1

解答 (1) $a_n=-3n+103$，$a_{35}=-2$

(2) (ア) $2n-48$　(イ) 第 83 項　(ウ) 第 25 項

解説

(1) 初項が 100，公差が $97-100=-3$ であるから，一般項は

$$a_n=100+(n-1)\cdot(-3)=-3n+103$$

また　$a_{35}=-3\cdot35+103=-2$

(2) (ア) 初項を a，公差を d とすると，$a_{59}=70$，$a_{66}=84$ であるから

$$\begin{cases}a+58d=70\\a+65d=84\end{cases}$$　これを解いて　$a=-46$，$d=2$

よって，一般項は　$a_n=-46+(n-1)\cdot2=2n-48$

(イ) $a_n=118$ とすると　$2n-48=118$

これを解いて　$n=83$　よって　第 83 項

(ウ) $a_n>0$ とすると　$2n-48>0$　これを解いて　$n>24$

したがって，初めて正になるのは　第 25 項

2

解答 (1) 448　(2) 1920

解説

(1) この等差数列の初項は 85，公差は -7 であるから，末項 43 が第 n 項であるとすると

$$85+(n-1)\cdot(-7)=43$$

すなわち　$-7n+92=43$　ゆえに　$n=7$

よって，初項 85，末項 43，項数 7 の等差数列の和を求めて

$$\frac{1}{2}\cdot7(85+43)=448$$

(2) 公式 $S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$ において，$n=32$，$a=-2$，$d=4$ であるから，

求める和は　$\frac{1}{2}\cdot32(-4+31\cdot4)=1920$

3

解答 (1) 第 37 項　(2) 第 18 項，648

解説

(1) 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot70+(n-1)\cdot(-4)\}=\frac{1}{2}n(144-4n)$$
$$=2n(36-n)\quad\cdots\cdots①$$

$S_n<0$ とすると　$2n(36-n)<0$

$n>0$ であるから　$36-n<0$　よって　$n>36$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=37$

ゆえに，初項から第 37 項までの和が初めて負となる。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=70+(n-1)\cdot(-4)=-4n+74$

$a_n<0$ とすると　$-4n+74<0$　よって　$n>\frac{74}{4}=18.5$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=19$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は第 19 項以降が負になるから，初項から第 18 項までの和が最大となる。

その最大値は　$S_{18}=2\cdot18(36-18)=648$

別解 ① から　$S_n=2n(36-n)=-2(n^2-36n)=-2(n-18)^2+2\cdot18^2$

$$=-2(n-18)^2+648$$

よって，S_n は $n=18$ で最大値 648 をとる。

ゆえに，初項から第 18 項までの和が最大で，その最大値は　648

4

解答 (1) $a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$，$a_8=-4374$　(2) $32\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1) 初項が 2，公比が $\frac{-6}{2}=-3$ であるから，一般項は

$$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$$

また　$a_8=2\cdot(-3)^{8-1}=-4374$

(2) 初項を a，公比を r，一般項を a_n とすると，$a_2=48$，$a_5=162$ であるから

$$\begin{cases}ar=48 & \cdots\cdots①\\ar^4=162 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

② から　$ar\cdot r^3=162$　これに ① を代入して　$48r^3=162$

ゆえに　$r^3=\frac{27}{8}$　すなわち　$r^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3$　r は実数であるから　$r=\frac{3}{2}$

このとき，① から　$a=48\cdot\frac{2}{3}=32$　したがって　$a_n=32\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

5

解答 (1) 315　(2) 189

解説

(1) $\frac{5(2^6-1)}{2-1}=5(2^6-1)=315$

(2) 末項 96 が第 n 項とすると　$96=3\cdot2^{n-1}$

よって　$2^{n-1}=32$　すなわち　$2^{n-1}=2^5$

ゆえに　$n-1=5$　よって　$n=6$

したがって，求める和は　$\frac{3(2^6-1)}{2-1}=189$

別解 初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項を l とすると，初項から第 n 項までの和は

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a-r\cdot ar^{n-1}}{1-r}=\frac{a-rl}{1-r}$$

よって，求める和は次のように計算できる。

$$\frac{3-2\cdot96}{1-2}=189$$

6

解答 $x=4$，$y=36$

解説

数列 x，12，y が等比数列であるから

$12^2=xy$　よって　$xy=144$　……①

数列 68，y，x が等差数列であるから

$2y=68+x$　よって　$x=2y-68$　……②

② を ① に代入して　$(2y-68)y=144$　整理して　$y^2-34y-72=0$

ゆえに　$(y+2)(y-36)=0$　よって　$y=-2$，36

条件より，$y>0$ であるから　$y=36$

これを ② に代入して　$x=4$　これは条件 $0<x<y$ を満たす。

したがって　$x=4$，$y=36$

1

解答　(1)　$a_n=-5n+18$，$a_{15}=-57$

(2)　(ア)　$-2n+59$　(イ)　第 85 項　(ウ)　第 30 項

解説

(1)　初項が 13，公差が $8-13=-5$ であるから，一般項は

$$a_n=13+(n-1)\cdot(-5)=-5n+18$$

また　$a_{15}=-5\cdot15+18=-57$

(2)　(ア)　初項をa，公差を d とすると，$a_{53}=-47$，$a_{77}=-95$ であるから

$a+52d=-47$，$a+76d=-95$　これを解いて　$a=57$，$d=-2$

ゆえに　$a_n=57+(n-1)\cdot(-2)=-2n+59$

(イ)　$a_n=-111$ とすると　$-2n+59=-111$

これを解いて　$n=85$　よって　第 85 項

(ウ)　$a_n<0$ とすると　$2n>59$　よって　$n>\dfrac{59}{2}=29.5$

したがって，初めて負になるのは　第 30 項

2

解答　(1)　$S=1617$　(2)　$S=-4750$

解説

(1)　初項が 1，公差が 3 であるから，末項 97 が第 n 項であるとすると

$1+(n-1)\cdot3=97$　よって　$n=33$

ゆえに，初項 1，末項 97，項数 33 の等差数列の和を求めて

$$S=\frac{1}{2}\cdot33(1+97)=1617$$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot100\{2\cdot200+(100-1)\cdot(-5)\}=-4750$

3

解答　(1)　なりえない　(2)　$n=76$　(3)　$n=38$

解説

初項を a，公差を d，第 n 項を a_n とすると　$a_5=a+4d$，$a_{10}=a+9d$

$a_5=100$，$a_{10}=85$ であるから　$a+4d=100$，$a+9d=85$

これを解いて　$a=112$，$d=-3$

よって　$a_n=112+(n-1)\cdot(-3)=-3n+115$

(1)　$a_n=50$ とすると　$-3n+115=50$

ゆえに　$3n=65$　これを満たす自然数 n は存在しない。

よって，50 はこの数列の項となりえない。

(2)　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot112+(n-1)\cdot(-3)\}=\dfrac{1}{2}n(227-3n)$

$S_n<0$ とすると　$n(227-3n)<0$　すなわち　$n(3n-227)>0$

$n>0$ であるから　$3n-227>0$　ゆえに　$n>\dfrac{227}{3}=75.6\cdots\cdots$

n は自然数であるから　$n\geqq76$　よって，求める n の値は　$n=76$

(3)　$a_n>0$となる最大の n に対して S_n は最大となるから

$a_n=-3n+115>0$　よって　$n<\dfrac{115}{3}=38.3\cdots\cdots$

よって，$n=38$ のとき，和 S_n は最大となる。

別解　(2) から

$$S_n=\frac{1}{2}n(-3n+227)$$

$$=-\frac{3}{2}\left(n-\frac{227}{6}\right)^2+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{227}{6}\right)^2$$

$\dfrac{227}{6}=37.8\cdots\cdots$ であるから　37 と 38 では 38 に近い。

したがって，$n=38$ のとき，和 S_n は最大となる。

4

解答　(1)　$a_n=45\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)　$a_n=3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

解説

(1)　初項が 45，公比が $\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，一般項は

$$a_n=45\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2)　初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

$a_3=12$，$a_7=192$ であるから

$ar^2=12$　……①，$ar^6=192$　……②

$ar^6=ar^2\cdot r^4$ であるから，① を ② に代入して　$12r^4=192$

ゆえに　$r^4=16$　よって　$r=\pm2$

① から，$r=2$ のとき $a=3$，$r=-2$ のとき $a=3$

したがって，一般項は　$a_n=3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

5

解答　(1)　122　(2)　122

解説

(1)　$\dfrac{2\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)}=\dfrac{2\{1-(-243)\}}{4}=\dfrac{2\cdot244}{4}=122$

(2)　項数を n とする。

$162\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=2$ から　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{81}$　すなわち　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$

ゆえに　$n-1=4$　よって　$n=5$

したがって，求める和は　$\dfrac{162\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=122$

別解　初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$S=\dfrac{a-rl}{1-r}=\dfrac{rl-a}{r-1}$

よって　$\dfrac{162-\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot2}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=122$

6

解答　$a=5$，$b=15$　または　$a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

解説

数列 -5，a，b が等差数列であるから

$2a=-5+b$　……①

数列 a，b，45 が等比数列であるから

$b^2=45a$　……②

① から　$b=2a+5$　……③　② に代入して　$(2a+5)^2=45a$

整理して　$4a^2-25a+25=0$　これを解いて　$a=5$，$\dfrac{5}{4}$

③ から　$a=5$，$b=15$　または　$a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

1

解答　7，9，11

解説

3つの数を $a-d$，a，$a+d$ とおく。条件から

$$(a-d)+a+(a+d)=27 \cdots\cdots ①,\quad (a-d)\cdot a\cdot(a+d)=693 \cdots\cdots ②$$

① から　$3a=27$　　よって　$a=9$

これを ② に代入すると　$(9-d)\cdot 9\cdot(9+d)=693$　　ゆえに　$81-d^2=77$

よって　$d^2=4$　　これを解いて　$d=\pm 2$

$d=2$ のとき　$a-d=7$，$a+d=11$

$d=-2$ のとき　$a-d=11$，$a+d=7$

したがって，求める3つの数は　7，9，11

別解　3つの数を a，b，c とする。

これらが等差数列をなすから　$2b=a+c$ ……①

また，条件から　$a+b+c=27$ ……②，　$abc=693$ ……③

①，② から　$b=9$，$c=18-a$ ……④

④ を ③ に代入すると　$a\cdot 9\cdot(18-a)=693$

整理すると　$(a-11)(a-7)=0$　　ゆえに　$a=7$，11

$a=7$ のとき　④ から　$c=11$　　よって　$(a, b, c)=(7, 9, 11)$

$a=11$ のとき　④ から　$c=7$　　よって　$(a, b, c)=(11, 9, 7)$

よって，求める3つの数は　7，9，11

2

解答　(1)　6570　(2)　2821　(3)　3942　(4)　17089　(5)　8446

解説

20 から 200 までの自然数のうち，自然数 n の倍数の和を $S(n)$ とする。

(1)　20 から 200 までの自然数のうち，3の倍数を順に並べると

$$3\cdot 7,\ 3\cdot 8,\ 3\cdot 9,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot 66$$

これは初項 21，末項 198，項数 $66-7+1=60$ の等差数列であるから

$$S(3)=\frac{1}{2}\cdot 60(21+198)=6570$$

(2)　20 から 200 までの自然数のうち，7の倍数を順に並べると

$$7\cdot 3,\ 7\cdot 4,\ 7\cdot 5,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot 28$$

これは初項 21，末項 196，項数 $28-3+1=26$ の等差数列であるから

$$S(7)=\frac{1}{2}\cdot 26(21+196)=2821$$

(3)　20 から 200 までの自然数のうち，5で割って2余る数を順に並べると

$$5\cdot 4+2,\ 5\cdot 5+2,\ 5\cdot 6+2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot 39+2$$

これは初項 22，末項 197，項数 $39-4+1=36$ の等差数列であるから，求める和は

$$\frac{1}{2}\cdot 36(22+197)=3942$$

(4)　20 から 200 までの自然数の和は

(1 から 200 までの自然数の和)$-$(1 から 19 までの自然数の和)

$$=\frac{1}{2}\cdot 200(200+1)-\frac{1}{2}\cdot 19(19+1)=20100-190=19910$$

(2) から，求める和は　$19910-2821=17089$

(5)　3かつ7の倍数は，21 の倍数である。

20 から 200 までの自然数のうち，21 の倍数を順に並べると

$$21\cdot 1,\ 21\cdot 2,\ 21\cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 21\cdot 9$$

これは初項 21，末項 189，項数 9 の等差数列であるから

$$S(21)=\frac{1}{2}\cdot 9(21+189)=945$$

よって，求める和は　$S(3)+S(7)-S(21)=6570+2821-945=8446$

3

解答　295

解説

初項を a，公差を d，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_5=\frac{1}{2}\cdot 5(2a+4d)=5(a+2d),\quad S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=5(2a+9d)$$

$S_5=-5$，$S_{10}=-5+145=140$ であるから　$5(a+2d)=-5$，$5(2a+9d)=140$

ゆえに　$a+2d=-1$，$2a+9d=28$　　これを解いて　$a=-13$，$d=6$

よって，求める和は　$S_{15}-S_{10}=\dfrac{1}{2}\cdot 15\{2\cdot(-13)+14\cdot 6\}-140$

$$=435-140=295$$

4

解答　(1)　証明略，初項 -3，公差 2　(2)　証明略，初項 1，公差 6

解説

(1)　$a_n=2n-5$ であるから

$$a_{n+1}-a_n=\{2(n+1)-5\}-(2n-5)=2\ \text{(一定)}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。

公差は 2，初項は　$a_1=2\cdot 1-5=-3$

(2)　$b_n=a_{3n}=2\cdot(3n)-5=6n-5$

ゆえに　$b_{n+1}-b_n=\{6(n+1)-5\}-(6n-5)=6$ (一定)

よって，数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

公差は 6，初項は　$b_1=6\cdot 1-5=1$

5

解答　$x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{2}{5}$；　$a_n=\dfrac{2}{n+1}$

解説

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$：　1，$\dfrac{1}{x}$，2，$\dfrac{1}{y}$，…… が等差数列になる。

よって　$2\cdot\dfrac{1}{x}=1+2$，$2\cdot 2=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　　ゆえに　$x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{2}{5}$

この数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ の一般項は　$1+(n-1)\cdot\left(\dfrac{3}{2}-1\right)=\dfrac{n+1}{2}$

したがって　$a_n=\dfrac{2}{n+1}$

6

解答　5，-10，20

解説

(解1)　等比数列をなす3つの実数を a，ar，ar^2 とおく。

条件から　$a+ar+ar^2=15$　……①

$a\cdot ar\cdot ar^2=-1000$　……②

② から　$a^3r^3=-1000$　　すなわち　$(ar)^3=(-10)^3$

ar は実数であるから　$ar=-10$　……③

① の両辺に r を掛けて　$ar+ar^2+ar^3=15r$　　すなわち　$ar(1+r+r^2)=15r$

③ を代入して　$-10(1+r+r^2)=15r$　　整理すると　$2r^2+5r+2=0$

よって　$(r+2)(2r+1)=0$　　ゆえに　$r=-2$，$-\dfrac{1}{2}$

③ から　$r=-2$ のとき　$a=5$，　$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=20$

$a=5$，$r=-2$ のとき　$ar=-10$，$ar^2=20$

$a=20$，$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$ar=-10$，$ar^2=5$

よって，求める3つの実数は　5，-10，20

(解2)　等比数列をなす3つの実数を a，b，c とおくと

$$b^2=ac \quad\cdots\cdots ①$$

条件から　$a+b+c=15$　……②，　$abc=-1000$　……③

①，③ から　$b\cdot b^2=-1000$　　すなわち　$b^3=(-10)^3$

b は実数であるから　$b=-10$

これを ①，② に代入すると　$ac=100$　……④，　$a+c=25$　……⑤

⑤ から　$c=25-a$　……⑥

これを ④ に代入して　$a(25-a)=100$

よって　$a^2-25a+100=0$　　すなわち　$(a-5)(a-20)=0$

ゆえに　$a=5$，20

⑥ から　$a=5$ のとき　$c=20$，　$a=20$ のとき　$c=5$

したがって，求める3つの実数は　5，-10，20

7

解答　19608 円

解説

各年初めの元金は，1年ごとに利息がついて 1.02 倍となる。

1年目初めの x 円は，5年後末には　$x(1.02)^5$ 円

2年目初めの x 円は，5年後末には　$x(1.02)^4$ 円

⋮

5年目初めの x 円は，5年後末には　$x\cdot 1.02$ 円　になる。

よって，5年間での貯金の総額は

$$x\cdot 1.02+x(1.02)^2+\cdots\cdots+x(1.02)^5=\frac{1.02x\{(1.02)^5-1\}}{1.02-1}$$

$$=\frac{1.02x\times 0.1}{0.02}$$

これが 10 万円になるとすると　$\dfrac{1.02x\times 0.1}{0.02}=100000$

これを解いて　$x=19607.8\cdots\cdots$

円未満を切り上げて，求める金額は　19608 円

1

解答　$2(m+n)(n-m)$

解説

m 以上 n 以下の分数で，5 を分母とするもの（整数も含む）を書き出すと

$$\frac{5m}{5},\ \frac{5m+1}{5},\ \frac{5m+2}{5},\ \cdots\cdots,\ \frac{5n-1}{5},\ \frac{5n}{5}$$

これは初項 m，末項 n，公差 $\frac{1}{5}$，項数 $5(n-m)+1$ の等差数列である。

よって，その和を S_1 とすると　$S_1=\frac{1}{2}\{5(n-m)+1\}(m+n)$

また，m 以上 n 以下の整数の和を S_2 とすると　$S_2=\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)$

求める和は S_1-S_2 であるから

$$\frac{1}{2}\{5(n-m)+1\}(m+n)-\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)$$
$$=\frac{1}{2}(m+n)\{5(n-m)+1-(n-m+1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(m+n)\cdot 4(n-m)=2(m+n)(n-m)$$

2

解答　(1)　78　　(2)　162

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_{10}=10a$ となり　　$10a=6$

このとき，$S_{20}=20a=12\neq 24$ であるから，条件を満たさない。

よって　　$r\neq 1$

ゆえに　　$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=6$ ……①，$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=24$ ……②

②÷① から　　$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}\cdot\frac{r-1}{a(r^{10}-1)}=\frac{24}{6}$

よって　　$r^{10}+1=4$　すなわち　$r^{10}=3$　……③

(1)　$S_{30}=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}\{(r^{10})^2+r^{10}+1\}$

①，③ を代入して　　$S_{30}=6\cdot(3^2+3+1)=78$

(2)　$S_{40}=\frac{a(r^{40}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}\{(r^{10})^2+1\}$

②，③ を代入して　　$S_{40}=24\cdot(3^2+1)=240$

求める第 31 項から第 40 項までの和は $S_{40}-S_{30}$ であるから

$S_{40}-S_{30}=240-78=162$

3

解答　$c_n=2^{2n-1}$

解説

$a_1=2$，$b_1=2$ であるから　　$c_1=2$

数列 $\{a_n\}$ の第 l 項が数列 $\{b_n\}$ の第 m 項に等しいとすると

$3l-1=2^m$

ゆえに　　$b_{m+1}=2^{m+1}=2^m\cdot 2=(3l-1)\cdot 2=3\cdot 2l-2$　……①

よって，b_{m+1} は数列 $\{a_n\}$ の項ではない。

① から　　$b_{m+2}=2b_{m+1}=3\cdot 4l-4=3(4l-1)-1$

ゆえに，b_{m+2} は数列 $\{a_n\}$ の項である。

よって，数列 $\{c_n\}$ は公比 2^2 の等比数列である。

$c_1=2$ であるから　　$c_n=2\cdot(2^2)^{n-1}=2^{2n-1}$

4

解答　3，9，15，21，27 または 27，21，15，9，3 または 23，25，27
または 27，25，23

解説

項の最小値を a，項数を n とすると　$\frac{n(a+27)}{2}=75$

ゆえに　$n(a+27)=150$

また，$0<a\leqq 27$ であるから　$27<a+27\leqq 54$

したがって　$(n,\ a+27)=(5,\ 30),\ (3,\ 50)$

ゆえに　　$(n,\ a)=(5,\ 3),\ (3,\ 23)$

$n=5$，$a=3$ のとき，次の場合がある。

[1]　初項が 3，末項が 27，項数が 5 の等差数列。

[2]　初項が 27，末項が 3，項数が 5 の等差数列。

[1] のとき，公差を d_1 とすると　$3+(5-1)d_1=27$

ゆえに　$d_1=6$

よって，求める数列は　3，9，15，21，27

[2] のとき，公差を d_2 とすると　$27+(5-1)d_2=3$

ゆえに　$d_2=-6$

よって，求める数列は　27，21，15，9，3

$n=3$，$a=23$ のとき，上と同様に考えると，求める数列は

23，25，27　または　27，25，23

1

解答　(1)　$2+5+8+\cdots\cdots+(3n-1)$　　(2)　$5^2+5^3+5^4+\cdots\cdots+5^9$

(3)　$2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)^2$

解説

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=2+5+8+\cdots\cdots+(3n-1)$

(2)　$\sum_{m=2}^{9}5^m=5^2+5^3+5^4+\cdots\cdots+5^9$

(3)　$\sum_{k=1}^{n-1}2k^2=2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)^2$

2

解答　(1)　$\sum_{k=1}^{5}(k+2)$　　(2)　$\sum_{k=1}^{6}(3k-2)^2$

解説

(1)　数列 3，4，5，6の第 k 項は　　$k+2$

よって　　(与式)$=\sum_{k=1}^{n}(k+2)$

(2)　数列 1^2，4^2，7^2，10^2 の第 k 項は　　$(3k-2)^2$

よって　　(与式)$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2$

3

解答　(1)　$n(n+4)$　　(2)　$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$　　(3)　$\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$

(4)　$\frac{1}{3}n(n-1)(n-8)$　　(5)　$\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

解説

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$

$=n^2+4n=n(n+4)$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$

$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$

$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

(3)　$\sum_{k=1}^{n}(k^3-4k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-4\sum_{k=1}^{n}k=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-2n(n+1)=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-8\}$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$

(4)　$\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-5k)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-5\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}-5\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$

$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-\frac{5}{2}n(n-1)=\frac{1}{6}n(n-1)\{(2n-1)-15\}$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-16)=\frac{1}{3}n(n-1)(n-8)$$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^k=\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

4

解答　(1)　$n^2(2n^2-1)$　　(2)　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

解説

(1)　第 k 項は $(2k-1)^3$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3&=8\sum_{k=1}^{n}k^3-12\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=8\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-12\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\\&=n(n+1)(2n^2-2n+1)-n=n^2(2n^2-1)\end{aligned}$$

