots\dots ①$$

$\triangle CDA$  において, 余弦定理により

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$$

$$= c^2 + d^2 - 2cd \cos(180^\circ - B)$$

$$= c^2 + d^2 + 2cd \cos B \dots\dots ②$$

$$\text{①, ② から } a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 + 2cd \cos B$$

$$\text{よって } \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab+cd)}$$

これを①に代入して

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab+cd)}$$

$$= a^2 + b^2 - \frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab+cd}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)(ab+cd) - ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab+cd}$$

ここで

$$(\text{分子}) = (a^2 + b^2)ab + (a^2 + b^2)cd - ab(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)$$

$$= (a^2 + b^2)cd + ab(c^2 + d^2) = cda^2 + b(c^2 + d^2)a + b^2cd$$

$$= (ac+bd)(ad+bc)$$

$$\text{よって } x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \dots\dots ③$$

$y$  についても同様で, ③において,  $a$  を  $b$ ,  $b$  を  $c$ ,  $c$  を  $d$ ,  $d$  を  $a$  におき換えればよいから

$$y = \sqrt{\frac{(bd+ca)(ba+cd)}{bc+da}} = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

(2) (1) の結果から

$$xy = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \cdot \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

$$= \sqrt{(ac+bd)^2}$$

$a, b, c, d$  はすべて正であるから  $xy = ac + bd$

7

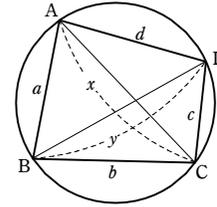
解答 (1) 12 (2)  $\sqrt{10}$  (3)  $20\sqrt{2}$  (4) 順に  $3\sqrt{2}, 72\pi$

解説

(1)  $\triangle ABC$  において, 余弦定理から

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2AB \cdot CA} = \frac{6^2 + (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2}{2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって,  $\angle BAC = 45^\circ$  であり, 求める面積は



$$\frac{1}{2} AB \cdot CA \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 12$$

(2) 線分 AP の長さは  $\triangle ABC$  の外接円の半径であるから, 正弦定理により

$$AP = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{2\sqrt{5}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{10}$$

(3)  $\triangle DPA$  は  $\angle DPA = 90^\circ$  の直角三角形であるから

$$DP = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{(2\sqrt{15})^2 - (\sqrt{10})^2} = 5\sqrt{2}$$

よって, 四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3} \triangle ABC \cdot DP = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

(4) 球 S の中心を O とする。

点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすと, 点 H は  $\triangle ABC$  の外接円の中心 P と一致する。よって, 3 点 D, O, P はこの順で一直線上にある。

$\triangle OPA$  は直角三角形であるから, 球 S の半径を  $x$  とおくと

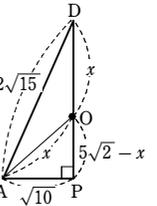
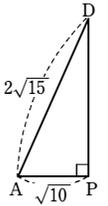
$$x^2 = (\sqrt{10})^2 + (5\sqrt{2} - x)^2$$

$$\text{展開して整理すると } 10\sqrt{2}x = 60$$

$$\text{よって } x = 3\sqrt{2}$$

さらに, 球 S の表面積は

$$4\pi x^2 = 4\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 = 72\pi$$



8

解答 (1)  $15\sqrt{7}$  (2)  $2\sqrt{6}$

解説

(1) 三平方の定理により

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{8^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$EH = \sqrt{AH^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$FH = \sqrt{EF^2 + EH^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{16} = 12$$

$\triangle AFH$  において, 余弦定理により

$$\cos \angle FAH = \frac{AF^2 + AH^2 - FH^2}{2AF \cdot AH} = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{1}{8}$$

$\sin \angle FAH > 0$  であるから

$$\sin \angle FAH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle FAH} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{よって } \triangle AFH = \frac{1}{2} AF \cdot AH \sin \angle FAH = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 15\sqrt{7}$$

(2)  $\triangle AFH$  において, FP は  $\angle AFH$  の二等分線であるから

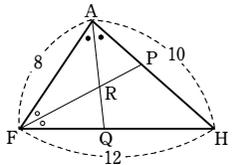
$$AP : PH = FA : FH = 8 : 12 = 2 : 3$$

$$\text{よって } \triangle AEP = \frac{2}{2+3} \triangle AEH$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 6$$