(2)　第 k 項は $k(2k-1)$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)&=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\\&=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)\end{aligned}$$

5

解答　第 k 項，和 S_n の順に　(1)　$k(k+1)$，$\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2)　3^k-1，$\dfrac{3^{n+1}}{2}-n-\dfrac{3}{2}$　　(3)　$\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$，$\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　第 k 項は初項 2，公差 2，項数 k の等差数列の和であるから

$$a_k=\frac{1}{2}k\{2\cdot2+(k-1)\cdot2\}=k(k+1)$$

よって，求める和 S_n は

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

(2)　この数列の第 k 項は　$2+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{k-1}$

これは，初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 k 項までの和であるから

$$a_k=\frac{2(3^k-1)}{3-1}=3^k-1$$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n=\frac{3^{n+1}}{2}-n-\frac{3}{2}$$

(3)　第 k 項は　$\displaystyle\sum_{m=1}^{k}m^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

よって，求める和 S_n は

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}\\&=\frac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2)=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)\end{aligned}$$

6

解答　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

解説

この数列の第 k 項は　$k\{n+(k-1)\cdot(-1)\}=-k^2+(n+1)k$

したがって，求める和を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\&=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

別解　求める和を S とすると

$$\begin{aligned}S&=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)\\&=\sum_{k=1}^{n}(1+2+\cdots\cdots+k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

1

解答　(1)　$3+6+9+12+15+18+21+24+27+30$

(2)　$2^3+2^4+2^5+2^6$　　(3)　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n+1}$

解説

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}3k=3+6+9+12+15+18+21+24+27+30$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{5}2^{k+1}=2^3+2^4+2^5+2^6$

(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$

2

解答　(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$

解説

(1)　第 k 項は $3k-2$ であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$

(2)　第 k 項は 3^{k-1} であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$

3

解答　(1)　$n(n-6)$　　(2)　$\dfrac{1}{6}n(10n^2+3n+5)$　　(3)　$n(n^3+2n^2+n-1)$

(4)　$\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　　(5)　$\dfrac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$　　(6)　$\dfrac{1}{2}(3^{n+1}+4n-3)$

(7)　$(n-1)(2n+7)$

解説

(1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-7)&=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}7=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-7n\\&=n\{(n+1)-7\}=n(n-6)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(5k^2-4k+2)&=5\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2\\&=5\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n\\&=\frac{1}{6}n\{5(n+1)(2n+1)-12(n+1)+12\}=\frac{1}{6}n(10n^2+3n+5)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)&=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}1=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-n\\&=n\{n(n+1)^2-1\}=n(n^3+2n^2+n-1)\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(3i-1)^2&=\sum_{i=1}^{n}(9i^2-6i+1)=9\sum_{i=1}^{n}i^2-6\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1\\&=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\&=\frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-6(n+1)+2\}=\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)\end{aligned}$$

(6) $\sum_{k=1}^{n}(3^k+2)=\sum_{k=1}^{n}3^k+\sum_{k=1}^{n}2=\frac{3(3^n-1)}{3-1}+2n=\frac{1}{2}(3^{n+1}+4n-3)$

(7) $\sum_{k=1}^{n-1}(4k+7)=4\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}7=4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+7(n-1)$

$=(n-1)(2n+7)$

$\boxed{4}$

解答　(1) $\frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)$　(2) $\frac{1}{3}n(n+1)(5n-2)$　(3) $\frac{1}{3}n(8n^2+3n-2)$

解説

数列の第 k 項を a_k とする。

(1)　各項は3から始まる奇数の平方であるから　$a_k=(2k+1)^2$

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2+4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)+6(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)$$

(2)　数列 2，7，12，17，…… は，初項 2，公差 5 の等差数列であるから，その第 k 項は

$2+(k-1)\cdot5=5k-3$

ゆえに　$a_k=k(5k-3)$

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(5k-3)=\sum_{k=1}^{n}(5k^2-3k)=5\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=5\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{5(2n+1)-9\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(10n-4)=\frac{1}{3}n(n+1)(5n-2)$$

(3)　数列 3，7，11，15，…… は，初項 3，公差 4 の等差数列であるから，その第 k 項は

$3+(k-1)\cdot4=4k-1$

ゆえに　$a_k=(2k-1)(4k-1)$

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(4k-1)=\sum_{k=1}^{n}(8k^2-6k+1)=8\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=8\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{4(n+1)(2n+1)-9(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(8n^2+3n-2)$$

$\boxed{5}$

解答　(1) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$　(2) $\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$　(3) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)$

解説

(1)　この数列の第 k 項 a_k は，初項 1，公差 4，項数 k の等差数列の和で表されるから

$$a_k=\frac{1}{2}k\{2\cdot1+(k-1)\cdot4\}=k(2k-1)$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

(2)　この数列の第 k 項 a_k は，初項 1，公比 3，項数 k の等比数列の和で表されるから

$$a_k=\frac{1(3^k-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

(3)　第 k 項は，一般項 $(2m-1)^2$ の第 k 項までの和であるから

$$\sum_{m=1}^{k}(4m^2-4m+1)=4\sum_{m=1}^{k}m^2-4\sum_{m=1}^{k}m+\sum_{m=1}^{k}1$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-4\cdot\frac{1}{2}k(k+1)+k$$

$$=\frac{1}{3}k(4k^2-1)=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)$$

よって　求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}k(4k^2-1)=\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

$\boxed{6}$

解答　(1) $\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$　(2) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

解説

(1)　この数列の第 k 項 a_k $(k\leqq n)$ は　$a_k=k(n+k)=k^2+nk$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+nk)=\sum_{k=1}^{n}k^2+n\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3n\}=\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$$

(2)　この数列の第 k 項 a_k $(k\leqq n)$ は　$a_k=k^2\{n-(k-1)\}=-k^3+(n+1)k^2$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^3+(n+1)k^2\}=-\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{-3n+2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

$\boxed{1}$

解答　7

解説

$$\sum_{k=m+1}^{2m}(2k+1)=\sum_{k=1}^{2m}(2k+1)-\sum_{k=1}^{m}(2k+1)$$

$=2m(2m+1)+2m-\{m(m+1)+m\}$

$=3m^2+2m$

ゆえに，与式は　$3m^2+2m>133$　すなわち　$3m^2+2m-133>0$

よって　$(m+7)(3m-19)>0$

m は自然数であるから　$m+7>0$　ゆえに　$3m-19>0$　すなわち　$m>\frac{19}{3}$

よって，求める最小の自然数 m は　7

$\boxed{2}$

解答　(1) $n(n+1)$　(2) $3\cdot2^{n+1}-3n-6$

解説

(1) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}2\right)=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}3\cdot2^{i-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{3(2^k-1)}{2-1}=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot2^k-3)=\sum_{k=1}^{n}3\cdot2^k-\sum_{k=1}^{n}3$

$$=\sum_{k=1}^{n}6\cdot2^{k-1}-3\sum_{k=1}^{n}1=\frac{6(2^n-1)}{2-1}-3n=3\cdot2^{n+1}-3n-6$$

$\boxed{3}$

解答　$\frac{10^{n+1}}{27}-\frac{1}{3}n-\frac{10}{27}$

解説

第 k 項は 3 が k 個並ぶから，その値は

$$3+3\cdot10+3\cdot10^2+\cdots\cdots+3\cdot10^{k-2}+3\cdot10^{k-1}=\frac{3(10^k-1)}{10-1}=\frac{10^k-1}{3}$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{3}=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{3}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{10^{n+1}}{27}-\frac{1}{3}n-\frac{10}{27}$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)$　　(2)　$\dfrac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

解説

(1)　求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

(2)　求める和を T とすると

$$(1+2+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+2(S+T)$$

すなわち　$\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2(S+T)$

したがって，(1) より

$$T=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　$\dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)$

解説

(1)　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$ とおくと

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n$$

$$S=n+(n-1)+\cdots\cdots+1$$

辺々を加えると　$2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots\cdots+(n+1)}_{n\text{ 個}}$

よって　$2S=n(n+1)$　すなわち　$S=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}$$

$$=(\cancel{2^3}-1^3)+(\cancel{3^3}-\cancel{2^3})+(\cancel{4^3}-\cancel{3^3})+\cdots\cdots+\{\cancel{n^3}-\cancel{(n-1)^3}\}+\{(n+1)^3-\cancel{n^3}\}$$

$$=(n+1)^3-1$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=(n+1)^3-1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$ であるから，(1) の結果より

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\left\{\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)-3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-1-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3)　$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}$$

$$=(\cancel{2^4}-1^4)+(\cancel{3^4}-\cancel{2^4})+(\cancel{4^4}-\cancel{3^4})+\cdots\cdots+\{\cancel{n^4}-\cancel{(n-1)^4}\}+\{(n+1)^4-\cancel{n^4}\}$$

$$=(n+1)^4-1$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)=(n+1)^4-1$

(2) と同様にして，(1)，(2) の結果より

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)-6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(4)　$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}$$

$$=(\cancel{2^5}-1^5)+(\cancel{3^5}-\cancel{2^5})+(\cancel{4^5}-\cancel{3^5})+\cdots\cdots+\{\cancel{n^5}-\cancel{(n-1)^5}\}+\{(n+1)^5-\cancel{n^5}\}$$

$$=(n+1)^5-1$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)=(n+1)^5-1$

(2) と同様にして，(1) 〜 (3) の結果より

$$\sum_{k=1}^{n}k^4$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)-10\sum_{k=1}^{n}k^3-10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{(n+1)^5-1-10\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a_n=n^2+4n+3$　　(2)　$a_n=2^n+3$

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　数列 $\{b_n\}$ は，7，9，11，13，…… であるから，初項 7，公差 2 の等差数列である。

ゆえに　$b_n=7+(n-1)\cdot2=2n+5$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+5)=8+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}5$$

$$=8+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+5(n-1)=n^2+4n+3$$

また，初項は $a_1=8$ であるから，上の式は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により，一般項 a_n は　$a_n=n^2+4n+3$

(2)　数列 $\{b_n\}$ は，2，4，8，16，…… であるから，初項 2，公比 2 の等比数列である。

ゆえに　$b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3$$

また，初項は $a_1=5$ であるから，上の式は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により，一般項 a_n は　$a_n=2^n+3$

$\boxed{2}$

解答　$S=\dfrac{n}{3(4n+3)}$

解説

第 k 項は　$\dfrac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4k-1}-\dfrac{1}{4k+3}\right)$

よって，求める和 S は

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4n+3)-3}{3(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a_1=0$，$n\geqq2$ のとき $a_n=3n^2-3n+1$　　(2)　$a_n=2^{n-1}$

解説

(1)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^3-1=0$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3-1)-\{(n-1)^3-1\}$

$$=(n^3-1)-(n^3-3n^2+3n-2)$$

$$=3n^2-3n+1\quad\cdots\cdots①$$

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ となり，① は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　$a_1=0$，　$n\geqq2$ のとき　$a_n=3n^2-3n+1$

(2)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=2^1-1=1$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}(2-1)\quad\cdots\cdots①$

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2^{n-1}$

4

解答　$S_n=(2n-1)2^n+1$

解説

$$S_n=3+5\cdot2+7\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n+1)2^{n-1}$$
$$2S_n=\qquad 3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-1)2^{n-1}+(2n+1)2^n$$

辺々引くと　$-S_n=3+2\cdot2+2\cdot2^2+\cdots\cdots+2\cdot2^{n-1}-(2n+1)2^n$

$$=1+\frac{2(2^n-1)}{2-1}-(2n+1)2^n$$
$$=-1-(2n-1)2^n$$

ゆえに　$S_n=(2n-1)2^n+1$

5

解答　(1)　n^2-n+1　(2)　n^3　(3)　第 17 群の 15 番目

解説

(1)　$n\geqq2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって，第 n 群の最初の奇数は $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 番目の奇数で

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2)　(1) より，第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列をなす。

よって，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{2\cdot(n^2-n+1)+(n-1)\cdot2\}=n^3$$

(3)　301 が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2-n+1\leqq301<(n+1)^2-(n+1)+1$$

よって　$n(n-1)\leqq300<(n+1)n$　……①

$n(n-1)$，$(n+1)n$ は単調に増加し，$17\cdot16=272$，$18\cdot17=306$ であるから，

① を満たす自然数 n は　$n=17$

301 が第 17 群の m 番目であるとすると

$(17^2-17+1)+(m-1)\cdot2=301$　これを解いて　$m=15$

したがって，301 は第 17 群の 15 番目に並ぶ数である。

別解　(前半)　$2k-1=301$ から　$k=151$

よって，301 はもとの数列において，151 番目の奇数である。

301 が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<151\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに　$n(n-1)<302\leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は，上の解答と同様にして　$n=17$

6

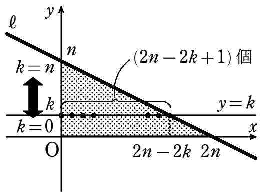
解答　$(n+1)^2$

解説

2 点 $(2n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$x+2y=2n$$

直線 $y=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ と直線 ℓ の交点の座標は $(2n-2k,\ k)$ であるから，題意に適する格子点のうち，直線 $y=k$ 上にある点の個数は $2n-2k+1$ である。



よって，求める格子点の個数は

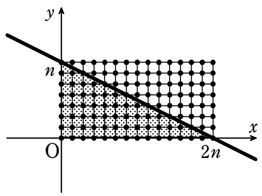
$$\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)=\sum_{k=0}^{0}(2n-2k+1)+\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)$$
$$=(2n+1)+(2n+1)\sum_{k=1}^{n}1-2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=(2n+1)+(2n+1)n-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=(n+1)^2$$

別解　直線 $x+2y=2n$ $(0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(2,\ n-1)$，……，$(2n,\ 0)$ の個数は

$n+1$

4 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$(n+1)(2n+1)$



よって，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n+1)(2n+1)-(n+1)\}+(n+1)=(n+1)^2$$

1

解答　(1)　$3n^2-n$　(2)　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　$\{a_n\}$：2，10，24，44，70，102，140，……

$\{b_n\}$：8，14，20，26，32，38，……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 8，公差 6 の等差数列であるから　$b_n=8+(n-1)\cdot6=6n+2$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+2)=2+6\sum_{k=1}^{n-1}k+2\sum_{k=1}^{n-1}1$

$$=2+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=3n^2-n\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき　$3n^2-n=3\cdot1^2-1=2$

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-n$

(2)　$\{a_n\}$：3，4，7，16，43，124，……

$\{b_n\}$：1，3，9，27，81，……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=3^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=3+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$　……①

$n=1$ のとき　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)=\frac{1}{2}(1+5)=3$

初項は $a_1=3$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$

2

解答　(1)　$S=\frac{n}{3n+1}$　(2)　$S=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

解説

(1)　$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

であるから

$$S=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

(2)　$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

であるから，$n\geqq2$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$S=\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

3

解答　求める数列の一般項を a_n とする。

(1)　$a_n=-2n+6$　(2)　$a_1=3$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=3n^2-3n+1$

(3)　$a_1=5$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2^{n-1}$

解説

求める数列の一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(5n-n^2)-\{5(n-1)-(n-1)^2\}$$
$$=(-n^2+5n)-(-n^2+7n-6)=-2n+6 \quad \cdots\cdots ①$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=4$

① で $n=1$ とおくと $a_1=4$ となるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=-2n+6$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3+2)-\{(n-1)^3+2\}=(n^3+2)-(n^3-3n^2+3n+1)$$
$$=3n^2-3n+1 \quad \cdots\cdots ①$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=3$

① で $n=1$ とおくと $a_1=1$ となるから，① は $n=1$ のときは成り立たない。

よって　$a_1=3$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=3n^2-3n+1$

(3)　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+3)-(2^{n-1}+3)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=5$

① で $n=1$ とおくと $a_1=1$ となるから，① は $n=1$ のときは成り立たない。

よって　$a_1=5$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2^{n-1}$

4

解答　$S=(n-1)\cdot 3^n+1$

解説

$$S=1\cdot 1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+7\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$$
$$3S=\quad 1\cdot 3+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n$$

辺々を引くと

$$S-3S=1\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

よって　$-2S=1+2(3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n$

$$=1+2\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^n=-2(n-1)\cdot 3^n-2$$

したがって　$S=(n-1)\cdot 3^n+1$

5

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+2)$　(2)　$\dfrac{1}{2}n(3n^2-1)$　(3)　第 10 群の 5 番目の数

解説

(1)　もとの等差数列の第 n 項は　$1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

$n\geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる数の総数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって，第 n 群 $(n\geqq 2)$ の最初の数は，もとの等差数列の第 $\left\{\dfrac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項であるから

$$3\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-2=\frac{1}{2}(3n^2-3n+2)$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，求める数は　$\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+2)$

(2)　求める和は，初項 $\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+2)$，公差 3，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\left\{2\cdot\frac{1}{2}(3n^2-3n+2)+(n-1)\cdot 3\right\}=\frac{1}{2}n(3n^2-1)$$

(3)　(1) で求めた数を a_n とする。

148 が第 n 群に含まれるとすると　$a_n\leqq 148<a_{n+1}$　$\cdots\cdots$ ①

ここで　$a_{10}=\dfrac{1}{2}(3\cdot 10^2-3\cdot 10+2)=136$

$a_{11}=\dfrac{1}{2}(3\cdot 11^2-3\cdot 11+2)=166$

であるから，① を満たす自然数 n は　$n=10$

よって，148 は第 10 群に含まれる。

第 10 群に含まれる数を，小さい方から順に書き出すと

136，139，142，145，148，$\cdots\cdots$

したがって，148 は第 10 群の 5 番目の数である。

6

解答　$\dfrac{1}{2}(n+1)(3n+2)$

解説

2 点 $(3n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を通る直線 ℓ の方程式は　$x+3y=3n$

直線 $y=k\ (k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ と直線 ℓ の交点の座標は $(3n-3k,\ k)$ であるから，

題意に適する格子点のうち，直線 $y=k$ 上にある点の個数は $3n-3k+1$ である。

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(3n-3k+1)=\sum_{k=0}^{0}(3n-3k+1)+\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+1)$$
$$=(3n+1)+(3n+1)\sum_{k=1}^{n}1-3\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=(3n+1)+(3n+1)n-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$$

別解　直線 $x+3y=3n\ (0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(3,\ n-1)$，$\cdots\cdots$，$(3n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

4 点 $(0,\ 0)$，$(3n,\ 0)$，$(3n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$(n+1)(3n+1)$

よって，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n+1)(3n+1)-(n+1)\}+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$$

1

解答　(ア)　$-4n+17$　(イ)　28　(ウ)　106

解説

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=13$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=-2n^2+15n-\{-2(n-1)^2+15(n-1)\}$

$$=-4n+17 \quad \cdots\cdots ①$$

① で $n=1$ とすると $-4\cdot 1+17=13$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n={}^{\text{ア}}-4n+17$

$a_n>0$ とすると　$-4n+17>0$　ゆえに　$n<\dfrac{17}{4}$

n は自然数であるから　$n\leqq 4$

よって，S_n は $n=4$ のとき最大値をとる。

その最大値は　$S_4={}^{\text{イ}}28$

また　$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}|a_n|=\sum_{n=1}^{4}a_n-\sum_{n=5}^{10}a_n=2\sum_{n=1}^{4}a_n-\sum_{n=1}^{10}a_n$

$$=2\times 28-(-50)={}^{\text{ウ}}106$$

2

解答　$n(n+1)(n+2)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

また，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：6，24，60，120，210，336，504，$\cdots\cdots$

$\{b_n\}$：18，36，60，90，126，168，$\cdots\cdots$

$\{c_n\}$：18，24，30，36，42，$\cdots\cdots$

数列 $\{c_n\}$ は，初項 18，公差 6 の等差数列であるから

$$c_n=18+(n-1)\cdot 6=6n+12$$

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=18+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+12)$

$$=18+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+12(n-1)=3n^2+9n+6$$

この式に $n=1$ を代入すると，$b_1=3+9+6=18$ となるから

$$b_n=3n^2+9n+6 \quad (n\geqq 1)$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=6+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+9k+6)$$
$$=6+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+9\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)$$
$$=\frac{n}{2}\cdot 2(n^2+3n+2)=n(n+1)(n+2)$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=1\cdot 2\cdot 3=6$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=n(n+1)(n+2)$

3

解答　(1)　$\dfrac{2n}{n+1}$　(2)　$\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$　(3)　$\dfrac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})$

解説

(1)　この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k=\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+k}=\frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)}=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

よって，求める和を S とすると

$$S=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

(2)　第 k 項は　$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}\right)\right.$

$\left.+\cdots\cdots+\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

(3)　第 k 項は　$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\}$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})$$

4

解答　(ア)　1　(イ)　1　(ウ)　1

解説

$\log_5\dfrac{n+2}{n}=\log_5(n+2)-\log_5 n$　であるから

$$\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=(\cancel{\log_5 3}-\log_5 1)+(\cancel{\log_5 4}-\log_5 2)+(\cancel{\log_5 5}-\cancel{\log_5 3})+\cdots\cdots$$

$$+(\log_5 11-\cancel{\log_5 9})+(\log_5 12-\cancel{\log_5 10})$$

$$=-\log_5 2+\log_5 11+\log_5 12$$

$$=-\log_5 2+\log_5 11+2\log_5 2+\log_5 3$$

$$={}^{ア}1\cdot\log_5 2+{}^{イ}1\cdot\log_5 3+{}^{ウ}1\cdot\log_5 11$$

5

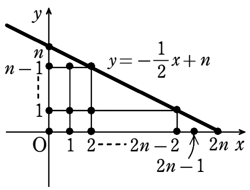
解答　(1)　$(n+1)^2$ 個　(2)　$\dfrac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)$ 個

解説

(1)　領域は，右図のように，x 軸，y 軸，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$ で囲まれた三角形の周および内部である。

直線 $y=k$ $(k=n,\ n-1,\ \cdots\cdots,\ 0)$ 上には，それぞれ 1，3，5，……，$2n+1$ 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は



$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(2\cdot0+1)+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=1+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=(n+1)^2\ (個)$$

別解　線分 $x+2y=2n$ $(0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(2,\ n-1)$，……，$(2n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

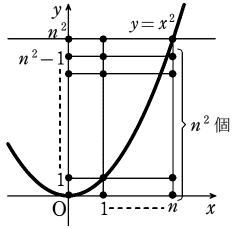
4 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は　$(2n+1)(n+1)$

ゆえに，求める格子点の個数を N とすると　$2N-(n+1)=(2n+1)(n+1)$

よって　$N=\dfrac{1}{2}\{(2n+1)(n+1)+(n+1)\}=\dfrac{1}{2}(n+1)(2n+2)=(n+1)^2$ (個)

(2)　領域は，右図のように，y 軸，直線 $y=n^2$，放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分である（境界線を含む）。

直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ n)$ 上には，それぞれ n^2+1，$(n^2+1)-1$，$(n^2+1)-4$，$(n^2+1)-9$，……，$(n^2+1)-n^2$ 個の格子点が並ぶ。



よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=(n^2+1-0^2)+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)\ (個)$$

1

解答　(1)　$b_n=n$　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$a_n=1+2(n-1)=2n-1$

よって　$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$$=\frac{1}{n}\left\{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}=n$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるとき，その初項を a，公差を d とする。

このとき　$a_n=a+(n-1)d=dn+a-d$

よって　$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(dk+a-d)$

$$=\frac{1}{n}\left\{d\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(a-d)n\right\}$$

$$=\frac{d(n+1)}{2}+a-d$$

ゆえに　$b_{n+1}-b_n=\left\{\dfrac{d(n+2)}{2}+a-d\right\}-\left\{\dfrac{d(n+1)}{2}+a-d\right\}=\dfrac{d}{2}$

$\dfrac{d}{2}$ は定数であるから，数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

(3)　数列 $\{b_n\}$ が等差数列であるとき，その初項を b，公差を d' とする。

このとき　$b_n=b+(n-1)d'=d'n+b-d'$

$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=nb_n=d'n^2+(b-d')n$　…… ①

$n\geqq2$ のとき，① から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k=d'(n-1)^2+(b-d')(n-1)$　…… ②

①－② から　$a_n=d'(2n-1)+b-d'$　…… ③

ここで　$a_1=1\cdot b_1=b$

また，③ において，$n=1$ とすると

$a_1=d'(2\cdot1-1)+b-d'=b$

ゆえに，$n=1$ のときにも ③ は成り立つ。

よって　$a_{n+1}-a_n=\{d'(2n+1)+b-d'\}-\{d'(2n-1)+b-d'\}=2d'$

$2d'$ は定数であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。

2

解答　$\dfrac{16200}{41}$

解説

分母が等しいものを群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big|\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \cdots\cdots$$

第 1 群から第 n 群までの項数は　$1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

第 800 項が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<800\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$\dfrac{1}{2}(n-1)n$，$\dfrac{1}{2}n(n+1)$ は単調に増加し，$\dfrac{39\cdot40}{2}=780$，$\dfrac{40\cdot41}{2}=820$ であるから

$n=40$

よって，第 800 項は第 40 群の $800-780=20$（番目）の数である。

第 n 群に属するすべての数の和は

$$\frac{1}{n+1}(1+2+\cdots\cdots+n)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n}{2}$$

したがって，初項から第 800 項までの和は

$$\frac{1}{2}\{1+2+\cdots\cdots+(40-1)\}+\frac{1}{41}(1+2+\cdots\cdots+20)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot39\cdot40+\frac{1}{41}\cdot\frac{1}{2}\cdot20\cdot21=\frac{10(39\cdot41+21)}{41}=\frac{16200}{41}$$

3

解答　(1)　初めの数　8，終わりの数　15　　(2)　376　　(3)　7

解説

(1)　第 4 群の初めの数は　$1+2+2^2+1=8$

終わりの数は　$1+2+2^2+2^3=15$

(2)　第 5 群の初めの数は　$1+2+2^2+2^3+1=16$

よって，第 5 群は初項 16，公差 1，項数 $2^{5-1}=16$ の等差数列である。ゆえに，総和は

$$\frac{1}{2}\cdot16(2\cdot16+16-1)=376$$

(3)　第 n 群の初めの数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}+1=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+1=2^{n-1}$

よって，第 n 群は初項 2^{n-1}，公差 1，項数 2^{n-1} の等差数列である。ゆえに，総和は

$$\frac{1}{2}\cdot2^{n-1}(2\cdot2^{n-1}+2^{n-1}-1)=2^{n-2}(3\cdot2^{n-1}-1)\ \cdots\cdots ①$$

ここで，① は $n=7$ のとき 6112，$n=8$ のとき 24512

したがって，$2^{n-2}(3\cdot2^{n-1}-1)<10000$ を満たす最大の n は　$n=7$

4

解答　$(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

解説

$\log_2\dfrac{y}{x}\leqq x$ から　$y\leqq x\cdot2^x$

よって，$x=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）のとき，適する y の値は $y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k\cdot2^k$ の $k\cdot2^k$ 個.

$x\leqq n$ であるから，求める格子点の個数を S_n とすると　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^k$

一方　$2S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k+1}=n\cdot2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot2^{k+1}=n\cdot2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(k-1)\cdot2^k$

ゆえに　$S_n=2S_n-S_n=n\cdot2^{n+1}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

1

解答　(1)　$a_n=4n-2$　　(2)　$a_n=-3(-2)^{n-1}$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 4 の等差数列であるから，一般項は

$$a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 -3，公比 -2 の等比数列であるから，一般項は

$$a_n=-3(-2)^{n-1}$$

2

解答　(1)　$a_n=\dfrac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項が 4，階差数列の第 n 項が $3n^2$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=4+\sum_{k=1}^{n-1}3k^2=4+3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)\ \cdots\cdots ①$$

初項は $a_1=4$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$

(2)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=4^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項が 1，階差数列の第 n 項が 4^n であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$=\frac{1}{3}(4^n-1)\ \cdots\cdots ①$$

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

3

解答　(1)　$a_n=3^{n-1}+1$　　(2)　$a_n=5\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-3$

解説

(1)　$a_{n+1}=3a_n-2$ を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$b_n=a_n-1$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$，$b_1=a_1-1=2-1=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列で　$b_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

$a_n=b_n+1$ であるから　$a_n=3^{n-1}+1$

(2)　$3a_{n+1}+2a_n+15=0$ から　$a_{n+1}=-\dfrac{2}{3}a_n-5$

これを変形すると　$a_{n+1}+3=-\dfrac{2}{3}(a_n+3)$

$b_n=a_n+3$ とおくと　$b_{n+1}=-\dfrac{2}{3}b_n$，$b_1=a_1+3=2+3=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列で　$b_n=5\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a_n=b_n-3$ であるから　$a_n=5\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-3$

4

解答　$a_n=\dfrac{2}{5\cdot3^{n-1}-4}$

解説

$a_1=2>0$，および漸化式の形から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ となる。

両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{4a_n+3}{a_n}$　すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4+\dfrac{3}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

$b_{n+1}=3b_n+4$ を変形して　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2=\dfrac{1}{a_1}+2=\dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+2=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}$$

ゆえに，$b_n=\dfrac{5\cdot3^{n-1}-4}{2}$ となり　$a_n=\dfrac{2}{5\cdot3^{n-1}-4}$

5

解答　$a_n=3^{n+1}-3\cdot2^n$

解説

$a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+1$　　これを変形すると　$b_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(b_n-3)$

また　$b_1-3=\dfrac{a_1}{3}-3=\dfrac{3}{3}-3=-2$

よって，数列 $\{b_n-3\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で

$b_n-3=-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$\dfrac{a_n}{3^n}=3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=3^n\left\{3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3^{n+1}-3\cdot2^n$

6

解答　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

解説

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\{3a_{n+1}+4(n+1)\}-(3a_n+4n)=3(a_{n+1}-a_n)+4$$

よって　$a_{n+1}-a_n=b_n$　とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

変形すると　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

$$b_1+2=a_2-a_1+2=3a_1+4-a_1+2=2a_1+6=8$$

よって，数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 8，公比 3 の等比数列である。

ゆえに　$b_n+2=8\cdot3^{n-1}$　　したがって　$b_n=8\cdot3^{n-1}-2$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot3^{k-1}-2)=1+\frac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)$$

$$=1+4\cdot3^{n-1}-4-2n+2=4\cdot3^{n-1}-2n-1$$

この式で $n=1$ とすると，$a_1=1$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

1

解答　(1)　$a_n=6n-5$　　(2)　$a_n=3(-5)^{n-1}$

解説

(1)　初項１，公差６の等差数列であるから

$$a_n=1+(n-1)\cdot 6=6n-5$$

(2)　初項３，公比 -5 の等比数列であるから

$$a_n=3(-5)^{n-1}$$

2

解答　(1)　$a_n=\frac{1}{3}\{7-(-2)^n\}$　　(2)　$a_n=2n^2+n-1$

解説

(1)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=(-2)^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $(-2)^n$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k=3+\frac{-2\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$$

$$=\frac{9-2-(-2)^n}{3}=\frac{1}{3}\{7-(-2)^n\}$$

初項は $a_1=3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{3}\{7-(-2)^n\}$

(2)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=4n+3$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $4n+3$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)=2+4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+3(n-1)$$

$$=2n^2+n-1$$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2n^2+n-1$

3

解答　(1)　$a_n=3^{n-1}+2$　　(2)　$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{3}{4}$

解説

(1)　$\alpha=3\alpha-4$ を解いて　$\alpha=2$

ゆえに，$a_{n+1}=3a_n-4$ は $a_{n+1}-2=3(a_n-2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 $a_1-2=1$，公比３の等比数列であるから

$a_n-2=1\cdot 3^{n-1}$　　よって　$a_n=3^{n-1}+2$

(2)　$12a_{n+1}-8a_n+3=0$ から　$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{4}$ を解いて　$\alpha=-\frac{3}{4}$

ゆえに，$12a_{n+1}-8a_n+3=0$ は $a_{n+1}+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{3}{4}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{a_n+\frac{3}{4}\right\}$ は，初項 $a_1+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$a_n+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　　よって　$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{3}{4}$

4

解答　$a_n=\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$

解説

$a_1=1>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式の両辺の逆数をとると　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+4}{a_n}$　　よって　$\frac{1}{a_{n+1}}=3+\frac{4}{a_n}$

$\frac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3+4b_n$

変形すると　$b_{n+1}+1=4(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比４の等比数列で，初項は

$$b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=\frac{1}{1}+1=2$$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot 4^{n-1}$　　よって　$b_n=2\cdot 4^{n-1}-1$

したがって　$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$

注意　$2\cdot 4^{n-1}=2\cdot(2^2)^{n-1}=2^{1+2(n-1)}=2^{2n-1}$ であるから，$a_n=\frac{1}{2^{2n-1}-1}$ と答えてもよい。

5

解答　$a_n=2^{2n-1}+2^n$

解説

$a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{2^n}-1$

$\frac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n-1$

これを変形すると　$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

また　$b_1-1=\frac{a_1}{2}-1=\frac{4}{2}-1=1$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は初項１，公比２の等比数列であるから

$b_n-1=1\cdot 2^{n-1}$　　ゆえに　$\frac{a_n}{2^n}=2^{n-1}+1$

したがって　$a_n=2^{2n-1}+2^n$

6

解答　$a_n=2^n-n$

解説

$a_{n+1}=2a_n+n-1$　……①

において，n の代わりに $n+1$ とおくと

$a_{n+2}=2a_{n+1}+(n+1)-1$　……②

②−① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$　……③

また，$a_2=2a_1+1-1=2$ であるから　$b_1=a_2-a_1=2-1=1$

③ を変形すると　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比２の等比数列で，初項は　$b_1+1=1+1=2$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot 2^{n-1}$　　したがって　$b_n=2^n-1$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1)=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$$

$$=2^n-n$$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2^n-n$

別解　$b_n=2^n-1$ を求めた後は，次のようにして a_n を求めてもよい。

$b_n=a_{n+1}-a_n$ から　$a_{n+1}-a_n=2^n-1$

$a_{n+1}=2a_n+n-1$ を代入して　$(2a_n+n-1)-a_n=2^n-1$

よって　$a_n=2^n-n$

参考　漸化式は　$a_{n+1}+(n+1)=2(a_n+n)$　と変形できる。

よって，数列 $\{a_n+n\}$ は公比２の等比数列で，初項は　$a_1+1=1+1=2$

ゆえに　$a_n+n=2\cdot 2^{n-1}$　　したがって　$a_n=2^n-n$

第４講　レベルA

1

解答　(1)　$a_n=3^n-2^n$　　(2)　$a_n=\dfrac{an}{2^{n-1}}$

解説

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}$

よって　$b_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(b_n-1)$

ここで　$b_1-1=\dfrac{a_1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

ゆえに，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $-\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列となり

$b_n-1=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　すなわち　$b_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

したがって　$a_n=3^nb_n=3^n\left\{-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right\}=3^n-2^n$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{a}{2^n}$ の両辺に 2^{n+1} を掛けると　$2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+2a$

$2^na_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2a$，$b_1=2a_1=2a$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $2a$，公差 $2a$ の等差数列となり

$b_n=2a+(n-1)\cdot 2a=2an$

したがって　$a_n=\dfrac{b_n}{2^n}=\dfrac{2an}{2^n}=\dfrac{an}{2^{n-1}}$

2

解答　(1)　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3)　$a_n=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

解説

(1)　$\triangle \mathrm{ABC}\backsim\triangle \mathrm{AA_1H_1}$ から　$\mathrm{AC}:\mathrm{AH_1}=\mathrm{BC}:\mathrm{A_1H_1}$

よって　$1:(1-a_1)=\sqrt{3}:a_1$　　よって　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

同様に，$\triangle \mathrm{ABC}\backsim\triangle \mathrm{A_1A_2H_2}$ から　$1:(a_1-a_2)=\sqrt{3}:a_2$

$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ から　$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\triangle \mathrm{ABC}\backsim\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}$ から　$1:(a_n-a_{n+1})=\sqrt{3}:a_{n+1}$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3)　(1)，(2) から $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，公比 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

$a_n=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

第４講　レベルB

1

解答　n^2-n（個）

解説

n 個の円で交点が a_n 個できるとき，条件を満たす円を１個追加すると，n 個の円とおのおの２点で交わるから，交点が $2n$ 個増える。

ゆえに　$a_{n+1}=a_n+2n$　すなわち　$a_{n+1}-a_n=2n$ $(n\geqq 2)$

よって，$n\geqq 3$ のとき

$$a_n=a_2+\sum_{k=2}^{n-1}2k=2+\sum_{k=1}^{n-1}2k-2\cdot 1$$

$$=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2=n^2-n$$

$a_2=2$ であるから，この式は $n=2$ のときにも成り立つ。

したがって，n 個の円によって，交点は (n^2-n) 個できる。

2

解答　(1)　$a_n=5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　(2)　$b_n=10\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-3$　　(3)　$b_n=27-5(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

解説

(1)　$\displaystyle\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)dt=\left[\frac{a_n}{2}t^2+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}$

$$=\frac{a_n}{2}(x^2+2c_nx)+b_nx$$

$$=\frac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$$

よって　$a_{n+1}x^2+b_{n+1}x=\dfrac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$

これが x についての恒等式であるから

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$，　$b_{n+1}=b_n+a_nc_n$　……①

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=5$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$a_n=5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2)　$c_n=3^{n-1}$ のとき，① から

$$b_{n+1}=b_n+a_nc_n$$

$$=b_n+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 3^{n-1}$$

$$=b_n+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

よって，数列 $\{b_n\}$ の階差数列の第 n 項は $5\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

$$=7+5\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}$$

$$=10\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3\quad\cdots\cdots ②$$

$n=1$ のとき　$10\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^0-3=7$

$b_1=7$ であるから，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$b_n=10\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-3$

(3)　$c_n=n$ のとき，① から

$$b_{n+1}=b_n+5\cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+5\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$=7+5\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdots\cdots ③$$

ここで，$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ $(n\geqq 2)$ とおくと

$$S=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

両辺に $\dfrac{1}{2}$ を掛けると

$$\frac{1}{2}S=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(n-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

辺々を引くと

$$\frac{1}{2}S=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=S=4-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

③ に代入して

$$b_n=7+5\left\{4-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=27-5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\quad\cdots\cdots ④$$

$n=1$ のとき　$27-5\cdot 2\cdot 2=7$

$b_1=7$ であるから，④ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$b_n=27-5(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

1

解答 (1) $a_1=1$　(2) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}$　(3) $a_n=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

解説

(1) $S_1=a_1$ であるから，$S_n=-2a_n-2n+5$ ……① において

$n=1$ とすると　$a_1=-2a_1-2\cdot1+5$

よって　$a_1=1$

(2) ① から　$S_{n+1}=-2a_{n+1}-2(n+1)+5$ ……②

②－① から　$S_{n+1}-S_n=-2a_{n+1}+2a_n-2$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから

$$a_{n+1}=-2a_{n+1}+2a_n-2$$

ゆえに　$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}$

(3) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}$ を変形して　$a_{n+1}+2=\frac{2}{3}(a_n+2)$

よって，数列 $\{a_n+2\}$ は，初項 $a_1+2=3$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列である。

ゆえに　$a_n+2=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

よって　$a_n=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

2

解答 $a_n=\frac{5\cdot2^n+(-1)^n}{3}$

解説

$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ を変形すると

$$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n) \quad ……①$$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n) \quad ……②$$

① から，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は初項 $a_2+a_1=10$，公比 2 の等比数列で

$a_{n+1}+a_n=10\cdot2^{n-1}$　すなわち　$a_{n+1}+a_n=5\cdot2^n$ ……③

② から，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=1$，公比 -1 の等比数列で

$a_{n+1}-2a_n=1\cdot(-1)^{n-1}$　すなわち　$a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-1}$ ……④

③－④ から　$3a_n=5\cdot2^n-(-1)^{n-1}$　よって　$a_n=\frac{5\cdot2^n+(-1)^n}{3}$

3

解答 (1) $a_n=\frac{1}{n}$　(2) $a_n=3n-1$

解説

(1) 両辺に $n(n+1)$ を掛けると　$(n+1)a_{n+1}=na_n$

$na_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n$

また，$b_1=1\cdot a_1=1$ から　$b_n=b_{n-1}=\cdots\cdots=b_1=1$

したがって　$b_n=1$

よって　$a_n=\frac{1}{n}$

(2) 両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}$

ゆえに　$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$　また　$b_1=a_1=2$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}$$

$b_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$b_n=3-\frac{1}{n}$ $(n\geqq1)$

よって　$a_n=3n-1$

4

解答 $a_n=2^{2-2^{2-n}}$

解説

$a_1=1>0$ で，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ (>0) であるから，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。よって，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2a_{n+1}=\log_2 2\sqrt{a_n} \qquad ゆえに \qquad \log_2a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\log_2a_n$$

$\log_2a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=1+\frac{1}{2}b_n$　これを変形して　$b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$

ここで　$b_1-2=\log_2 1-2=-2$

よって，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 -2，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で

$$b_n-2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad すなわち \quad b_n=2-2^{2-n}$$

したがって，$\log_2a_n=2-2^{2-n}$ から　$a_n=2^{2-2^{2-n}}$

5

解答 $a_n=2\cdot3^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot3^{n-1}+1$

解説

$a_{n+1}=2a_n+b_n$ ……①，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ ……②　とする。

①＋② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$　また　$a_1+b_1=4$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列で

$$a_n+b_n=4\cdot3^{n-1} \quad ……③$$

①－② から　$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

ゆえに　$a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots\cdots=a_1-b_1$

$a_1-b_1=-2$ であるから　$a_n-b_n=-2$ ……④

③＋④ から　$2a_n=4\cdot3^{n-1}-2$　よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$

③－④ から　$2b_n=4\cdot3^{n-1}+2$　よって　$b_n=2\cdot3^{n-1}+1$

よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot3^{n-1}+1$

別解 $a_{n+1}=2a_n+b_n$ から　$b_n=a_{n+1}-2a_n$ ……①

よって　$b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$ ……②

①，② を $b_{n+1}=a_n+2b_n$ に代入して

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_n+2(a_{n+1}-2a_n)$$

ゆえに　$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

よって　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

また　$a_2-a_1=(2a_1+b_1)-a_1=a_1+b_1=4$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列で

$$a_{n+1}-a_n=4\cdot3^{n-1}$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $4\cdot3^{n-1}$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot3^{k-1}=1+4\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=2\cdot3^{n-1}-1$$

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

また　$b_n=a_{n+1}-2a_n=(2\cdot3^n-1)-2(2\cdot3^{n-1}-1)=2\cdot3^{n-1}+1$

よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$，$b_n=2\cdot3^{n-1}+1$

6

解答 $p_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$

解説

$(n+1)$ 回の試行で 8 のカードが奇数回取り出されるのは，

[1] n 回の試行で 8 のカードが奇数回取り出され，$(n+1)$ 回目に 8 のカードが取り出されない

[2] n 回の試行で 8 のカードが偶数回取り出され，$(n+1)$ 回目に 8 のカードが取り出される

のいずれかであり，[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{7}{8}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}p_n+\frac{1}{8}$$

変形すると　$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

また　$p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $-\frac{3}{8}$，公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

したがって　$p_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$

1

解答　$a_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+1$

解説

$a_1=S_1$ であるから　$a_1=1-2a_1$　ゆえに　$a_1=\frac{1}{3}$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ であるから　$a_{n+1}=(n+1-2a_{n+1})-(n-2a_n)$

よって　$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$

これを変形して　$a_{n+1}-1=\frac{2}{3}(a_n-1)$　また　$a_1-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

ゆえに，数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $-\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列で

$$a_n-1=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad したがって\quad a_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+1$$

2

解答　(1)　$a_n=\frac{2^{n-1}-(-3)^{n-1}}{5}$　(2)　$a_n=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1)　$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-3(a_{n+1}-2a_n)$　また　$a_2-2a_1=1$

$a_{n+2}+3a_{n+1}=2(a_{n+1}+3a_n)$　また　$a_2+3a_1=1$

数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 1，公比 -3 の等比数列で

$a_{n+1}-2a_n=(-3)^{n-1}$　……①

数列 $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列で

$a_{n+1}+3a_n=2^{n-1}$　……②

②−① から　$5a_n=2^{n-1}-(-3)^{n-1}$　よって　$a_n=\frac{2^{n-1}-(-3)^{n-1}}{5}$

(2)　$2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$ を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-a_1=1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列。

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

これは $n=1$ の場合にも適するから　$a_n=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

別解 1　$2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$ を変形して

$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2-\frac{1}{2}a_1=\frac{3}{2}$

2^{n+1} を掛けると　$2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=3\cdot 2^n$　$2^na_n=b_n$ とおくと

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 2^k=3\cdot 2^n-4$　よって　$a_n=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

別解 2　$2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$，$a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$

よって　$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……①，$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\frac{3}{2}$ ……②

①，② から，a_{n+1} を消去すると　$a_n=3-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3

解答　(1)　$a_n=\frac{1}{n}$　(2)　$a_n=n$　(3)　$a_n=5n-2$

解説

(1)　漸化式から　$(n+1)a_{n+1}=na_n=(n-1)a_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot a_1$

ゆえに　$na_n=1\cdot a_1=1$　よって　$a_n=\frac{1}{n}$

(2)　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$

ゆえに　$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots\cdots=\frac{a_1}{1}$