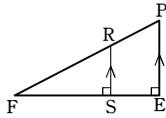
また,  $\triangle AFP$  において, AR は  $\angle FAP$  の二等分線であるから

$$FR : RP = AF : AP = 8 : \frac{2}{2+3} \cdot 10 = 2 : 1$$



章末問題B

△FPEで、辺EF上にRS//PEとなる点Sをとると  
 FS:SE=FR:RP=2:1  
 ゆえに  $SE = \frac{1}{2+1} \cdot FE = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{6} = \sqrt{6}$   
 したがって、求める四面体EAPRの体積は  
 $\frac{1}{3} \cdot \triangle AEP \cdot ES = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$



章末問題C

1

解答 (ア)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (イ)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (ウ)  $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$  (エ)  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$  (オ)  $\frac{1}{12}$

解説

1辺の長さが1の正三角形の高さは

$$1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

AC=xとすると AD=x

また、2つの二等辺三角形CDFとAEFは合同であるから CD=CF=AE=AF=1

ここで、△ACD∽△CDFであるから

$$AC:CD=CD:DF$$

ゆえに  $x:1=1:(x-1)$  よって  $x(x-1)=1$

整理すると  $x^2-x-1=0$

$x>1$ より  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  すなわち  $AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

正五角形の1つの内角は108°であるから、二等辺三角形ABCにおいて  $\angle BAC = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$   
 線分ACの中点をMとすると

$$\cos 36^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AC}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ここで、右の図の正二十面体において、ABCDEは正五角形である。

線分BGの中点をNとすると、正三角形ABG、CBGについて AN⊥BG, CN⊥BG

AN=CN= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , AC= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるから、△ACN

において余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

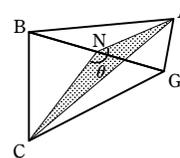
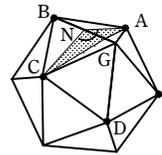
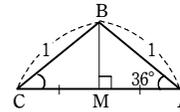
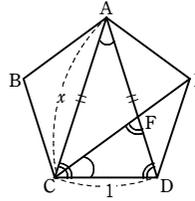
4つの平面ABG, BCG, ABC, ACGで囲まれた部分の体積を求める。

線分BGは平面ACNに垂直であるから、求める体積は2つの四面体ACNG, ACNBの体積の和である。

よって、求める体積Vは  $\frac{1}{3} \triangle ACN \cdot (BN+NG)$

ここで、 $\sin \theta > 0$ であるから  $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

ゆえに  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cdot 1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

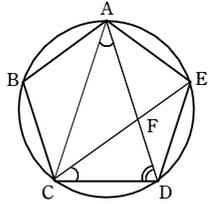


参考 (△ACD∽△CDFの証明)

正五角形ABCDEの外接円について、等しい長さの弧に対する円周角は等しいから

$$\angle CAD = \angle DCE$$

さらに、 $\angle ADC = \angle CDF$ であるから、2組の角が等しいことより △ACD∽△CDF



2

解答 (1)  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$  (2)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

解説

(1) CD=xとおくと

$$AC = \sqrt{3}x, CE = x, BC = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

△ACEに余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{(\sqrt{3}x)^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot \sqrt{3}x \cdot 1} = \frac{2x^2 + 1}{2\sqrt{3}x} \dots\dots ①$$

△ABCに余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{(\sqrt{3}x)^2 + 3^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{3}x \cdot 3} = \frac{8x^2 + 27}{18\sqrt{3}x} \dots\dots ②$$

①, ②から  $9(2x^2 + 1) = 8x^2 + 27$

ゆえに  $x^2 = \frac{9}{5}$

$x > 0$ であるから  $x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$  すなわち  $CD = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

(2)  $AC = \sqrt{3}x = \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{15}}{5}$

また、①から  $\cos A = \frac{2\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 1}{2\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{23}{6\sqrt{15}}$

よって、△ACFに余弦定理を適用すると

$$CF^2 = \left(\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{5} \cdot 2 \cdot \frac{23}{6\sqrt{15}} = \frac{27}{5} + 4 - \frac{46}{5} = \frac{1}{5}$$