よって　$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$　したがって　$a_n=n$

(3)　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n(n+1)}$

ゆえに　$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

よって　$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=3+2\left(1-\frac{1}{n}\right)=5-\frac{2}{n}$

したがって　$a_n=5n-2$

4

解答　$a_n=2^{2^{n-1}-1}$

解説

漸化式から，数列 $\{a_n\}$ の各項は正である。

よって，$a_{n+1}=2{a_n}^2$ の両辺は正であるから，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2{a_n}^2$　ゆえに　$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+1$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$

これを変形して　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

また　$b_1+1=\log_2 a_1+1=\log_2 1+1=1$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから　$b_n+1=2^{n-1}$

ゆえに　$b_n=2^{n-1}-1$　したがって　$a_n=2^{b_n}=2^{2^{n-1}-1}$

5

解答　$a_n=\frac{7^n+3^{n-1}}{2}$，$b_n=\frac{7^n-3^{n-1}}{2}$

解説

$a_{n+1}=5a_n+2b_n$ ……①，$b_{n+1}=2a_n+5b_n$ ……②　とする。

①+② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=7(a_n+b_n)$

また　$a_1+b_1=4+3=7$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 7，公比 7 の等比数列で　$a_n+b_n=7\cdot 7^{n-1}$

すなわち　$a_n+b_n=7^n$　……③

①−② から　$a_{n+1}-b_{n+1}=3(a_n-b_n)$

また　$a_1-b_1=4-3=1$

よって，数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列で　$a_n-b_n=1\cdot 3^{n-1}$

すなわち　$a_n-b_n=3^{n-1}$　……④

③+④ から　$2a_n=7^n+3^{n-1}$　よって　$a_n=\frac{7^n+3^{n-1}}{2}$

③−④ から　$2b_n=7^n-3^{n-1}$　よって　$b_n=\frac{7^n-3^{n-1}}{2}$

6

解答　$p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

解説

点 P が $n+1$ 秒後に頂点 A にいるのは，n 秒後に頂点 O，B，C のいずれかにいて，その 1 秒後に頂点 A に移動する場合である。

点 P が n 秒後に頂点 O，B，C のいずれかにいる確率は　$1-p_n$

よって　$p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$

これを変形して　$p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$

また　$p_1-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$ は初項 $\frac{1}{12}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列で

$p_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

1

解答　$a_n=n\cdot 3^{n-1}$

解説

$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ を変形すると　$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

また　$a_2-3a_1=6-3=3$

よって，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列で

$a_{n+1}-3a_n=3\cdot 3^{n-1}$　すなわち　$a_{n+1}-3a_n=3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{3}$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}$　　また　$b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列で

$$b_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$$

$a_n=3^n\cdot b_n$ であるから　$a_n=3^n\cdot\dfrac{n}{3}=n\cdot 3^{n-1}$

2

解答　(1)　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$　　(2)　$a_n=\dfrac{n^2+n-1}{2}$

解説

(1)　$a_n=n(n+1)b_n$ を $na_{n+1}=(n+2)a_n+1$ に代入して

$$n\cdot(n+1)(n+2)b_{n+1}=(n+2)\cdot n(n+1)b_n+1$$

両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割ると　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(2)　(1) から　
$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$b_{n+1}-b_n=c_n$ とおくと　$c_n=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

ここで　$b_1=\dfrac{a_1}{1\cdot2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}\right]\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n(n+1)}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\cdot1\cdot2}=\dfrac{1}{4}$

$b_1=\dfrac{1}{4}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

よって　$a_n=n(n+1)b_n=n(n+1)\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n(n+1)}\right\}=\dfrac{n^2+n-1}{2}$

3

解答　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$

解説

解答 1.　漸化式を変形して　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$　$(n\geqq2)$

ゆえに　$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-2}$　$(n\geqq3)$

これを繰り返して

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}a_1$$

よって　$a_n=\dfrac{3\cdot2\cdot1}{(n+2)(n+1)n}\cdot\dfrac{2}{3}$　すなわち　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$　……①

$n=1$ のとき　$\dfrac{4}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{2}{3}$

$a_1=\dfrac{2}{3}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

解答 2.　漸化式の両辺に $n(n+1)$ を掛けると

$$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}\quad(n\geqq2)$$

よって　$n(n+1)(n+2)a_n=(n-1)n(n+1)a_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot2\cdot3a_1=4$

したがって　$a_n=\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$　……①

$n=1$ のとき　$\dfrac{4}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{2}{3}$

$a_1=\dfrac{2}{3}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

4

解答　(1)　$(x,\ y)=(1,\ 5),\ \left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$

(2)　$a_n=\dfrac{4\cdot5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$，$b_n=\dfrac{8\cdot5^{n-1}+2^{n-1}}{3}$

解説

(1)　
$$\begin{aligned}a_{n+1}+xb_{n+1}&=3a_n+b_n+x(2a_n+4b_n)\\&=(3+2x)a_n+(1+4x)b_n\end{aligned}$$

よって，$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ とすると

$$(3+2x)a_n+(1+4x)b_n=ya_n+xyb_n$$

これがすべての n について成り立つための条件は

$$3+2x=y,\quad 1+4x=xy$$

これを解くと　$(x,\ y)=(1,\ 5),\ \left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$

(2)　(1) から　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$，$a_1+b_1=4$；

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right),\quad a_1-\frac{1}{2}b_1=-\frac{1}{2}$$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4，公比 5 の等比数列；

数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}b_n\right\}$ は初項 $-\dfrac{1}{2}$，公比 2 の等比数列。

ゆえに　$a_n+b_n=4\cdot5^{n-1}$ ……①，　$a_n-\dfrac{1}{2}b_n=-\dfrac{1}{2}\cdot2^{n-1}$ ……②

(①+②×2)÷3 から　$a_n=\dfrac{4\cdot5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$

(①−②)÷$\dfrac{3}{2}$ から　$b_n=\dfrac{8\cdot5^{n-1}+2^{n-1}}{3}$

5

解答　(1)　$a_{n+1}=3a_n+5b_n$，$b_{n+1}=a_n+3b_n$　　(2)　$c_n=(3-\sqrt{5})^n$

(3)　$a_n=\dfrac{1}{2}\{(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n\}$，$b_n=\dfrac{\sqrt{5}}{10}\{(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n\}$

解説

(1)　
$$\begin{aligned}a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{5}&=(3+\sqrt{5})^{n+1}=(3+\sqrt{5})^n(3+\sqrt{5})\\&=(a_n+b_n\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\\&=3a_n+5b_n+(a_n+3b_n)\sqrt{5}\end{aligned}$$

a_{n+1}，b_{n+1}，$3a_n+5b_n$，a_n+3b_n は有理数，$\sqrt{5}$ は無理数であるから

$$a_{n+1}=3a_n+5b_n,\quad b_{n+1}=a_n+3b_n$$

(2)　
$$\begin{aligned}c_{n+1}&=a_{n+1}-b_{n+1}\sqrt{5}=3a_n+5b_n-(a_n+3b_n)\sqrt{5}\\&=a_n(3-\sqrt{5})-\sqrt{5}b_n(3-\sqrt{5})\\&=(3-\sqrt{5})(a_n-b_n\sqrt{5})=(3-\sqrt{5})c_n\end{aligned}$$

よって　$c_{n+1}=(3-\sqrt{5})c_n$

また，$3+\sqrt{5}=a_1+b_1\sqrt{5}$ であるから　$a_1=3$，$b_1=1$

ゆえに　$c_1=a_1-b_1\sqrt{5}=3-\sqrt{5}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $3-\sqrt{5}$，公比 $3-\sqrt{5}$ の等比数列で

$$c_n=(3-\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})^{n-1}=(3-\sqrt{5})^n$$

(3)　条件から　$a_n+b_n\sqrt{5}=(3+\sqrt{5})^n$　……①

(2) の結果から　$a_n-b_n\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^n$　……②

①+② から　$2a_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$

よって　$a_n=\dfrac{1}{2}\{(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n\}$

①−② から　$2\sqrt{5}b_n=(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n$

よって　$b_n=\dfrac{\sqrt{5}}{10}\{(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n\}$

1

解答　(1)　略　　(2)　$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{2}$，$a_n=3-\dfrac{2}{n}$

解説

(1)　ある自然数 n について $a_{n+1}=3$ とすると，条件式から

$$a_n-9=3(a_n-5)\qquad \text{ゆえに}\qquad a_n=3$$

よって　$a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_1=3$　　これは条件 $a_1=1$ に反する。

ゆえに，$a_{n+1}=3$ を満たす自然数 n はない。

また　$a_1\neq 3$

したがって，すべての自然数 n に対して $a_n\neq 3$ である。

(2)　$a_{n+1}-3=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}-3$　から　$a_{n+1}-3=-\dfrac{2(a_n-3)}{a_n-5}$

(1) より $a_n\neq 3$ であるから，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-5}{a_n-3}\qquad \text{よって}\qquad \frac{1}{a_{n+1}-3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n-3}$$

ゆえに　$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{2}$　　また　$b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=-\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $-\dfrac{1}{2}$，公差 $-\dfrac{1}{2}$ の等差数列で

$$b_n=-\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n}{2}$$

したがって　$a_n=3+\dfrac{1}{b_n}=3-\dfrac{2}{n}$

2

解答　$\dfrac{2n}{n+1}$

解説

条件 [B] から

$\log(n+1)+\log a_n=\log(n-1)+\log a_{n-1}$

ゆえに　$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$

よって　$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}$

したがって　$(n+1)na_n=(n-1)(n-2)a_{n-2}=\cdots\cdots=2\cdot1\cdot a_1=2$

ゆえに　$a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

3

解答　(1)　$a_2=\dfrac{15}{2}$，$a_3=\dfrac{65}{4}$　　(2)　$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+a_n$

(3)　$a_n=2^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1)　$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=\dfrac{2}{3}a_na_{n+1}$　……①　とおく。

① で $n=1$ のとき　$a_1{}^2=\dfrac{2}{3}a_1a_2$

$a_1=5$ を代入して　$5^2=\dfrac{2}{3}\cdot5\cdot a_2$　　よって　$a_2=\dfrac{15}{2}$

また，① で $n=2$ のとき　$a_1{}^2+a_2{}^2=\dfrac{2}{3}a_2a_3$

$a_1=5$，$a_2=\dfrac{15}{2}$ を代入して　$5^2+\left(\dfrac{15}{2}\right)^2=\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{15}{2}\right)\cdot a_3$

ゆえに　$a_3=\dfrac{65}{4}$

(2)　$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2+a_{n+1}{}^2=\dfrac{2}{3}a_{n+1}a_{n+2}$　……②

とおく。

②−① から　$a_{n+1}{}^2=\dfrac{2}{3}a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$　……③

$a_1=5\neq0$ であるから，すべての自然数 n について　(① の左辺)$\neq0$

よって，$a_na_{n+1}\neq0$ である。

ゆえに，すべての自然数 n について $a_n\neq0$ である。

③ から　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}(a_{n+2}-a_n)$

したがって　$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+a_n$　……④

(3)　④ を変形して

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-2a_n)\quad\cdots\cdots⑤$$

$$a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=2\left(a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\right)\quad\cdots\cdots⑥$$

⑤ より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=-\dfrac{5}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=5\left(-\frac{1}{2}\right)^n\quad\cdots\cdots⑦$$

⑥ より，数列 $\left\{a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n\right\}$ は初項 $a_2+\dfrac{1}{2}a_1=10$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=10\cdot2^{n-1}=5\cdot2^n\quad\cdots\cdots⑧$$

⑧−⑦ から　$\dfrac{5}{2}a_n=5\cdot2^n-5\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

したがって　$a_n=2^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

4

解答　(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$c_1=0$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{1}{4}$，$c_2=\dfrac{1}{4}$

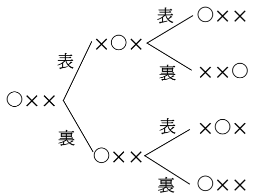
(2)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$，$c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(3)　$b_n=\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　赤玉を持っていることを ○，持っていないことを × とし，A，B，C の順に ○，× を表すことにする。

2 回の操作による A，B，C の玉の移動は，右のようになるから

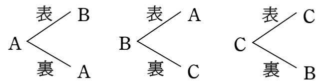


$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$c_1=0$，

$a_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$b_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，$c_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

(2)　A，B，C が赤玉を持っているとき，硬貨の表裏の出方によって，赤玉の移動は右のようになる。



ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$，

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$，

$c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(3)　操作を n 回繰り返した後，A，B，C のいずれかが赤玉を持っているから，

$a_n+b_n+c_n=1$ であり，(2) から　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+c_n)=\dfrac{1}{2}(1-b_n)$

よって　$b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_n-\dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $b_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$b_n=\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　与えられた等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$(\text{左辺})=11$，$(\text{右辺})=\dfrac{1}{9}(10^2-1)=11$

ゆえに，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^k=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1)\quad\cdots\cdots②$$

$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② により

$$\begin{aligned}&1+10+10^2+\cdots\cdots+10^k+10^{k+1}\\&=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1)+10^{k+1}=\frac{10^{k+1}+9\cdot10^{k+1}-1}{9}\\&=\frac{1}{9}(10\cdot10^{k+1}-1)=\frac{1}{9}\{10^{(k+1)+1}-1\}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] により，① はすべての自然数 n について成り立つ。

(2)　与えられた等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$(\text{左辺})=3$，$(\text{右辺})=\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot(1+1)\cdot(4+5)=3$

ゆえに，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+k(2k+1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)\quad\cdots\cdots②$$

$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② により

$$\begin{aligned}&1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+k(2k+1)+(k+1)\{2(k+1)+1\}\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)+(k+1)\{2(k+1)+1\}=\frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5)+6(2k+3)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+17k+18)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9)\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] により，① はすべての自然数 n について成り立つ。

$\boxed{2}$

解答　略

解説

すべての自然数 n について，次の事柄を証明すればよい。

「$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 の倍数である」　……①

[1]　$n=1$ のとき　　$5^{n+1}+6^{2n-1}=5^2+6^1=25+6=31$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると，m を整数として

$$5^{k+1}+6^{2k-1}=31m$$

と表される。$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}5^{(k+1)+1}+6^{2(k+1)-1}&=5^{k+2}+6^{2k+1}=5\cdot5^{k+1}+36\cdot6^{2k-1}\\&=5\cdot5^{k+1}+(5\cdot6^{2k-1}+31\cdot6^{2k-1})\\&=5(5^{k+1}+6^{2k-1})+31\cdot6^{2k-1}\\&=5\cdot31m+31\cdot6^{2k-1}\\&=31(5m+6^{2k-1})\end{aligned}$$

$5m+6^{2k-1}$ は整数であるから，$5^{(k+1)+1}+6^{2(k+1)-1}$ は 31 の倍数となり，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

$\boxed{3}$

解答　略

解説

$2^n>n^2$ ……① とする。

[1]　$n=5$ のとき

$$(\text{左辺})=2^5=32,\ (\text{右辺})=5^2=25$$

ゆえに，不等式 ① は $n=5$ のとき成り立つ。

[2]　$k\geqq5$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$2^k>k^2$$

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned}2^{k+1}-(k+1)^2&=2\cdot2^k-(k^2+2k+1)\\&>2k^2-(k^2+2k+1)\\&=k^2-2k-1=k(k-2)-1>0\end{aligned}$$

すなわち　$2^{k+1}>(k+1)^2$

よって，$n=k+1$ のときにも不等式 ① は成り立つ。

[1]，[2] から，不等式 ① は $n\geqq5$ を満たすすべての自然数 n について成り立つ。

$\boxed{4}$

解答　(1)　$a_2=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{3}{5}$，$a_4=\dfrac{4}{7}$　　(2)　$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$，証明略

解説

(1)　$a_2=\dfrac{3a_1-1}{4a_1-1}=\dfrac{3\cdot1-1}{4\cdot1-1}=\dfrac{2}{3}$

$$a_3=\frac{3a_2-1}{4a_2-1}=\frac{3\cdot\frac{2}{3}-1}{4\cdot\frac{2}{3}-1}=\frac{3\cdot2-3}{4\cdot2-3}=\frac{3}{5}$$

$$a_4=\frac{3a_3-1}{4a_3-1}=\frac{3\cdot\frac{3}{5}-1}{4\cdot\frac{3}{5}-1}=\frac{3\cdot3-5}{4\cdot3-5}=\frac{4}{7}$$

(2)　(1) から，$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$　……① と推測される。

[1]　$n=1$ のとき　　$a_1=\dfrac{1}{2\cdot1-1}=1$ から，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　　$a_k=\dfrac{k}{2k-1}$　……②

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$a_{k+1}=\frac{3a_k-1}{4a_k-1}=\frac{3\cdot\frac{k}{2k-1}-1}{4\cdot\frac{k}{2k-1}-1}=\frac{3k-(2k-1)}{4k-(2k-1)}=\frac{k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2(k+1)-1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

$\boxed{5}$

解答　略

解説

[1]　$n=1$ のとき　　$x^1+y^1=x+y$

$n=2$ のとき　　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

よって，$n=1$，2 のとき，x^n+y^n は整数である。

[2]　$k\geqq2$ として，$n=k-1$，k のとき，x^n+y^n が整数であると仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$x^{k+1}+y^{k+1}=(x^k+y^k)(x+y)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$$

仮定より，x^k+y^k，$x^{k-1}+y^{k-1}$ は整数であるから，$x^{k+1}+y^{k+1}$ は整数である。

よって，$n=k+1$ のときにも x^n+y^n は整数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，x^n+y^n は整数である。

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$　……① とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1 \qquad \text{右辺}=\frac{1}{9}(10-1)=1$$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{k-1}=\frac{1}{9}(10^k-1) \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$\begin{aligned}1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{k-1}+10^k&=\frac{1}{9}(10^k-1)+10^k\\&=\frac{1}{9}(10^k-1+9\cdot 10^k)\\&=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　この等式を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1^2=1, \quad (\text{右辺})=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)=1$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned}&1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2+\{2(k+1)-1\}^2\\&=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)+(2k+1)^2=\frac{1}{3}(2k+1)\{k(2k-1)+3(2k+1)\}\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときの (A) の右辺は

$$\frac{1}{3}(k+1)\{2(k+1)-1\}\{2(k+1)+1\}=\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ。

2

解答　略

解説

「$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である」を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　$4^{2\cdot 1+1}+3^{1+2}=64+27=91=13\cdot 7$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$4^{2k+1}+3^{k+2}=13m$（m は整数）……②　とおける。

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$\begin{aligned}4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}&=4^2\cdot 4^{2k+1}+3^{k+3}=16(13m-3^{k+2})+3^{k+3}\\&=13\cdot 16m-(16-3)\cdot 3^{k+2}=13(16m-3^{k+2})\end{aligned}$$

$16m-3^{k+2}$ は整数であるから，$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}$ は 13 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

別解　二項定理を利用すると

$$\begin{aligned}&4^{2n+1}+3^{n+2}=4\cdot 4^{2n}+3^2\cdot 3^n=4\cdot 16^n+9\cdot 3^n=4(13+3)^n+9\cdot 3^n\\&=4(13^n+{}_n\mathrm{C}_1 13^{n-1}\cdot 3+{}_n\mathrm{C}_2 13^{n-2}\cdot 3^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}13\cdot 3^{n-1}+3^n)+9\cdot 3^n\\&=4\cdot 13(13^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1 13^{n-2}\cdot 3+{}_n\mathrm{C}_2 13^{n-3}\cdot 3^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}3^{n-1})+4\cdot 3^n+9\cdot 3^n\end{aligned}$$

よって，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

3

解答　略

解説

[1]　$n=3$ のとき　$(\text{左辺})=3^2=9$，$(\text{右辺})=3^2-3+2=8$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k\ (k\geqq 3)$ のとき，① が成り立つと仮定すると　$3^{k-1}>k^2-k+2$　……②

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}3^k-\{(k+1)^2-(k+1)+2\}&=3\cdot 3^{k-1}-(k^2+k+2)\\&>3(k^2-k+2)-(k^2+k+2)\\&=2k^2-4k+4=2(k-1)^2+2>0\end{aligned}$$

ゆえに　$3^k>(k+1)^2-(k+1)+2$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，$n\geqq 3$ であるすべての自然数 n について ① は成り立つ。

4

解答　(1)　$a_2=\dfrac{4}{3}$，$a_3=\dfrac{6}{5}$，$a_4=\dfrac{8}{7}$，$a_n=\dfrac{2n}{2n-1}$　　(2)　証明略

解説

(1)　$a_2=2-\dfrac{a_1}{2a_1-1}=2-\dfrac{2}{2\cdot 2-1}=\dfrac{4}{3}$，

$$a_3=2-\frac{a_2}{2a_2-1}=2-\frac{\frac{4}{3}}{2\cdot\frac{4}{3}-1}=\frac{6}{5},$$

$$a_4=2-\frac{a_3}{2a_3-1}=2-\frac{\frac{6}{5}}{2\cdot\frac{6}{5}-1}=\frac{8}{7}$$

よって，$a_n=\dfrac{2n}{2n-1}$　……① と推測される。

(2)　[1]　$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=a_1=2, \quad (\text{右辺})=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1-1}=2$$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると　$a_k=\dfrac{2k}{2k-1}$

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式から

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=2-\frac{a_k}{2a_k-1}=2-\frac{\frac{2k}{2k-1}}{\frac{4k}{2k-1}-1}=2-\frac{2k}{2k+1}\\&=\frac{2k+2}{2k+1}=\frac{2(k+1)}{2(k+1)-1}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

5

解答　(1)　略　　(2)　$(x, y)=(2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$

解説

数学的帰納法で証明する．与えられた命題を [A] とする．

[1]　$n=1$ のとき $x+y$ は偶数である．

$n=2$ のとき　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x+y, xy$ は偶数であるから x^2+y^2 も偶数である．

よって，$n=1, 2$ のとき [A] は成り立つ．

[2]　$n=k-1, k\ (k\geqq 2)$ のとき，[A] が成り立つと仮定すると

$$x^{k+1}+y^{k+1}=(x+y)(x^k+y^k)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$$

$(x+y)(x^k+y^k)$, $xy(x^{k-1}+y^{k-1})$ はともに偶数であるから，$x^{k+1}+y^{k+1}$ も偶数である．よって，$n=k+1$ のときも [A] は成り立つ．

[1], [2] から，すべての自然数 n に対して [A] は成り立つ．

1

解答　略

解説

与えられた等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1+1=2$,　(右辺)$=2^1\cdot 1=2$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k)=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② から

$$\begin{aligned}&(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot\{2(k+1)\}\\&=(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k(2k+1)\cdot 2(k+1)\\&=(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k\times 2(2k+1)\\&=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots(2k-1)\times 2(2k+1)\\&=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\cdot\{2(k+1)-1\}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

2

解答　略

解説

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=7$ を $3^1=3$ で割ると，商は 2，余りは 1 である.

よって，$n=1$ のときは成り立つ.

[2]　$n=k$ のとき

a_k を 3^k で割ったときの余りが 1 であると仮定する.

このとき，$a_k=3^km+1$（m は 0 以上の整数）と表されるとする.

$n=k+1$ のとき　$a_{k+1}=(a_k)^3=(3^km+1)^3=3^{3k}m^3+3\cdot 3^{2k}m^2+3\cdot 3^km+1$

$$=3^{k+1}(3^{2k-1}m^3+3^km^2+m)+1$$

$k\geqq 1$ から，$3^{2k-1}m^3+3^km^2+m$ は整数である.

よって，a_{k+1} を 3^{k+1} で割ったときの余りは 1 である.

ゆえに，$n=k+1$ のときも成り立つ.

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，a_n を 3^n で割ったときの余りは 1 になる.

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\dfrac{(n+1)^3}{3}$　$\cdots\cdots$①　とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1^2=1$,　(右辺)$=\dfrac{(1+1)^3}{3}=\dfrac{8}{3}$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3}\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}\frac{(k+2)^3}{3}-\{1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2\}&>\frac{(k+2)^3}{3}-\frac{(k+1)^3}{3}-(k+1)^2\\&=\frac{3k^2+9k+7}{3}-(k^2+2k+1)\\&=k+\frac{4}{3}>0\end{aligned}$$

ゆえに　　$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2<\dfrac{(k+2)^3}{3}$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　$\dfrac{a^n+b^n}{2}\geqq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ $\cdots\cdots$①　とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=\dfrac{a+b}{2}$,　(右辺)$=\dfrac{a+b}{2}$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つ，すなわち

$$\frac{a^k+b^k}{2}\geqq\left(\frac{a+b}{2}\right)^k\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}&=\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{a+b}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^k\\&\geqq\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^k+b^k}{2}\\&=\frac{2a^{k+1}+2b^{k+1}-a^{k+1}-ab^k-a^kb-b^{k+1}}{4}\\&=\frac{a^{k+1}+b^{k+1}-ab^k-a^kb}{4}=\frac{(a-b)(a^k-b^k)}{4}\end{aligned}$$

この式は，$a\geqq b$ のときも，$a\leqq b$ のときも 0 以上になるから

$$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\geqq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

4

解答　(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{5}{6}$，$a_3=\dfrac{23}{24}$，$a_4=\dfrac{119}{120}$　　(2)　$a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$，証明略

解説

(1)　$a_1=\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$，$a_2=a_1+\dfrac{2}{3!}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3!}=\dfrac{3+2}{6}=\dfrac{5}{6}$,

$a_3=\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{4!}=\dfrac{5\cdot 4+3}{24}=\dfrac{23}{24}$,

$a_4=\dfrac{23}{24}+\dfrac{4}{5!}=\dfrac{23\cdot 5+4}{120}=\dfrac{119}{120}$

(2)　$a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ $\cdots\cdots$[A] と推定される.

[1]　$n=1$ のとき　(1) から，[A] は成り立つ.

[2]　$n=k$ のとき，[A] が成り立つと仮定する.

すなわち　$a_k=1-\dfrac{1}{(k+1)!}$

このとき

$$\begin{aligned}a_{k+1}=a_k+\frac{k+1}{(k+2)!}&=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}\\&=1-\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}\end{aligned}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも [A] は成り立つ.

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，[A] は成り立つ.

5

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　三角関数の加法定理から

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

辺々引くと　$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

よって　　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

(2)　与えられた等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺})=(1+2\cos x)\sin\frac{x}{2}&=\sin\frac{x}{2}+2\cos x\sin\frac{x}{2}\\&=\sin\frac{x}{2}+\sin\left(x+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{x}{2}\right)\\&=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{3x}{2}\end{aligned}$$

$$(\text{右辺})=\sin\frac{(2\cdot 1+1)x}{2}=\sin\frac{3x}{2}$$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つ，すなわち

$$(1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots\cdots+2\cos kx)\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{(2k+1)x}{2}\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を考えると，② により

$$\begin{aligned}&\{1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots\cdots+2\cos kx+2\cos(k+1)x\}\sin\frac{x}{2}\\&=(1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots\cdots+2\cos kx)\sin\frac{x}{2}+2\cos(k+1)x\sin\frac{x}{2}\\&=\sin\frac{(2k+1)x}{2}+\sin\left((k+1)x+\frac{x}{2}\right)-\sin\left((k+1)x-\frac{x}{2}\right)\\&=\sin\frac{(2k+1)x}{2}+\sin\frac{(2k+3)x}{2}-\sin\frac{(2k+1)x}{2}\\&=\sin\frac{(2k+3)x}{2}=\sin\frac{\{2(k+1)+1\}x}{2}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] により，すべての自然数 n について，① は成り立つ。

$\boxed{1}$

解答 (1)　$a_{n+1}=a_n+2b_n,\ b_{n+1}=a_n+b_n$　　(2)　[略]

(3)　$a_n=\dfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\},\ b_n=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\}$

解説

(1)　$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{n+1}=(1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})=(a_n+b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$=a_n+2b_n+(a_n+b_n)\sqrt{2}$

a_n,b_n は有理数であるから $a_{n+1}=a_n+2b_n$，　$b_{n+1}=a_n+b_n$ ……①

(2)　$n=1$ のとき $a_1=b_1=1$ より，成り立つ．

$n=k$ のとき $(1-\sqrt{2})^k=a_k-b_k\sqrt{2}$ が成り立つと仮定すると

$(1-\sqrt{2})^{k+1}=(1-\sqrt{2})^k(1-\sqrt{2})=(a_k-b_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$=a_k+2b_k-(a_k+b_k)\sqrt{2}$

① から $a_k+2b_k=a_{k+1}$，　$a_k+b_k=b_{k+1}$ であるから

$(1-\sqrt{2})^{k+1}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}$ となり，与式は $n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$n=k+1$ のときも成り立つ．

よって，任意の自然数 n に対して $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ が成り立つ．

(3)　$a_n+b_n\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^n$ ……②, $a_n-b_n\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^n$ ……③

②, ③ から $a_n=\dfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\},\ b_n=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\}$

$\boxed{2}$

解答　略

解説

数学的帰納法により証明する．

[1]　$n=0$ のとき

(左辺)$=f_0(2\cos\theta)=1$

(右辺)$=\dfrac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta}=1$

よって，成り立つ．

$n=1$ のとき

(左辺)$=f_1(2\cos\theta)=2\cos\theta$

(右辺)$=\dfrac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$

よって，成り立つ．

[2]　$n=k-1$，k $(k\geqq1)$ のとき成り立つと仮定する．

すなわち　$f_{k-1}(2\cos\theta)=\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

$f_k(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$

$n=k+1$ のとき

(左辺)$=f_{k+1}(2\cos\theta)$

$=2\cos\theta f_k(2\cos\theta)-f_{k-1}(2\cos\theta)$

$=2\cos\theta\cdot\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

$=2\cos\theta\cdot\dfrac{\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{(2\cos^2\theta-1)\sin k\theta+2\sin\theta\cos\theta\cos k\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\cos2\theta\sin k\theta+\sin2\theta\cos k\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}=$(右辺)

よって，成り立つ．

以上から，$n\geqq0$ であるすべての n について $f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表される．

$\boxed{3}$

解答　略

解説

「$\alpha^n+\beta^n-3^n$ は5の整数倍になる」 ……① とする。

① を数学的帰納法を用いて証明する。

ここで，解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=5$

[1]　$n=1$，2 のとき

$n=1$ のとき　　$\alpha+\beta-3=3-3=0$

$n=2$ のとき　　$\alpha^2+\beta^2-3^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-9=3^2-2\cdot5-9=-10=5\cdot(-2)$

よって，$n=1$，2 のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k$，$k+1$ のとき ① が成り立つと仮定する。

このとき，整数 l，m を用いて

$\alpha^k+\beta^k-3^k=5l,\ \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-3^{k+1}=5m$

と表せる。

$n=k+2$ のとき

$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}-3^{k+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)-3^{k+2}$

$=3(5m+3^{k+1})-5(5l+3^k)-3^{k+2}$

$=5(3m-5l-3^k)$

$3m-5l-3^k$ は整数であるから，$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}-3^{k+2}$ は5の整数倍になる。

よって，$n=k+2$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての正の整数 n に対して ① は成り立つ。

$\boxed{4}$

解答　略

解説

数列 $\{a_n\}$ がすべての正の整数 n に対して

$$0\leqq3a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}a_k\quad\cdots\cdots①$$

を満たしているとき，すべての n に対して

$a_n=0$　　……②

であることを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

① において $n=1$ とすると

$0\leqq3a_1\leqq a_1$

すなわち　$0\leqq3a_1$ かつ $3a_1\leqq a_1$

$0\leqq a_1$ かつ $a_1\leqq0$

よって　$a_1=0$

したがって，② は $n=1$ のとき成り立つ。

[2]　$n=1$，2，……，l のとき ② が成り立つ，すなわち

$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_l=0$　　……③

であると仮定する。

$n=l+1$ のときを考えると，① から

$$0\leqq3a_{l+1}\leqq\sum_{k=1}^{l+1}a_k$$

すなわち　$0\leqq3a_{l+1}\leqq a_1+a_2+\cdots\cdots+a_l+a_{l+1}$

これと ③ から　$0\leqq3a_{l+1}\leqq a_{l+1}$

よって　$a_{l+1}=0$

したがって，② は $n=l+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，② はすべての正の整数 n に対して成り立つ。

1

解答　(ア)　3　(イ)　2　(ウ)　$3(4^n-1)$　(エ)　4　(オ)　$6(4^n-1)$

解説

$a_2=6$ から　$a_1r=6$　……①

$a_5=48$ から　$a_1r^4=48$

よって　$a_1r\cdot r^3=48$

これと①から　$6r^3=48$　すなわち　$r^3=8$

r は実数であるから　$r={}^{イ}2$

このとき，①から　$a_1={}^{ア}3$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=3\cdot2^{n-1}$ であり　$a_n{}^2=(3\cdot2^{n-1})^2=9\cdot4^{n-1}$

ゆえに，数列 $\{a_n{}^2\}$ は初項 9，公比 4 の等比数列であるから

$$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=\frac{9(4^n-1)}{4-1}={}^{ウ}3(4^n-1)$$

$b_n=a_na_{n+1}=3\cdot2^{n-1}\cdot3\cdot2^n=18\cdot4^{n-1}$ であるから，数列 $\{b_n\}$ も公比 ${}^{エ}4$ の等比数列である。

よって　$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n=\dfrac{18(4^n-1)}{4-1}={}^{オ}6(4^n-1)$

2

解答　$f(x)=x^2-3x+2$

解説

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k^2+ak+b)=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+a\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+bn\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{a}{2}(n+1)+b=\frac{1}{3}n^2+\frac{a+1}{2}n+\frac{3a+6b+1}{6}$$

よって，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ から　$\dfrac{1}{3}n^2+\dfrac{a+1}{2}n+\dfrac{3a+6b+1}{6}=\dfrac{1}{3}n^2+\dfrac{a}{3}n+\dfrac{b}{3}$

これがすべての自然数 n に対して成り立つから　$\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{a}{3}$,　$\dfrac{3a+6b+1}{6}=\dfrac{b}{3}$

これを解いて　$a=-3$，$b=2$

したがって　$f(x)=x^2-3x+2$

3

解答　(1)　$\sqrt{3}$　(2)　$6n-1$

解説

(1)　m を整数とする。$\sin\dfrac{k\pi}{3}$ の値は，

$k=6m+1$ のとき　$\sin\left(2m\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=6m+2$ のとき　$\sin\left(2m\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=6m+3$ のとき　$\sin(2m\pi+\pi)=0$

$k=6m+4$ のとき　$\sin\left(2m\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=6m+5$ のとき　$\sin\left(2m\pi+\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=6m$　のとき　$\sin2m\pi=0$

$2007=6\times334+3$ であるから

$$\sum_{k=1}^{2007}\sin\frac{k\pi}{3}=334\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+0\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0=\sqrt{3}$$

(2)　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{12n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{12}\right)^2$ とおくと

$$S=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(12n-1+\sum_{k=1}^{12n-1}\cos\frac{k\pi}{6}\right)\quad\cdots\cdots①$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n-1}\cos\frac{k\pi}{6}$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+\cdots\cdots+\cos\frac{11\pi}{6}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{12\pi}{6}+\cos\frac{13\pi}{6}+\cdots\cdots+\cos\frac{23\pi}{6}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\left(\cos\frac{12n-12}{6}\pi+\cos\frac{12n-11}{6}\pi+\cdots\cdots+\cos\frac{12n-1}{6}\pi\right)$$
$$=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-1)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$+\left\{1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-1)\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\times(n-1)$$
$$=-1+0\times(n-1)=-1$$

よって，①から　$S=\dfrac{1}{2}(12n-1-1)=6n-1$

4

解答　(1)　$a_{2m}=3m-1$

(2)　n が偶数のとき $S_n=\dfrac{3}{4}n^2$，n が奇数のとき $S_n=\dfrac{3}{4}n^2+\dfrac{1}{4}$

(3)　$n=29$

解説

(1)　1，2，4，5，7，8，…… であり　$a_{2m-1}=1+3(m-1)=3m-2$，

$a_{2m}=a_{2m-1}+1=3m-1$

(2)　n が偶数のとき，$n=2m$ とすると

$$S_n=S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{m}(3k-2+3k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(6k-3)=3m^2=3\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{3}{4}n^2$$

n が奇数のとき，$n=2m-1$ とすると

$$S_n=S_{2m-1}=S_{2m}-a_{2m}=3m^2-(3m-1)$$
$$=3\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{n+1}{2}+1=\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}$$

(3)　$\dfrac{3}{4}x^2=600$ を解くと　$x=20\sqrt{2}=28.28\cdots\cdots$

$n\leqq28$ のとき　$S_n\leqq S_{28}=\dfrac{3}{4}\cdot28^2=588<600$

$S_{29}=\dfrac{3}{4}\cdot29^2+\dfrac{1}{4}=631>600$

よって，求める n の値は　$n=29$

5

解答　(1)　$a_n=2n-1$，$b_n=3^n$　(2)　$S_n=1-\dfrac{n+1}{3^n}$

解説

(1)　$\{a_n\}$ の公差を d，$\{b_n\}$ の公比を r とする。

$a_1=1$，$b_1=3$ であるから　$a_n=1+(n-1)d$，$b_n=3r^{n-1}$

$a_2+2b_2=21$ から　$1+d+6r=21$

よって　$d=20-6r$　……①

$a_4+2b_4=169$ から　$1+3d+6r^3=169$

よって　$6r^3+3d-168=0$　……②

①を②に代入すると　$6r^3+3(20-6r)-168=0$

整理すると　$r^3-3r-18=0$　すなわち　$(r-3)(r^2+3r+6)=0$

r は正の数であるから　$r=3$

①に代入して　$d=2$

よって，求める一般項は　$a_n=2n-1$，$b_n=3^n$

(2)　(1)から　$S_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{2n-1}{3^n}$

$$\frac{1}{3}S_n=\quad\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-3}{3^n}+\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

辺々を引くと

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\frac{1}{3}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{3}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$$

よって　$S_n=\dfrac{3}{2}\left\{\dfrac{2}{3}-\dfrac{2(n+1)}{3^{n+1}}\right\}=1-\dfrac{n+1}{3^n}$

6

解答　(1)　$a_1=6$，$a_2=18$　(2)　$a_n=3n(n+1)$　(3)　$\dfrac{100}{303}$

解説

(1)　$a_1=S_1=1^3+3\cdot1^2+2\cdot1=6$

$a_2=S_2-a_1=2^3+3\cdot2^2+2\cdot2-6=18$

(2)　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^3+3n^2+2n)-\{(n-1)^3+3(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=3n^2+3n=3n(n+1)\quad\cdots\cdots①$$

また，(1)から　$a_1=6$

ここで，①において $n=1$ とすると　$a_1=3\cdot1\cdot2=6$

よって，$n=1$ のときも①は成り立つ。

したがって　$a_n=3n(n+1)$

(3) $\dfrac{1}{a_k}=\dfrac{1}{3n(n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{100}{303}$$

$\boxed{7}$

解答　28

解説

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})}$$
$$=\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{n-1-n}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

同様にして　$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

また　$\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})}$
$$=\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{n-1-(n+1)}=\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$

よって　$(与式)=\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\left\{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\right\}$
$$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{100}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$
$$=\frac{3}{2}\{(\sqrt{2}-0)+(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})$$
$$+\cdots\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{98})+(\sqrt{101}-\sqrt{99})\}$$
$$=\frac{3}{2}(\sqrt{101}+\sqrt{100}-\sqrt{1})$$
$$=\frac{3}{2}(\sqrt{101}+9)=\frac{\sqrt{909}+27}{2}$$

ここで $30^2<909<31^2$ から　$30<\sqrt{909}<31$

よって　$\dfrac{30+27}{2}<\dfrac{\sqrt{909}+27}{2}<\dfrac{31+27}{2}$

すなわち　$28.5<\dfrac{\sqrt{909}+27}{2}<29$

よって，整数部分は　28

$\boxed{8}$

解答　(1)　$a+\dfrac{1}{2a}+\dfrac{7}{2}$　　(2)　$k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　　(3)　第 2031 項は $\dfrac{1}{2}$ より大きい

解説

(1)　$\log_2 1+\log_2 2+\log_3 1+\log_3 2+\log_3 3+\log_4 1+\log_4 2+\log_4 3+\log_4 4+\log_5 1$
$$=0+1+0+a+1+0+\log_4 2+\log_4 3+1+0$$
$$=3+a+\frac{\log_3 2}{\log_3 4}+\frac{1}{\log_3 4}$$
$$=3+a+\frac{a}{2a}+\frac{1}{2a}=a+\frac{1}{2a}+\frac{7}{2}$$

(2)　与えられた数列を

$\log_2 1,\ \log_2 2|\log_3 1,\ \log_3 2,\ \log_3 3|\log_4 1,\ \log_4 2,$

$\log_4 3,\ \log_4 4|\log_5 1,\ \log_5 2,\ \cdots\cdots$

のように，底の等しいものを 1 つの群として区切って考える。

初項から数えて n 番目の 0 となる項は，第 n 群の最初の項，すなわち $\log_{n+1}1$ である。

この項が第 k 項であるとすると，第 m 群の項は $(m+1)$ 個あるから，$n\geqq 2$ のとき

$$k=(2+3+\cdots\cdots+n)+1=\frac{1}{2}n(n+1)\quad\cdots\cdots①$$

1 番目の 0 となる項は第 1 項であるから，$n=1$ のとき $k=1$ である。

よって，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

(3)　第 2031 項の対数の底を n $(n\geqq 2)$ とすると，(2) より

$$\frac{1}{2}(n-1)n\leqq 2031<\frac{1}{2}n(n+1)\quad\cdots\cdots②$$

$(n-1)n$，$n(n+1)$ は，$n\geqq 2$ のとき単調に増加し

$$\frac{1}{2}(64-1)\cdot 64=2016,\quad \frac{1}{2}\cdot 64(64+1)=2080$$

ゆえに，② を満たす自然数 n は　$n=64$

よって，第 2016 項が底 64 になる最初の項であるから，第 2031 項は

$$\log_{64}(2031-2016+1)=\log_{64}16$$

また　$\log_{64}16=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 64}=\dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 2^6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}>\dfrac{1}{2}$

したがって，第 2031 項は $\dfrac{1}{2}$ より大きい。

$\boxed{9}$

解答　$(n-1)2^{n+1}+2$

解説

$1<x<2^{n+1}$ および $0<y\leqq\log_2 x$ をみたす領域内の $y=k$ 上に $(2^{n+1}-2^k)$ 個の格子点が存在する。

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{n+1}-2^k)=(n-1)2^{n+1}+2$$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$r_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　(2)　略

解説

(1)　右の図において，$n\geqq 2$ のとき

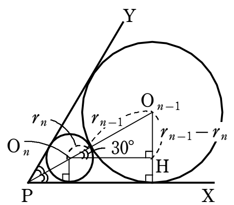
$O_{n-1}O_n=r_{n-1}+r_n$，$O_{n-1}H=r_{n-1}-r_n$

$\angle O_{n-1}O_nH=30°$ から　$O_{n-1}O_n=2O_{n-1}H$

よって　$r_{n-1}+r_n=2(r_{n-1}-r_n)$

ゆえに　$r_n=\dfrac{1}{3}r_{n-1}$　また　$r_1=1$

数列 $\{r_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから



$$r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2)　$S_n=\pi r_n{}^2=\pi\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$，$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n=\dfrac{9}{8}\pi\left\{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right\}$

よって　$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n<\dfrac{9}{8}\pi<1.125\times 3.15=3.54375<3.6$

$\boxed{11}$

解答　(1)　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$，$b_n=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　(2)　$a_n=2n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　(3)　$1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

解説

(1)　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$3\cdot\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

よって，$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

また　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから　$b_n=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)　$a_n=nb_n=2n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3)　$a_{k+1}-\dfrac{1}{3}a_k=2(k+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^k-\dfrac{1}{3}\cdot 2k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1}-\frac{1}{3}a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\boxed{12}$

解答　(1)　$a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_3=\dfrac{7}{6}$，$a_4=\dfrac{5}{8}$　　(2)　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{2^{n+1}}$　　(3)　$a_n=\dfrac{2^n-1}{n\,!}$

解説

(1)　$a_2=\dfrac{2}{2}a_1+\dfrac{1}{2!}=\dfrac{2}{2}\cdot 1+\dfrac{1}{2!}=\dfrac{3}{2}$，$a_3=\dfrac{2}{3}a_2+\dfrac{1}{3!}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3!}=\dfrac{7}{6}$，

$a_4=\dfrac{2}{4}a_3+\dfrac{1}{4!}=\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{4!}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$

(2)　$b_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}\left\{\dfrac{2}{n+1}a_n+\dfrac{1}{(n+1)!}\right\}$
$$=\frac{n\,!}{2^n}a_n+\frac{1}{2^{n+1}}=b_n+\frac{1}{2^{n+1}}$$

(3)　(2) より　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}$

$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

初項は $b_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{2^n}{n\,!}b_n=\dfrac{2^n-1}{n\,!}$

13

解答 $a_n=n!$

解説

$n\geqq 2$ のとき

$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n$ ……①

$a_n=1+a_1+2a_2+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}$ ……②

①−② から $a_{n+1}-a_n=na_n$

ゆえに $a_{n+1}=(n+1)a_n$

両辺を $(n+1)!$ で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a_n}{n!}$

よって $\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\cdots\cdots=\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{1+a_1}{2}=1$