CF>0であるから  $CF = \frac{1}{\sqrt{5}}$

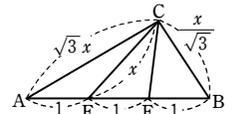
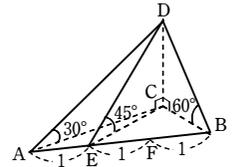
三平方の定理から  $DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \sqrt{\frac{9}{5} + \frac{1}{5}} = \sqrt{2}$

よって  $\cos \angle DFC = \frac{CF}{DF} = \frac{1}{\sqrt{5}} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

3

解答 AB=4, DA=14 または AB=14, DA=4

解説



章末問題C

△BCDにおいて、余弦定理により

$$BD^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cos C$$

$$= 338(1 - \cos C) \quad \dots\dots ①$$

△BCDにおいて、正弦定理により

$$\frac{BD}{\sin C} = 2 \times \frac{65}{8}$$

よって  $BD = \frac{65}{4} \sin C \quad \dots\dots ②$

①, ②から  $\left(\frac{65}{4} \sin C\right)^2 = 338(1 - \cos C)$

ゆえに  $25(1 - \cos^2 C) = 32(1 - \cos C)$

よって  $25(1 + \cos C)(1 - \cos C) = 32(1 - \cos C)$

$\cos C \neq 1$  であるから  $25(1 + \cos C) = 32$

よって  $\cos C = \frac{7}{25}$  ①から  $BD = \sqrt{338\left(1 - \frac{7}{25}\right)} = \frac{78}{5}$

AB = x とおくと、四角形 ABCD の周の長さが 44 であるから

$$x + 13 + 13 + DA = 44 \quad \text{ゆえに} \quad DA = 18 - x$$

△ABDにおいて、余弦定理により

$$BD^2 = AB^2 + DA^2 - 2AB \cdot DA \cos A \quad \dots\dots ③$$

A + C = 180° であるから  $\cos A = \cos(180^\circ - C) = -\cos C = -\frac{7}{25}$

よって、③から  $\left(\frac{78}{5}\right)^2 = x^2 + (18 - x)^2 - 2x(18 - x)\left(-\frac{7}{25}\right)$

分母を払って整理すると  $36(x^2 - 18x + 56) = 0$

これを解くと  $x = 4, 14$

DA = 18 - x から AB = 4, DA = 14 または AB = 14, DA = 4

4

解答 略

解説

OP = p, OQ = q, OR = r とする。

△OPQにおいて、余弦定理により

$$PQ^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos 60^\circ = p^2 + q^2 - pq$$

同様に  $QR^2 = q^2 + r^2 - qr, RP^2 = r^2 + p^2 - rp$

△PQR が正三角形であるとき、 $PQ^2 = QR^2, QR^2 = RP^2$  が

成り立つから  $p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr \quad \dots\dots ①$

$$q^2 + r^2 - qr = r^2 + p^2 - rp \quad \dots\dots ②$$

①から  $r^2 - p^2 - qr + pq = 0$

すなわち  $(r + p)(r - p) - q(r - p) = 0$

よって  $(r - p)(r + p - q) = 0 \quad \dots\dots ①'$

同様に、②から  $(p - q)(p + q - r) = 0 \quad \dots\dots ②'$

①'から  $r = p$  または  $q = r + p$

ここで、 $q = r + p$  とすると、②'から  $-r \cdot 2p = 0$

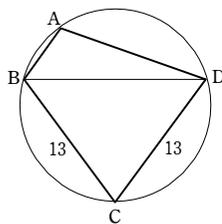
条件より、 $rp \neq 0$  であるから、不適。

よって  $r = p$

同様に、②'から、 $p = q$  または  $r = p + q$  であるが、 $r = p + q$  は不適であり  $p = q$

したがって  $p = q = r$

よって、正三角形 OAB において、OP : PA = OQ : QB となるから PQ // AB



同様に、QR // BC, RP // CA も示される。

5

解答 略

解説

半径 1 の円に内接する正十二角形 S の 1 辺の長さを x とすると、余弦定理から

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 30^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

x > 0 から  $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

よって、S の周の長さは  $12 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

内接することから、明らかに (円周の長さ) > (S の周の長さ) である。

$$(\text{円周率}) = \frac{(\text{円周の長さ})}{(\text{直径})} > \frac{(S \text{ の周の長さ})}{(\text{直径})} = \frac{6(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}$$

$$= 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) > 3(2.44 - 1.42) = 3 \times 1.02 = 3.06 > 3.05$$

よって、円周率は 3.05 より大きい。