ゆえに $a_n=n!$

また，$a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n=n!$

14

解答 (1) $b_{n+1}=\dfrac{1}{5}b_n$ (2) $a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

解説

(1) $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\dfrac{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-3}{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}+1}=\dfrac{4a_n+3-3(a_n+2)}{4a_n+3+(a_n+2)}=\dfrac{a_n-3}{5a_n+5}$

$=\dfrac{a_n-3}{5(a_n+1)}=\dfrac{1}{5}b_n$

よって，求める漸化式は $b_{n+1}=\dfrac{1}{5}b_n$

(2) $a_1=4$ であるから $b_1=\dfrac{a_1-3}{a_1+1}=\dfrac{1}{5}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{5}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$b_n=\dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ ゆえに $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$

よって $a_n+1=5^n(a_n-3)$ ゆえに $(5^n-1)a_n=3\cdot5^n+1$

したがって $a_n=\dfrac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}$

参考 $x=\dfrac{4x+3}{x+2}$ を解くと $x=3,\ -1$

$a_{n+1}-3=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-3$ より $a_{n+1}-3=\dfrac{a_n-3}{a_n+2}$ ……①

$a_{n+1}+1=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}+1$ より $a_{n+1}+1=\dfrac{5(a_n+1)}{a_n+2}$ ……②

①÷② より $\dfrac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ (以下，解答と同様)

15

解答 (1) $b_n=2n^3-3n^2+n+1$ (2) $a_n=2^{2n^3-3n^2+n+1}$ (3) 516

解説

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n2^{6n^2}$ ……① であるから，すべての自然数 n について a_n は正の数である。

① の両辺において，2 を底とする対数をとると

$\log_2a_{n+1}=\log_2a_n+\log_22^{6n^2}$

すなわち $\log_2a_{n+1}=\log_2a_n+6n^2$

よって $b_{n+1}=b_n+6n^2$

また $b_1=\log_2a_1=\log_22=1$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}6k^2=1+6\cdot\dfrac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}$

$=1+n(n-1)(2n-1)=2n^3-3n^2+n+1$

初項は $b_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n=2n^3-3n^2+n+1$

(2) (1) から $\log_2a_n=2n^3-3n^2+n+1$

よって $a_n=2^{2n^3-3n^2+n+1}$

(3) (2) から $a_{10}=2^{2000-300+10+1}=2^{1711}$

ゆえに $\log_{10}a_{10}=1711\times\log_{10}2=1711\times0.3010=515.011$

よって，$515<\log_{10}a_{10}<516$ であるから $10^{515}<a_{10}<10^{516}$

したがって，a_{10} の桁数は 516

16

解答 $a_1=0$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=\dfrac{2}{n(n-1)}$

解説

$n\geqq 2$ のとき $(n-1)^2(S_n-S_{n-1})=S_n$ から

$(n^2-2n)S_n=(n-1)^2S_{n-1}$ ……①

よって，$n\geqq 3$ のとき，① の両辺を $(n-1)(n-2)$ で割ると

$\dfrac{n}{n-1}S_n=\dfrac{n-1}{n-2}S_{n-1}$

ゆえに $\dfrac{n}{n-1}S_n=2S_2$

$S_2=(2-1)^2a_2=1$ であるから $\dfrac{n}{n-1}S_n=2$

よって $S_n=\dfrac{2(n-1)}{n}$ ……②

ここで $n=1$ とすると $S_1=0$，$n=2$ とすると $S_2=1$

ゆえに，② は $n\geqq 1$ で成り立つ.

よって，

$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2(n-1)}{n}-\dfrac{2(n-2)}{n-1}=\dfrac{2}{n(n-1)}$，

$a_1=0$

17

解答 (1) $\alpha_n+\beta_n=3^n$ (2) 略 (3) $\dfrac{2n-1}{8}3^{n+1}+\dfrac{2n^2+2n+3}{8}$

解説

(1) 2 を底として，$a_{n+1}=a_n{}^2b_n$ と $b_{n+1}=a_nb_n{}^2$ の両辺の対数をとると

$\log_2a_{n+1}=2\log_2a_n+\log_2b_n$

$\log_2b_{n+1}=\log_2a_n+2\log_2b_n$

よって $\alpha_{n+1}=2\alpha_n+\beta_n$ ……①

$\beta_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n$ ……②

①+② から $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}=3(\alpha_n+\beta_n)$

$\alpha_1=\log_2a_1=\log_24=2$，$\beta_1=\log_2b_1=\log_22=1$ であるから

$\alpha_1+\beta_1=2+1=3$

ゆえに，数列 $\{\alpha_n+\beta_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$\alpha_n+\beta_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

(2) 等式の左辺を S とすると

$S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^n$

$3S=\quad 1\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1}$

辺々引くと $-2S=3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}$

$=\dfrac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^{n+1}$

$=-\dfrac{2n-1}{2}3^{n+1}-\dfrac{3}{2}$

したがって，$S=\dfrac{2n-1}{4}3^{n+1}+\dfrac{3}{4}$ が成り立つ。

(3) ①−② から $\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}=\alpha_n-\beta_n$

また $\alpha_1-\beta_1=2-1=1$

ゆえに $\alpha_n-\beta_n=\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}=\cdots\cdots=\alpha_1-\beta_1=1$

これと (1) の結果から $\alpha_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

$\log_2(a_1a_2{}^2a_3{}^3\cdot\cdots\cdots\cdot a_n{}^n)=\log_2a_1+2\log_2a_2+3\log_2a_3+\cdots\cdots+n\log_2a_n$

$=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots\cdots+n\alpha_n$

$=\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\dfrac{3^k+1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k\cdot3^k+k)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{2n-1}{4}3^{n+1}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$=\dfrac{2n-1}{8}3^{n+1}+\dfrac{2n^2+2n+3}{8}$

18

解答 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) $1+\dfrac{1}{2^n}$ (3) $\dfrac{1}{3\cdot8^{n+1}}$

解説

(1) $y=x^2$ から $y'=2x$

よって，C 上の点 $\mathrm{P}_0(2,\ 4)$ における接線の方程式は

$y-4=4(x-2)$ すなわち $y=4x-4$

$x=a_1$，$y=2$ とすると $2=4a_1-4$ よって $a_1=\dfrac{3}{2}$

(2) C 上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n{}^2)$ における接線の方程式は

$y-a_n{}^2=2a_n(x-a_n)$ すなわち $y=2a_nx-a_n{}^2$

$x=a_{n+1}$，$y=a_n$ とすると　　$a_n=2a_na_{n+1}-a_n{}^2$

$a_n \neq 0$ であるから　　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+1)$

よって　　$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$　　　　また　$a_1-1=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad したがって\quad a_n=1+\frac{1}{2^n}$$

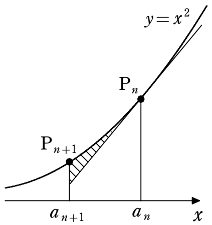
(3)　求める面積は

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{x^2-(2a_nx-a_n{}^2)\}dx$$

$$=\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_n)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-a_n)^3\right]_{a_{n+1}}^{a_n}$$

$$=\frac{1}{3}(a_n-a_{n+1})^3=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{1}{2^n}-\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right\}^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^3=\frac{1}{3\cdot 8^{n+1}}$$



$\boxed{19}$

解答　(1)　順に 3，4，5，6　　(2)　$a_n=\dfrac{n+2}{2(n+1)}$，証明 略　　(3)　201

解説

(1)　$2(1+1)a_1=4\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=4\cdot\dfrac{3}{4}=3$

$2(2+1)a_2=6\cdot\dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{1}{9}\right)=6\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}=6\cdot\dfrac{2}{3}=4$

$2(3+1)a_3=8\cdot\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{16}\right)=8\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{15}{16}=8\cdot\dfrac{5}{8}=5$

$2(4+1)a_4=10\cdot\dfrac{5}{8}\left(1-\dfrac{1}{25}\right)=10\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{24}{25}=6$

(2)　(1) から，$2(n+1)a_n=n+2$ すなわち

$$a_n=\frac{n+2}{2(n+1)}\quad\cdots\cdots ①$$

と推定される。これを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$$(左辺)=a_1=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\quad (右辺)=\frac{1+2}{2(1+1)}=\frac{3}{4}$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$a_k=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

と仮定する。$n=k+1$ のときを考えると

$$a_{k+1}=a_k\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}=\frac{k+3}{2(k+2)}$$

よって，① は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ。

(3)　$a_n>\dfrac{1}{2}+\dfrac{100}{n^2}$ から　　$\dfrac{n+2}{2(n+1)}>\dfrac{1}{2}+\dfrac{100}{n^2}$

両辺に $2(n+1)n^2$ を掛けると　　$n^3+2n^2>n^3+n^2+200n+200$

整理すると　　$n(n-200)>200$

この不等式を満たす最小の n の値は　　$n=201$

$\boxed{1}$

解答　$n=7$ のとき公差は -14，$n=14$ のとき公差は 1001

解説

$(x+1)^n$ の展開式における x^k の係数は ${}_n\mathrm{C}_{n-k}$ すなわち ${}_n\mathrm{C}_k$ である。

x^4，x^5，x^6 の係数がこの順に等差数列をなすとき，${}_n\mathrm{C}_4+{}_n\mathrm{C}_6=2{}_n\mathrm{C}_5$ が成り立つ。

すなわち　$\dfrac{n!}{(n-4)!4!}+\dfrac{n!}{(n-6)!6!}=\dfrac{2\times n!}{(n-5)!5!}$

両辺に $\dfrac{(n-4)!6!}{n!}$ を掛けて　$6\cdot5+(n-4)(n-5)=2(n-4)\cdot6$

ゆえに　$n^2-21n+98=0$　　　よって　$(n-7)(n-14)=0$

したがって　$n=7,\ 14$

$n=7$ のとき，公差は　${}_7\mathrm{C}_5-{}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_2-{}_7\mathrm{C}_3=21-35=-14$

$n=14$ のとき，公差は　${}_{14}\mathrm{C}_5-{}_{14}\mathrm{C}_4=2002-1001=1001$

$\boxed{2}$

解答　$a=1$，$b=1$，$c=2$

解説

(A) から，$4+x_2=2x_1$ が成り立ち，$x_1=-a+b+c$，$x_2=-4a+2b+c$ であるから

$-4a+2b+c+4=-2a+2b+2c$　　　　よって　　$2a+c=4$

a，c は自然数であるから　　$a=1$，$c=2$ ……①

(B) から　$\left(\dfrac{x_n-x_{n+1}}{2}\right)^2\geqq1$　　　すなわち　　$|x_n-x_{n+1}|\geqq2$ ……②

① から　　$x_n-x_{n+1}=-n^2+bn+2-\{-(n+1)^2+b(n+1)+2\}$

$=2n+1-b$

ここで $b\geqq2$ とすると，$|2n+1-b|\leqq1$ となる自然数 n が存在し，その n に対して ② が成り立たないから条件を満たさない。

$b=1$ のとき，$|x_n-x_{n+1}|=2n\geqq2$ となり，条件を満たす。

したがって　　$a=1$，$b=1$，$c=2$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$n=32$　　(2)　48.5328　　(3)　3.5562

解説

(1)　$1080=2^3\times3^3\times5^1$ であるから

$$n=(3+1)(3+1)(1+1)=32$$

(2)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\log_{10}a_i=\sum_{i=1}^{32}\log_{10}a_i=\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\cdots\cdots+\log_{10}a_{32}$

$=\log_{10}(a_1a_2\cdots\cdots a_{32})$

ここで，a_1a_{32}，a_2a_{31}，a_3a_{30}，……，$a_{32}a_1$ はいずれも 1080 であるから

$(a_1a_2\cdots\cdots a_{32})^2=1080^{32}$

よって　　$a_1a_2\cdots\cdots a_{32}=1080^{16}=(2^3\times3^3\times5^1)^{16}=2^{48}\times3^{48}\times5^{16}$

したがって

$$\sum_{i=1}^{32}\log_{10}a_i=\log_{10}(2^{48}\times3^{48}\times5^{16})$$

$=48\log_{10}2+48\log_{10}3+16\log_{10}5$

$=48\log_{10}2+48\log_{10}3+16(1-\log_{10}2)$

$=32\log_{10}2+48\log_{10}3+16$

$=32\times0.3010+48\times0.4771+16=48.5328$

(3) $\log_{10}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)=\log_{10}\left(\sum_{i=1}^{32}a_i\right)=\log_{10}((2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1))$

$=\log_{10}(15\times40\times6)=\log_{10}((3\times5)\times(2^3\times5)\times(2\times3))$

$=\log_{10}(2^4\times3^2\times5^2)=4\log_{10}2+2\log_{10}3+2\log_{10}5$

$=4\log_{10}2+2\log_{10}3+2(1-\log_{10}2)$

$=2\log_{10}2+2\log_{10}3+2$

$=2\times0.3010+2\times0.4771+2=3.5562$

$\boxed{4}$

解答　48 桁

解説

$\sum_{n=0}^{99}3^n=\dfrac{1\cdot(3^{100}-1)}{3-1}=\dfrac{3^{100}-1}{2}$

$\sum_{n=0}^{99}3^n$ の範囲を調べる。

$\dfrac{3^{100}-1}{2}=\dfrac{(2+1)\cdot3^{99}-1}{2}=\dfrac{2\cdot3^{99}+3^{99}-1}{2}=3^{99}+\dfrac{3^{99}-1}{2}>3^{99}$

よって　$\sum_{n=0}^{99}3^n>3^{99}$

また　$\dfrac{3^{100}-1}{2}<\dfrac{3^{100}}{2}<3^{100}$　　よって　$\sum_{n=0}^{99}3^n<3^{100}$

以上から　$3^{99}<\sum_{n=0}^{99}3^n<3^{100}$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}3^{99}<\log_{10}\sum_{n=0}^{99}3^n<\log_{10}3^{100}$

すなわち　$99\log_{10}3<\log_{10}\sum_{n=0}^{99}3^n<100\log_{10}3$

$\log_{10}3=0.4771$ より，$99\log_{10}3=47.2329$，$100\log_{10}3=47.71$ であるから

$47<\log_{10}\sum_{n=0}^{99}3^n<48$

したがって　$10^{47}<\sum_{n=0}^{99}3^n<10^{48}$

ゆえに，$\sum_{n=0}^{99}3^n$ は　48 桁

$\boxed{5}$

解答　順に $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$

解説

番号 r の袋を選んで，1 回目に赤球が取り出される確率は

$\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{r-1}{n-1}$ $(r=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$

よって，いずれかの袋から赤球が 1 回目に取り出される確率は

$\sum_{r=2}^{n}\dfrac{r-1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n(n-1)}\sum_{r=2}^{n}(r-1)=\dfrac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n-1}j=\dfrac{1}{n(n-1)}\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{1}{2}$

また，番号 r の袋を選んで，2 回とも赤球が取り出される確率は

$\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{r-1}{n-1}\cdot\dfrac{r-2}{n-2}$ $(r=3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ n)$

よって，いずれかの袋から 2 回とも赤球が取り出される確率は

$\sum_{r=3}^{n}\dfrac{(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)}=\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{r=3}^{n}(r-1)(r-2)=\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{j=1}^{n-2}j(j+1)$

$=\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{j=1}^{n-2}\dfrac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}$

$=\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}\cdot\dfrac{1}{3}(n-2)(n-1)n=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$a_7=3$，$a_{50}=7$　(2)　$2m$　(3)　59685

解説

(1)　$2<\sqrt{7}<3$ であり，

$(\sqrt{7})^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=7-\dfrac{25}{4}=\dfrac{3}{4}>0$ より $a_7=3$

$7<\sqrt{50}<8$ であり，

$(\sqrt{50})^2-\left(\dfrac{15}{2}\right)^2=50-\dfrac{225}{4}=-\dfrac{25}{4}<0$ より $a_7=7$

(2)　$a_n=m$ となるとき $m-\dfrac{1}{2}\leqq\sqrt{n}\leqq m+\dfrac{1}{2}$ が成立する。

各辺を平方して　$m^2-m+\dfrac{1}{4}\leqq n\leqq m^2+m+\dfrac{1}{4}$

よって，これを満たす n の個数は m^2-m+1 以上 m^2+m 以下の整数の個数，つまり $(m^2+m)-(m^2-m+1)+1=2m$ 個である。

(3)　第 m 群に $2m$ 個の数列がある群数列：{ 1 1 | 2 2 2 2 | 3 3 3 3 3 3 | 4 ⋯ } を考える。

第 n 項の数は a_n に対応しており，a_{2001} は第 45 群の第 21 項にある。

以上より

$\sum_{k=1}^{2001}a_k=\sum_{k=1}^{44}k\cdot2k+45\cdot21=2\cdot\dfrac{1}{6}\cdot44\cdot45\cdot89+45\cdot21=59685$

$\boxed{7}$

解答　(ア)　$k+1$　(イ)　$\dfrac{1}{k+1}$　(ウ)　$\dfrac{1}{3}$　(エ)　$n+2$　(オ)　$\dfrac{1}{k+2}$

(カ)　$k+1$

解説

$f_{k+1}(n)=n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k-1)(n+k)=(n+k)f_k(n)$　⋯⋯①

$n\geqq2$ のとき

$f_{k+1}(n-1)=(n-1)n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k-1)=(n-1)f_k(n)$

よって　$f_{k+1}(n)-f_{k+1}(n-1)=({}^{ア}k+1)f_k(n)$

ゆえに　$(k+1)\sum_{r=2}^{n}f_k(r)$

$=f_{k+1}(2)-f_{k+1}(1)+f_{k+1}(3)-f_{k+1}(2)$

$+\cdots\cdots+f_{k+1}(n-1)-f_{k+1}(n-2)$

$+f_{k+1}(n)-f_{k+1}(n-1)$

$=-f_{k+1}(1)+f_{k+1}(n)$

① より，$f_{k+1}(1)=(k+1)f_k(1)$ であるから

$(k+1)\sum_{r=1}^{n}f_k(r)=f_{k+1}(n)$

よって　$\sum_{r=1}^{n}f_k(r)={}^{イ}\dfrac{1}{k+1}f_{k+1}(n)$　⋯⋯②

ゆえに　$1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+n(n+1)=\sum_{r=1}^{n}f_2(r)=\dfrac{1}{3}f_3(n)$

$={}^{ウ}\dfrac{1}{3}n(n+1)({}^{エ}n+2)$

② から　$\sum_{r=1}^{n}r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+k)$

$=\sum_{r=1}^{n}f_{k+1}(r)=\dfrac{1}{k+2}f_{k+2}(n)$

$=\dfrac{1}{k+2}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k+1)$

$={}^{オ}\dfrac{1}{k+2}\times\dfrac{(n+{}^{カ}k+1)!}{(n-1)!}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　第 $\dfrac{1}{2}(k^2+k+2)$ 項　(2)　第 $\dfrac{1}{2}(m^2+15m+74)$ 項

(3)　$\dfrac{1}{6}(2k^3+3k^2+k+6)$　(4)　$n=128$

解説

与えられた数列を {1}，{1，3}，{1，3，5}，{1，3，5，7}，⋯⋯ のように，第 i 群に i 個の項が含まれるように群に分ける。

(1)　$k+1$ 回目に現れる 1 は，第 $k+1$ 群の最初の項である。

第 1 群から第 k 群までの項数は　$\sum_{i=1}^{k}i=\dfrac{1}{2}k(k+1)$

$\dfrac{1}{2}k(k+1)+1=\dfrac{1}{2}(k^2+k+2)$ であるから，$k+1$ 回目に現れる 1 は第 $\dfrac{1}{2}(k^2+k+2)$ 項である。

(2)　$2n-1=17$ とすると　$n=9$

よって，1 回目に現れる 17 は，第 9 群の第 9 項である。

ゆえに，m 回目に現れる 17 は，第 $m+8$ 群の第 9 項である。第 1 群から第 $m+7$ 群までの項数は　$\sum_{i=1}^{m+7}i=\dfrac{1}{2}(m+7)(m+8)$

$\dfrac{1}{2}(m+7)(m+8)+9=\dfrac{1}{2}(m^2+15m+74)$ であるから，m 回目に現れる 17 は

第 $\dfrac{1}{2}(m^2+15m+74)$ 項である。

(3)　第 i 群に含まれる項の和は　$\sum_{h=1}^{i}(2h-1)=i^2$

よって，初項から $k+1$ 回目の 1 までの項の和は

$\sum_{i=1}^{k}i^2+1=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+1=\dfrac{1}{6}(2k^3+3k^2+k+6)$

(4)　第 1 群から第 k 群までに含まれる項の和を T_k とすると

$T_k=\sum_{i=1}^{k}i^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

よって　$T_{15}=\dfrac{1}{6}\cdot15\cdot16\cdot31=1240$

$T_{16}=\dfrac{1}{6}\cdot16\cdot17\cdot33=1496$

また　$T_{15}+7^2=1289$，$T_{15}+8^2=1304$

ゆえに，初項から第 16 群の第 8 項までの和が初めて 1300 より大きくなるから，求める

n の値は　$n=\sum_{i=1}^{15} i+8=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16+8=128$

9

解答　$3n^2+3n+1$

解説

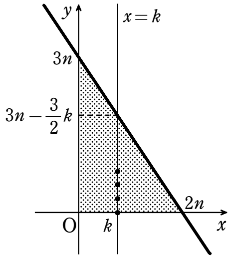
$3x+2y=6n$　……①

① と x 軸との交点の座標は　$(2n,\ 0)$,

y 軸との交点の座標は　$(0,\ 3n)$

直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ と ① の交点の座標は

$\left(k,\ 3n-\frac{3}{2}k\right)$　……②



よって，題意に適する格子点のうち，直線 $x=k$ 上にある個数を l_k とすると

k が偶数のとき　$l_k=3n-\frac{3}{2}k+1$

k が奇数のとき　$l_k=3n-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}+1=3n-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}$

k が偶数のとき $k=2m$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とおけるから

$$l_{2m}=3n-\frac{3}{2}\cdot 2m+1=3n-3m+1$$

k が奇数のとき $k=2m-1$ $(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とおけるから

$$l_{2m-1}=3n-\frac{3}{2}(2m-1)+\frac{1}{2}=3n-3m+2$$

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{m=0}^{n} l_{2m}+\sum_{m=1}^{n} l_{2m-1}=l_0+\sum_{m=1}^{n} l_{2m}+\sum_{m=1}^{n} l_{2m-1}=l_0+\sum_{m=1}^{n}(l_{2m}+l_{2m-1})$$

$$=3n+1+\sum_{m=1}^{n}\{(3n-3m+1)+(3n-3m+2)\}$$

$$=3n+1+\sum_{m=1}^{n}\{-6m+3(2n+1)\}$$

$$=3n+1-6\sum_{m=1}^{n} m+3(2n+1)\sum_{m=1}^{n} 1$$

$$=3n+1-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3(2n+1)n$$

$$=3n^2+3n+1$$

別解　直線 $3x+2y=6n$ $(0\leqq x\leqq 2n)$ 上の格子点 $(0,\ 3n)$, $(2,\ 3n-3)$, ……, $(2n,\ 0)$ の個数は

$n+1$

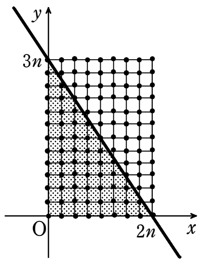
4 点 $(0,\ 0)$, $(2n,\ 0)$, $(2n,\ 3n)$, $(0,\ 3n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$(2n+1)(3n+1)$

よって，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(2n+1)(3n+1)-(n+1)\}+(n+1)$$

$$=3n^2+3n+1$$



10

解答　(1)　n が奇数のとき $a_{n+4}=4a_n+3$，n が偶数のとき $a_{n+4}=4a_n+6$

(2)　$n=4k-3$，$4k-2$ のとき 0；$n=4k-1$ のとき 1；$n=4k$ のとき 2

（ただし，k は自然数）

解説

(1)　[1]　n が奇数のとき

$$a_{n+4}=a_{(n+3)+1}=a_{n+3}+1=a_{(n+2)+1}+1=2a_{n+2}+1$$
$$=2a_{(n+1)+1}+1=2(a_{n+1}+1)+1$$
$$=2a_{n+1}+3=2\cdot 2a_n+3=4a_n+3$$

[2]　n が偶数のとき

$$a_{n+4}=a_{(n+3)+1}=2a_{n+3}=2a_{(n+2)+1}=2(a_{n+2}+1)=2a_{n+2}+2$$
$$=2a_{(n+1)+1}+2=2\cdot 2a_{n+1}+2=4a_{n+1}+2=4(a_n+1)+2=4a_n+6$$

(2)　n が奇数のとき　$a_{n+4}=3(a_n+1)+a_n$，n が偶数のとき　$a_{n+4}=3(a_n+2)+a_n$

$3(a_n+1)$，$3(a_n+2)$ は 3 で割り切れるから，n が奇数，偶数のいずれの場合についても，a_{n+4} を 3 で割った余りは，a_n を 3 で割った余りと等しい。

$a_1=0$，$a_2=0$，$a_3=1$，$a_4=2$ であるから，a_n を 3 で割ったときの余りは，k を自然数として

$n=4k-3$，$4k-2$ のとき　0；$n=4k-1$ のとき　1；$n=4k$ のとき　2

参考　[一般項 a_n は次のようにして求めることができる]

自然数 n に対して，$b_n=a_{2n-1}$ とおくと

$b_{n+1}=a_{2n+1}=a_{2n}+1=2a_{2n-1}+1=2b_n+1$　　よって　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=a_1+1=1$，公比 2 の等比数列であるから

$b_n+1=2^{n-1}$　すなわち　$b_n=2^{n-1}-1$

よって　$a_{2n-1}=b_n=2^{n-1}-1$，$a_{2n}=2a_{2n-1}=2^n-2$

ゆえに　n が奇数のとき $a_n=2^{\frac{n-1}{2}}-1$，n が偶数のとき $a_n=2^{\frac{n}{2}}-2$

11

解答　(1)　(ア)　$3A-6$　　(イ)　$3A-8$　　(ウ)　$3A-\frac{3}{2}(n-1)$　　(エ)　$3A-\frac{3}{2}n+1$

(2)　(オ)　$2A$　　(カ)　$3A^2+A$

解説

(1)　$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2 & (n\text{ が奇数のとき})\ \cdots\cdots ①\\ a_n-1 & (n\text{ が偶数のとき})\ \cdots\cdots ②\end{cases}$

とする。

$$a_5=a_4-1=(a_3-2)-1=(a_2-1)-3=(a_1-2)-4=a_1-6$$

$a_1=3A$ であるから　　$a_5={}^{ア}3A-6$

よって，① から　　$a_6=a_5-2={}^{イ}3A-8$

自然数 m に対して，② から　　$a_{2m+1}=a_{2m}-1$

更に ① から　　$a_{2m+1}=(a_{2m-1}-2)-1$

よって　　$a_{2m+1}=a_{2m-1}-3$

したがって，数列 $\{a_{2m-1}\}$ は公差 -3 の等差数列であり，一般項は

$a_{2m-1}=a_1+(-3)(m-1)=3A-3(m-1)$　……③

n が奇数のとき，$2m-1=n$，すなわち，$m=\frac{n+1}{2}$ とすると

$$a_n={}^{ウ}3A-\frac{3}{2}(n-1)$$

また ①，③ から　　$a_{2m}=a_{2m-1}-2=3A-3m+1$

n が偶数のとき，$2m=n$，すなわち，$m=\frac{n}{2}$ とすると

$$a_n={}^{エ}3A-\frac{3}{2}n+1$$

(2)　n が奇数のとき，$a_n=3A-\frac{3}{2}(n-1)>0$ から　　$n<2A+1$

n が偶数のとき，$a_n=3A-\left(\frac{3}{2}n-1\right)>0$ から　　$n<2A+\frac{2}{3}$

したがって，$a_n>0$ となる最大の自然数 n は

$N={}^{オ}2A$

よって　$\sum_{n=1}^{N} a_n=\sum_{n=1}^{2A} a_n=\sum_{m=1}^{A}(a_{2m-1}+a_{2m})$

$$=\sum_{m=1}^{A}\{3A-3(m-1)+3A-3m+1\}$$

$$=\sum_{m=1}^{A}(6A-6m+4)=\sum_{m=1}^{A}(-6m+6A+4)$$

$$=-6\cdot\frac{A(A+1)}{2}+(6A+4)A$$

$$=-3A^2-3A+6A^2+4A$$

$$={}^{カ}3A^2+A$$

12

解答　(1)　$a_1=\frac{a}{a+1}$　　(2)　$a_n=\frac{a}{(a+1)^n}$

(3)　$\frac{a}{2(a+1)(a+2)}\left\{1-\frac{1}{(a+1)^{2n}}\right\}$

解説

(1)　$BB_1=A_1B_1=a_1$ であるから

$B_1C=BC-BB_1$

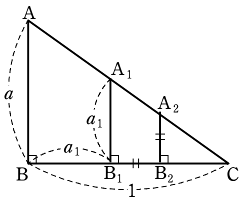
$=1-a_1$

$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C$ であるから

$a:1=a_1:(1-a_1)$

よって　　$a(1-a_1)=a_1$

ゆえに　　$a_1=\frac{a}{a+1}$



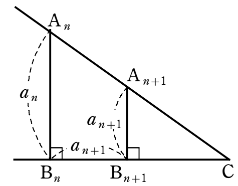
(2)　$\triangle ABC\backsim\triangle A_nB_nC$ であるから　　$B_nC=\frac{a_n}{a}$

よって　　$B_{n+1}C=B_nC-B_nB_{n+1}=\frac{a_n}{a}-a_{n+1}$

ここで，$A_{n+1}B_{n+1}:B_{n+1}C=a:1$ であるから

$a_{n+1}:\left(\frac{a_n}{a}-a_{n+1}\right)=a:1$

ゆえに　　$a_{n+1}=\frac{1}{a+1}a_n$

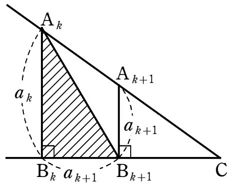


よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{a}{a+1}$，公比 $\frac{1}{a+1}$ の等比数列であるから

$$a_n=\frac{a}{a+1}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}=\frac{a}{(a+1)^n}$$

(3) $S_k=\frac{1}{2}a_ka_{k+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{(a+1)^k}\cdot\frac{a}{(a+1)^{k+1}}$

$=\frac{a^2}{2(a+1)^{2k+1}}=\frac{a^2}{2(a+1)^3}\cdot\left\{\frac{1}{(a+1)^2}\right\}^{k-1}$



よって　$\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{a^2}{2(a+1)^3}\cdot\frac{1-\left\{\frac{1}{(a+1)^2}\right\}^n}{1-\frac{1}{(a+1)^2}}$

$=\frac{a^2}{2\{(a+1)^3-(a+1)\}}\left\{1-\frac{1}{(a+1)^{2n}}\right\}$

$=\frac{a}{2(a+1)(a+2)}\left\{1-\frac{1}{(a+1)^{2n}}\right\}$

13

解答　(1) $b_{n+1}=2b_n+3$　(2) $b_n=2^{n+1}-3$　(3) $P_n=2^{2^{n+2}-3n-4}$　(4) $n=7$

解説

(1) $a_1=2>0$ で，$a_{n+1}=8{a_n}^2$ であるから，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。
よって，$a_{n+1}=8{a_n}^2$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8{a_n}^2$

よって　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8+2\log_2 a_n$

ゆえに　$b_{n+1}=2b_n+3$ ……①

(2) ① を変形して　$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$

また　$b_1+3=\log_2 a_1+3=1+3=4$

数列 $\{b_n+3\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列であるから

$b_n+3=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$　すなわち　$b_n=2^{n+1}-3$

(3) すべての自然数 n に対して $a_n>0$ であるから，$P_n>0$ である。
よって，$P_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 P_n=\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots\cdots+\log_2 a_n$

ゆえに，(2) から

$\log_2 P_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-3)$

$=\frac{4(2^n-1)}{2-1}-3n$

$=2^{n+2}-3n-4$ ……②

よって　$P_n=2^{2^{n+2}-3n-4}$

(4) $P_n>10^{100}$ について，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 P_n>100\log_2 10$ ……③

ここで，② から　$\log_2 P_{n+1}-\log_2 P_n=2^{n+3}-3(n+1)-2^{n+2}+3n$

$=2^{n+2}-3$

$n\geqq1$ のとき，$2^{n+2}-3>0$ であるから　$\log_2 P_{n+1}-\log_2 P_n>0$

よって，$\log_2 P_n$ は単調に増加するから，③ を満たす最小の自然数 n について考える。

$\log_2 8<\log_2 10<\log_2 16$ であるから　$3<\log_2 10<4$

ゆえに　$300<100\log_2 10<400$

② から　$\log_2 P_6=2^8-3\cdot6-4=234<300$，

$\log_2 P_7=2^9-3\cdot7-4=487>400$

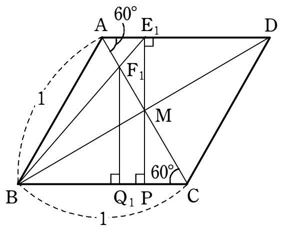
よって，③ を満たす最小の自然数 n は $n=7$ であり，求める最小の自然数 n は　$n=7$

14

解答　(1) $\frac{3}{5}$　(2) $a_{n+1}=\frac{2a_n}{2a_n+1}$　(3) $\frac{3\cdot2^{n-1}}{3\cdot2^n-1}$

解説

(1) △ABC，△ACD は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。



$AM=MC=\frac{1}{2}$ であるから

$AE_1=AM\cos60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

AD∥BC であるから

$AF_1:F_1C=AE_1:BC=\frac{1}{4}:1=1:4$

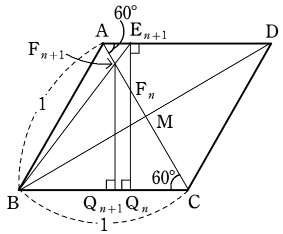
よって，$CF_1=\frac{4}{5}$ であり　$CQ_1=CF_1\cos60^\circ=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$

ゆえに　$BQ_1=1-CQ_1=\frac{3}{5}$

(2) $CF_n=2CQ_n=2(1-a_n)$ であるから

$AF_n=1-CF_n=1-2(1-a_n)=2a_n-1$

よって　$AE_{n+1}=\frac{1}{2}AF_n=\frac{1}{2}(2a_n-1)$



AD∥BC であるから

$AF_{n+1}:F_{n+1}C=AE_{n+1}:BC$

$=(2a_n-1):2$

ゆえに　$CF_{n+1}=\frac{2}{(2a_n-1)+2}=\frac{2}{2a_n+1}$

よって　$CQ_{n+1}=\frac{1}{2}CF_{n+1}=\frac{1}{2a_n+1}$

$BQ_{n+1}=1-CQ_{n+1}$ であるから　$a_{n+1}=1-\frac{1}{2a_n+1}=\frac{2a_n}{2a_n+1}$

(3) (1) から　$a_1=BQ_1=\frac{3}{5}$

すべての自然数 n について，$a_n>0$ であるから，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{2a_n+1}$ の両辺の逆数をとると　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{2a_n}$　すなわち　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2a_n}+1$

$\frac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+1$，$b_1=\frac{5}{3}$

漸化式を変形すると　$b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$

よって，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 $b_1-2=-\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$b_n-2=-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　ゆえに　$b_n=2-\frac{1}{3\cdot2^{n-1}}=\frac{3\cdot2^n-1}{3\cdot2^{n-1}}$

したがって　$BQ_n=a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{3\cdot2^{n-1}}{3\cdot2^n-1}$

15

解答　(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$　(2) $\frac{1}{3}\{4\cdot2^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$　(3) 14 日後

解説

(1) 新たな感染者 1 人が感染源となった n 日後において，感染して 2 日以降の人数を p_n，感染して 1 日目の人数を q_n，その日に発症した人数を r_n とすると

$a_n=p_n+q_n+r_n$

このとき　$p_{n+1}=p_n+q_n$，$q_{n+1}=r_n$，$r_n=2p_n+2q_n$

よって　$a_{n+2}=p_{n+2}+q_{n+2}+r_{n+2}=(p_{n+1}+q_{n+1})+r_{n+1}+(2p_{n+1}+2q_{n+1})$

$=a_{n+1}+2(p_n+q_n)+2r_n=a_{n+1}+2a_n$

別解　$a_{n+2}-a_{n+1}$ は $n+2$ 日後に新たに感染した人数で，これは n 日後の感染者数の 2 倍に等しい。

よって　$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

(2) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ を変形すると

$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$ ……①

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$ ……②

① より，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は初項 $3+1=4$，公比 2 の等比数列であるから

$a_{n+1}+a_n=4\cdot2^{n-1}$ ……③

② より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $3-2=1$，公比 -1 の等比数列であるから

$a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-1}$ ……④

③−④ から　$3a_n=4\cdot2^{n-1}-(-1)^{n-1}$

よって　$a_n=\frac{1}{3}\{4\cdot2^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$

(3) $\{a_n\}$ は単調に増加し，$a_{13}=\frac{4\cdot2^{12}-1}{3}=5461<10000$，

$a_{14}=\frac{4\cdot2^{13}+1}{3}=10923>10000$ であるから，感染者数が初めて 1 万人を超えるのは

14 日後

16

解答　(1) $a_1=\frac{1}{4}$，$b_1=\frac{3}{8}$，$c_1=\frac{3}{8}$

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{3}{8}c_n$，$b_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{8}c_n$，

$c_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{1}{4}c_n$

(3) $a_{n+1}=-\frac{1}{8}a_n+\frac{3}{8}$

(4) $a_n=-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$，$b_n=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$，$c_n=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$

解説

(1) 1 から 8 までの数で

3 で割り切れる数は　3，6　の 2 個

3 で割ったとき 1 余る数は　1，4，7　の 3 個

3 で割ったとき 2 余る数は　2，5，8　の 3 個

よって　$a_1=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，$b_1=\frac{3}{8}$，$c_1=\frac{3}{8}$

(2)　$X(n+1)$ が3で割り切れるのは，次のような場合である。

[1]　$X(n)$ は3で割り切れて，$n+1$ 回目は3で割り切れる数字が出る。

[2]　$X(n)$ を3で割ると1余り，$n+1$ 回目は3で割ると2余る数字が出る。

[3]　$X(n)$ を3で割ると2余り，$n+1$ 回目は3で割ると1余る数字が出る。

よって　$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{3}{8}c_n$

次に，$X(n+1)$ を3で割ると1余るのは，次のような場合である。

[4]　$X(n)$ は3で割り切れて，$n+1$ 回目は3で割ると1余る数字が出る。

[5]　$X(n)$ を3で割ると1余り，$n+1$ 回目は3で割り切れる数字が出る。

[6]　$X(n)$ を3で割ると2余り，$n+1$ 回目は3で割ると2余る数字が出る。

よって　$b_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{8}c_n$

更に，$X(n+1)$ を3で割ると2余る確率 c_{n+1} については，

$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=1$ であるから

$$c_{n+1}=1-(a_{n+1}+b_{n+1})=1-\left(\frac{5}{8}a_n+\frac{5}{8}b_n+\frac{3}{4}c_n\right)=\frac{3}{8}a_n+\frac{3}{8}b_n+\frac{1}{4}c_n$$

(3)　$a_n+b_n+c_n=1$ であるから　$b_n+c_n=1-a_n$

よって　$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}(b_n+c_n)=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{8}(1-a_n)=-\frac{1}{8}a_n+\frac{3}{8}$

(4)　(3)の結果の式を変形すると　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $a_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$，公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\qquad よって\qquad a_n=-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

(3)と同様に考えて　$b_{n+1}=-\frac{1}{8}b_n+\frac{3}{8}$

数列 $\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_1-\frac{1}{3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$，公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\qquad よって\qquad b_n=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

数列 $\{c_n\}$ については，$b_1=c_1$ であるから，同様にして

$$c_n=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

17

解答　(1)　$a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$　(2)　$p_n=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(3)　$q_n=\frac{1}{10}\left\{6-5\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

解説

(1)　n 回目にBがさいころを投げる確率を b_n とする。

$a_1=1$，$b_1=0$ である。

$(n+1)$ 回目にAが投げるのは，n 回目にAが投げて1，2，3の目が出るか，n 回目にBが投げて4，5の目が出るかのどちらかであるから

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n\quad\cdots\cdots①$$

$(n+1)$ 回目にBが投げるのは，n 回目にAが投げて4，5の目が出るか，n 回目にBが投げて1，2，3の目が出るかのどちらかであるから

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n\quad\cdots\cdots②$$

①+②から　$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n)$

①−②から　$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n)$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=1$，公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列，

数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=1$，公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$a_n+b_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1},\quad a_n-b_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

各辺を足して2で割ると　$a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(2)　n 回目でAが勝つのは，n 回目にAが投げて6の目が出る場合であるから

$$p_n=\frac{1}{6}a_n=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)　$q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\}=\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}\right\}$

$$=\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{2}+\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{10}=\frac{1}{10}\left\{6-5\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

18

解答　(1)　$p_n+q_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$　(2)　$p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$　(3)　$p_n=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

解説

(1)　p_n+q_n は，T_n を5で割った余りが1，2，3，4のいずれかである確率，すなわち T_n が5で割り切れない確率である。

T_n が5で割り切れないのは，n 回目までに出た目がすべて5以外の目の場合であるから　$p_n+q_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2)　T_{n+1} を5で割った余りが1である場合を，次の場合に分けて考える。

[1]　T_n を5で割った余りが1のとき

0以上の整数 k を用いて $T_n=5k+1$ とおける。

このとき　$T_n\cdot1=5k+1$，$T_n\cdot2=5\cdot2k+2$，

$T_n\cdot3=5\cdot3k+3$，$T_n\cdot4=5\cdot4k+4$，

$T_n\cdot5=5(5k+1)$，$T_n\cdot6=5(6k+1)+1$

であるから，$T_{n+1}=T_n\cdot X_{n+1}$ を5で割った余りが1となる X_{n+1} は　$X_{n+1}=1$，6

[1]と同様にして，T_n を5で割った余りが2，3，4のときについて，T_{n+1} を5で割った余りが1となる X_{n+1} を求めると

[2]　T_n を5で割った余りが2のとき　$X_{n+1}=3$

[3]　T_n を5で割った余りが3のとき　$X_{n+1}=2$

[4]　T_n を5で割った余りが4のとき　$X_{n+1}=4$

[1]～[4]から　$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{1}{3}+q_n\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-p_n\right\}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(3)　$r_n=\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ とおくと　$p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n r_n$

これを(2)の結果に代入すると　$\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}r_{n+1}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n r_n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

両辺に $\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$ を掛けると　$r_{n+1}=\frac{1}{5}r_n+\frac{1}{5}$

よって　$r_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{5}\left(r_n-\frac{1}{4}\right)$

ここで　$r_1=\frac{6}{5}\times p_1=\frac{6}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{5}$

ゆえに，数列 $\left\{r_n-\frac{1}{4}\right\}$ は，初項 $r_1-\frac{1}{4}=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$，公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列であるから　$r_n-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

よって　$r_n=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{4}$

したがって　$p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n r_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{4}\right\}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

19

解答　$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{2}{7}$

解説

n 秒後に X の x 座標が0，1，2である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n

(ただし，$p_0=1$，$q_0=0$，$r_0=0$) とする。

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が0であるのは，次の[1]，[2]の場合である。

[1]　n 秒後に X の x 座標が0で，次の1秒で y 軸方向に移動するとき

[2]　n 秒後に X の x 座標が1で，次の1秒で x 軸方向に -1 移動するとき

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が1であるのは，次の[3]，[4]，[5]の場合である。

[3]　n 秒後に X の x 座標が0で，次の1秒で x 軸方向に1移動するとき

[4]　n 秒後に X の x 座標が1で，次の1秒で y 軸方向に移動するとき

[5]　n 秒後に X の x 座標が2で，次の1秒で x 軸方向に -1 移動するとき

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が2であるのは，次の[6]，[7]の場合である。

[6]　n 秒後に X の x 座標が1で，次の1秒で x 軸方向に1移動するとき

[7]　n 秒後に X の x 座標が2で，次の1秒で y 軸方向に移動するとき

よって　$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n$　……①

$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{2}r_n$　……②

$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{2}r_n$　……③

$p_n+q_n+r_n=1$ であるから，②から

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+r_n)+\frac{1}{3}q_n=\frac{1}{2}(1-q_n)+\frac{1}{3}q_n=-\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{2}$$

この式を変形すると　$q_{n+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(q_n-\frac{3}{7}\right)$

$q_0-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}$ から　$q_n-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$

よって　$q_n=\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

$p_n+r_n=1-q_n$ であるから　$p_n+r_n=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$　……④

①−③ から　$p_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n-r_n)$

$p_0-r_0=1$ から　$p_n-r_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$　……⑤

④+⑤ から　$2p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{4}{7}$

よって，求める確率 p_n は　$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{2}{7}$

20

解答　(1)　$a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=1$，$a_4=\frac{7}{5}$　(2)　$a_n=\frac{3n-5}{n+1}$，証明は略　(3)　証明は略

(4)　証明は略　(5)　$n=3,\ 7$

解説

(1)　$a_2=\frac{5a_1+9}{-a_1+11}=\frac{5\cdot(-1)+9}{-(-1)+11}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,

$$a_3=\frac{5a_2+9}{-a_2+11}=\frac{5\cdot\frac{1}{3}+9}{-\frac{1}{3}+11}=\frac{32}{32}=1,$$

$$a_4=\frac{5a_3+9}{-a_3+11}=\frac{5\cdot1+9}{-1+11}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

(2)　$a_1=\frac{-2}{2}$，$a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{4}{4}$，$a_4=\frac{7}{5}$ であるから，

a_n の分母は $n+1$，分子は $-2+(n-1)\cdot3=3n-5$

と推測される。

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\frac{3n-5}{n+1}$　……①　と推測される。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=\frac{3\cdot1-5}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1$ から，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つ，すなわち $a_k=\frac{3k-5}{k+1}$ と仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$a_{k+1}=\frac{5a_k+9}{-a_k+11}=\frac{5\cdot\frac{3k-5}{k+1}+9}{-\frac{3k-5}{k+1}+11}=\frac{24k-16}{8k+16}=\frac{3k-2}{k+2}=\frac{3(k+1)-5}{(k+1)+1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(3)　(2) より　$a_n=\frac{3n-5}{n+1}=\frac{3(n+1)-8}{n+1}=3-\frac{8}{n+1}$

すべての自然数 n について，$\frac{8}{n+1}>0$ であるから　$3-\frac{8}{n+1}<3$

よって　$a_n<3$

(4)　$a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)-5}{(n+1)+1}-\frac{3n-5}{n+1}=\frac{(3n^2+n-2)-(3n^2+n-10)}{(n+2)(n+1)}$

$$=\frac{8}{(n+2)(n+1)}$$

すべての自然数 n について，$\frac{8}{(n+2)(n+1)}>0$ であるから　$a_{n+1}-a_n>0$

よって　$a_n<a_{n+1}$

(5)　$a_1=-1$，(3) より $a_n<3$ であり，(4) より a_n は単調に増加するから，a_n が自然数となるとき，a_n は 1 または 2 である。

$a_n=1$ のとき　$\frac{3n-5}{n+1}=1$ を解くと　$3n-5=n+1$　よって　$n=3$

$a_n=2$ のとき　$\frac{3n-5}{n+1}=2$ を解くと　$3n-5=2(n+1)$　よって　$n=7$

したがって，a_n が自然数となる n は　$n=3,\ 7$

21

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　${}_7C_1={}_7C_6=7$，　${}_7C_2={}_7C_5=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$，　${}_7C_3={}_7C_4=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

よって，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ に対して，${}_7C_k$ は 7 の倍数である。

(2)　$1\leqq k\leqq p-1$ のとき

$${}_pC_k=\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{p}{k}\cdot\frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!}$$

$$=\frac{p}{k}{}_{p-1}C_{k-1}$$

よって　$k\cdot{}_pC_k=p\cdot{}_{p-1}C_{k-1}$

p は素数であるから，k と p は互いに素である。

したがって，${}_pC_k$ は p の倍数である。

(3)　「n^7-n は 7 の倍数である」を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき

$1^7-1=0$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると，$k^7-k=7m$（m は整数）　……② とおける。

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$(k+1)^7-(k+1)=k^7+{}_7C_1k^6+{}_7C_2k^5+\cdots\cdots+{}_7C_5k^2+{}_7C_6k+1-(k+1)$$

$$={}_7C_1k^6+{}_7C_2k^5+\cdots\cdots+{}_7C_6k+7m$$

(1) より，${}_7C_1$，${}_7C_2$，……，${}_7C_6$ は 7 の倍数であるから，$(k+1)^7-(k+1)$ は 7 の倍数である。

ゆえに，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

22

解答　(1)　$f_2(x)=\frac{5}{6}x+\frac{5}{2}$，$f_3(x)=\frac{17}{18}x+\frac{11}{4}$　(2)　略

(3)　$f_n(x)=\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}x+3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1)　$x^2f_2(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_1(t)dt=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x\left(\frac{1}{2}t^2+2t\right)dt$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\left[\frac{1}{6}t^3+t^2\right]_0^x=\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2$$

よって　$f_2(x)=\frac{5}{6}x+\frac{5}{2}$

$$x^2f_3(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_2(t)dt=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x\left(\frac{5}{6}t^2+\frac{5}{2}t\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\left[\frac{5}{18}t^3+\frac{5}{4}t^2\right]_0^x=\frac{17}{18}x^3+\frac{11}{4}x^2$$

よって　$f_3(x)=\frac{17}{18}x+\frac{11}{4}$

(2)　「$f_n(x)$ は実数 $a_n\ (>0)$，b_n を用いて $f_n(x)=a_nx+b_n$ と表される」　……①

を数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$f_1(x)=\frac{1}{2}x+2$ であるから，$a_1=\frac{1}{2}$，$b_1=2$ とすれば，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$f_k(x)=a_kx+b_k$（$a_k\ (>0)$，b_k は実数）とおける。

$n=k+1$ のときを考えると

$$x^2f_{k+1}(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_k(t)\,dt=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x(a_kt^2+b_kt)\,dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\left[\frac{a_k}{3}t^3+\frac{b_k}{2}t^2\right]_0^x=\left(\frac{a_k}{3}+\frac{2}{3}\right)x^3+\left(\frac{b_k}{2}+\frac{3}{2}\right)x^2$$

よって　$f_{k+1}(x)=\left(\frac{a_k}{3}+\frac{2}{3}\right)x+\frac{b_k}{2}+\frac{3}{2}$

ゆえに，$a_{k+1}=\frac{a_k}{3}+\frac{2}{3}$，$b_{k+1}=\frac{b_k}{2}+\frac{3}{2}$ とすれば，$a_{k+1}>0$ で，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つから，$f_n(x)$ は x の 1 次式である。

(3)　(2) から　$a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+\frac{2}{3}$

これを変形すると　$a_{n+1}-1=\frac{1}{3}(a_n-1)$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=-\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n-1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$a_n=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

また，(2) から　$b_{n+1}=\frac{b_n}{2}+\frac{3}{2}$

これを変形すると　$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$

よって，数列 $\{b_n-3\}$ は初項 $b_1-3=-1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-3=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$b_n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$f_n(x)=\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}x+3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

23

解答 (1) $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=10$, $a_5=15$, $a_6=21$; $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (2) 略

解説

(1) $a_2=3a_1=3$

$$a_3=\frac{3}{2}(a_1+a_2)=\frac{3}{2}(1+3)=6$$

$$a_4=\frac{3}{3}(a_1+a_2+a_3)=1+3+6=10$$

$$a_5=\frac{3}{4}(a_1+\cdots\cdots+a_4)=\frac{3}{4}(1+3+6+10)=15$$

$$a_6=\frac{3}{5}(a_1+\cdots\cdots+a_5)=\frac{3}{5}(1+3+6+10+15)=21$$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと　$b_n=a_{n+1}-a_n$

$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=10$, $a_5=15$, $a_6=21$ であるから

$b_1=2$, $b_2=3$, $b_3=4$, $b_4=5$, $b_5=6$

ゆえに，$b_n=n+1$ と推定される．

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ と推定される．

(2) $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ……[A] とおく．

[1] $n=1$ のとき　$a_1=1$ であるから，[A] は成り立つ．

[2] $n\leqq k$ のとき，[A] が成り立つと仮定する．

このとき　$a_{k+1}=\dfrac{3}{k}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)=\dfrac{3}{k}\displaystyle\sum_{m=1}^{k}\frac{m(m+1)}{2}$

$$=\frac{3}{k}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}\right\}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも [A] は成り立つ．

[1], [2] から，すべての自然数 n について，[A] は成り立つ．

24

解答 (1) $a+b=2$ (2) [略]

解説

(1) $a+b=p, ab=q$ とおくと，a, b は $t^2-pt+q=0$ の解である．

a, b が実数であるから　$p^2-4q\geqq 0$ …… ①

$a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ から　$p^2-2q=16$ …… ②, $p^3-3pq=44$ …… ③

② から　$2q=p^2-16$ …… ②′

よって，① から　$p^2-2(p^2-16)\geqq 0$　　ゆえに　$|p|\leqq 4\sqrt{2}$

②′ と ③ から　$2p^3-3p(p^2-16)=88$　　ゆえに　$p^3-48p+88=0$

よって　$(p-2)(p^2+2p-44)=0$

ここで　$f(p)=p^2+2p-44$ とおくと，$y=f(p)$ のグラフは軸が $p=-1$ であり，

$f(4\sqrt{2})=32+8\sqrt{2}-44=-12+8\sqrt{2}=4(2\sqrt{2}-3)<0$ であるから，

$f(p)=0$ は $|p|\leqq 4\sqrt{2}$ においては解をもたない．

一方，$p=2$ は適する．

ゆえに　$a+b=2$　　このとき　$ab=q=-6$

(2) [1] $n=2, 3$ のとき

$a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ であるから，成り立つ．

[2] $n=k, k+1$ (ただし，k は 2 以上の整数) のとき a^n+b^n が 4 の倍数であるとする．

$n=k+2$ のとき

$a^{k+2}+b^{k+2}=(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)=2(a^{k+1}+b^{k+1})+6(a^k+b^k)$ となり，$a^{k+2}+b^{k+2}$ は 4 の倍数となる．

[1], [2] から，2 以上のすべての整数 n について，a^n+b^n は 4 の倍数となる．

1

解答 $\dfrac{4^n-1}{2n+1}$

解説

$$\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}=\frac{1}{2k+2}\cdot\frac{(2n)!}{(2k+1)!\{2n-(2k+1)\}!}$$

$$=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{(2k+2)!\{(2n+1)-(2k+2)\}!}=\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k+2}}{2n+1}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k+2}}{2n+1}=\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_2+{}_{2n+1}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}}{2n+1}$ …… ①

ここで，二項定理により

$$(1+1)^{2n+1}={}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+{}_{2n+1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}$$

$$(1-1)^{2n+1}={}_{2n+1}\mathrm{C}_0-{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+{}_{2n+1}\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}-{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}$$

辺々加えて　$2^{2n+1}=2({}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n})$

よって　${}_{2n+1}\mathrm{C}_2+{}_{2n+1}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}=4^n-1$

これを ① に代入して　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}=\frac{4^n-1}{2n+1}$

2

解答 (1) $\dfrac{1}{3}n(n+1)(n-1)$ (2) n, $n-1$, $n-2$, ……, 1

解説

(1) $(x_k-k)^2+(x_k-n+k-1)^2$

$$=x_k{}^2-2kx_k+k^2+x_k{}^2-2(n-k+1)x_k+(n-k+1)^2$$

$$=2x_k{}^2+k^2-2(n+1)x_k+(n-k+1)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

x_1, x_2, ……, x_n は 1, 2, ……, n を並べ替えたものであるから

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}k$　　また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$

① から

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2+\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2+\sum_{k=1}^{n}k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

(2) (1) の結果から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2+\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2$ は，x_1, x_2, ……, x_n の並べ方によらず一定である。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2\geqq 0$ が成り立つ。

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2=0$ すなわち　$x_k=n-k+1$

($k=1$, 2, ……, n) のとき最大になる。

よって，求める並べ方は　n, $n-1$, $n-2$, ……, 1

3

解答 (1) 5050 番目 (2) n (3) $\dfrac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$

解説

並べられた玉に書かれた数字を数列と考え，次のように，第 n 群に n 個の数が含まれるように群に分ける。

$$\left|1\right|1\ \ 2\left|1\ \ 2\ \ 3\right|1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\left|1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\right|1\ \ 2\ \ \cdots\cdots$$

(1) 初項から第 n 群の最終項までの数の総数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ …… ①

数列に数 100 が最初に現れるのは，第 100 群の最後の項である。

① において $n=100$ とすると $\dfrac{100\cdot 101}{2}=5050$

よって，数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは 5050 番目

(2) $2n^2$ 番目の数が第 l 群にあるとすると，① より $\dfrac{(l-1)l}{2}<2n^2\leqq\dfrac{l(l+1)}{2}$

よって $l(l-1)<4n^2\leqq l(l+1)$ ……②

$2n(2n-1)=4n^2-2n<4n^2$，$2n(2n+1)=4n^2+2n>4n^2$ であるから，② を満たす整数 l は $l=2n$

ゆえに，$2n^2$ 番目の数は第 $2n$ 群にある。

第 $2n-1$ 群までの数の総数は $\dfrac{(2n-1)\cdot 2n}{2}=2n^2-n$

$2n^2-(2n^2-n)=n$ であるから，$2n^2$ 番目の数は第 $2n$ 群の n 番目である。

したがって，$2n^2$ 番目の玉に書かれている数字は n

(3) $2n^2$ 番目の数は第 $2n$ 群の n 番目であるから，袋の中には p $(1\leqq p\leqq n)$ と書かれた玉が $2n-p+1$ 個，q $(n+1\leqq q\leqq 2n-1)$ と書かれた玉が $2n-q$ 個含まれている。

袋の中から 2 つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出すのは，$n\geqq 3$ のとき $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}{}_{2n-p+1}\mathrm{C}_2+\sum_{q=n+1}^{2n-2}{}_{2n-q}\mathrm{C}_2$ (通り)

ここで $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}{}_{2n-p+1}\mathrm{C}_2+\sum_{q=n+1}^{2n-2}{}_{2n-q}\mathrm{C}_2$

$$={}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2}\mathrm{C}_2$$

$$=\sum_{i=2}^{2n}{}_{i}\mathrm{C}_2-{}_{n}\mathrm{C}_2=\sum_{i=2}^{2n}\frac{i(i-1)}{2\cdot 1}-\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}(i^2-i)-\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{2n(2n+1)}{2}\right\}-\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-n(2n+1)\right\}-\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(8n^2-3n+1)}{6}\quad\cdots\cdots ③$$

$n=1$ のとき，玉は ①① で，同じ数を取り出すのは ${}_2\mathrm{C}_2=1$ (通り)

$n=2$ のとき，玉は ①②①②③①② で，同じ数を取り出すのは

${}_4\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2=6+3=9$ (通り)

よって，③ の式は $n=1$，2 のときも成立する。

袋の中から 2 個の玉を取り出す取り出し方は

$${}_{2n^2}\mathrm{C}_2=\frac{2n^2(2n^2-1)}{2\cdot 1}=n^2(2n^2-1)\ (通り)$$

よって，求める確率は $\dfrac{\dfrac{n(8n^2-3n+1)}{6}}{n^2(2n^2-1)}=\dfrac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$

4

解答 (1) $\dfrac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$ (2) $S_k=\dfrac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}$ (3) $k=202$

解説

(1) 第 k 群は $(2k-1)$ 個の項を含むから，$k\geqq 2$ のとき，第 $(k-1)$ 群までの項数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-3)=\frac{1}{2}(k-1)\{1+(2k-3)\}=(k-1)^2$$

よって，第 k 群の最初の項は $(k-1)^2+1=k^2-2k+2$ 番目の項である。

これは $k=1$ のときも成り立つ。

したがって，第 k 群の最初の項は $a_{k^2-2k+2}=\dfrac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$

(2) 第 k 群の最後の項は k^2 番目の項である。

よって，第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k は

$$S_k=\sum_{m=k^2-2k+2}^{k^2}\frac{1}{m(m+1)}=\sum_{m=k^2-2k+2}^{k^2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{k^2-2k+2}-\frac{1}{k^2-2k+3}\right)+\left(\frac{1}{k^2-2k+3}-\frac{1}{k^2-2k+4}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k^2-2k+2}-\frac{1}{k^2+1}=\frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}$$

(3) 与えられた不等式に (2) の結果を代入すると

$$(k^2+1)\cdot\frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}\leqq\frac{1}{100}$$

整理すると $k^2-202k+102\geqq 0$

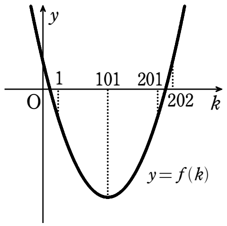
ここで，$f(k)=k^2-202k+102$ とすると，$f(k)\geqq 0$ を満たす最小の自然数 k を求めればよい。

$f(0)=102>0$，$f(1)=-99<0$

また，$f(k)=(k-101)^2-101^2+102$ より，$y=f(k)$ のグラフの軸は $k=101$ であるから，$y=f(k)$ のグラフの概形は右の図のようになり，

$f(201)=f(1)<0$，$f(202)=f(0)>0$ である。

よって，与えられた不等式を満たす最小の自然数 k は $k=202$



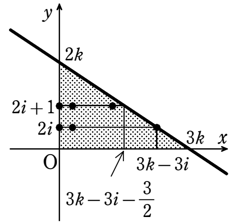
5

解答 (1) $a_k=3k^2+3k+1$ (2) $b_n=(n+1)^3$

解説

(1) $k=0$ のとき，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leqq 0$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のみであるから $a_0=1$

$k\geqq 1$ のとき，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leqq k$ の表す領域 D は，右の図のアミ点部分である。



a_k は領域 D に属する格子点 (x，y がともに整数である点) の個数である。

[1] 直線 $y=2i$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ 上の格子点について，x 座標は

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 3k-3i$

であり，$(3k-3i+1)$ 個ある。

[2] 直線 $y=2i+1$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k-1)$ 上の格子点について，x 座標は

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 3k-3i-2$

であり，$(3k-3i-1)$ 個ある。

[1]，[2] から

$$a_k=\sum_{i=0}^{k}(3k-3i+1)+\sum_{i=0}^{k-1}(3k-3i-1)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)\{(3k+1)+1\}+\frac{1}{2}k\{(3k-1)+2\}$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)+\frac{1}{2}k(3k+1)=3k^2+3k+1$$

このとき，$k=0$ とすると $a_0=1$

よって，$k=0$ のときも成り立つ。

以上から $a_k=3k^2+3k+1$

(2) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+z\leqq n$ を満たす整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ について，$0\leqq z\leqq n$ である。

$z=j$ $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ のとき，x，y は

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leqq n-j$

を満たすから，組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は (1) より $3(n-j)^2+3(n-j)+1$

したがって

$$b_n=\sum_{j=0}^{n}\{3(n-j)^2+3(n-j)+1\}$$

$$=\sum_{l=0}^{n}(3l^2+3l+1)\qquad (n-j=l\ とおく)$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{n(2n+1)+3n+2\}=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+4n+2)=(n+1)^3$$

6

解答 (1) $b_n=2^{2n-1}+3\cdot 2^{3n-2}$ (2) $n=3k-1$，$3k$ (kは自然数)，証明は略

解説

(1) $\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+b_n & \cdots\cdots ①\\ b_{n+1}=4b_n+c_n & \cdots\cdots ②\\ c_{n+1}=8c_n & \cdots\cdots ③\end{cases}$

③ から $c_n=8^{n-1}c_1=8^{n-1}\cdot 24=3\cdot 8^n$

これと ② から $b_{n+1}=4b_n+3\cdot 8^n$

両辺を 8^{n+1} で割ると　$\dfrac{b_{n+1}}{8^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b_n}{8^n}+\dfrac{3}{8}$

$\dfrac{b_n}{8^n}=d_n$ とおくと　$d_{n+1}=\dfrac{1}{2}d_n+\dfrac{3}{8}$

変形すると　$d_{n+1}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}\left(d_n-\dfrac{3}{4}\right)$

また　$d_1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{b_1}{8^1}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{8}{8}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

よって，数列 $\left\{d_n-\dfrac{3}{4}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$d_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n+1}}\qquad\text{すなわち}\qquad\frac{b_n}{8^n}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2^{n+1}}$$

ゆえに　$b_n=\dfrac{2^{3n}}{2^{n+1}}+\dfrac{3\cdot2^{3n}}{4}=2^{2n-1}+3\cdot2^{3n-2}$

(2)　①，②，③ の漸化式から

$$\begin{aligned}a_{n+3}-a_n&=(2a_{n+2}+b_{n+2})-a_n\\&=2(2a_{n+1}+b_{n+1})+(4b_{n+1}+c_{n+1})-a_n\\&=4a_{n+1}+6b_{n+1}+c_{n+1}-a_n\\&=4(2a_n+b_n)+6(4b_n+c_n)+8c_n-a_n\\&=7a_n+28b_n+14c_n=7(a_n+4b_n+2c_n)\end{aligned}$$

①，②，③ と $a_1=3$，$b_1=8$，$c_1=24$ から，a_n，b_n，c_n はすべての自然数 n に対して整数である。

よって，$a_n+4b_n+2c_n$ は整数であるから，$a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れる。

一方，$b_1=8$，$b_2=2^3+3\cdot2^4=56$ であるから

$a_1=3$，　$a_2=2a_1+b_1=2\cdot3+8=14=7\cdot2$，

$a_3=2a_2+b_2=2\cdot14+56=84=7\cdot12$

したがって，k を自然数とすると

a_1，a_4，a_7，……，a_{3k-2} は 7 で割ると 3 余る。

a_2，a_5，a_8，……，a_{3k-1} は 7 で割り切れる。

a_3，a_6，a_9，……，a_{3k} は 7 で割り切れる。

よって，a_n が 7 で割り切れるための n の条件は　$n=3k-1$，$3k$　（k は自然数）

7

解答　(1)　$n=1$ のとき $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，n が偶数のとき $a_n=\sqrt{3}$，

n が 3 以上の奇数のとき $a_n=-\sqrt{3}$

(2)　$2-\sqrt{3}$　　(3)　$k=4$

解説

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から　$a_2=\dfrac{2a_1}{1-{a_1}^2}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{3}$

よって　$a_3=\dfrac{2a_2}{1-{a_2}^2}=\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2}=-\sqrt{3}$

$a_4=\dfrac{2a_3}{1-{a_3}^2}=\dfrac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$

ゆえに，a_2 以降は $\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$ が繰り返される。

以上より，一般項 a_n は

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & (n=1\text{ のとき})\\ \sqrt{3} & (n\text{ が偶数のとき})\\ -\sqrt{3} & (n\text{ が 3 以上の奇数のとき})\end{cases}$$

(2)　$\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=2-\sqrt{3}$

別解　$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{12}}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{12}}$ であるから，$\tan\dfrac{\pi}{12}=x$ とおくと　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2x}{1-x^2}$

分母を払って整理すると　$x^2+2\sqrt{3}x-1=0$　　よって　$x=-\sqrt{3}\pm2$

$0<\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$x>0$ であるから　$\tan\dfrac{\pi}{12}=x=2-\sqrt{3}$

(3)　$a_n=\tan\theta_n$ とおくと　$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1-{a_n}^2}=\dfrac{2\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n}=\tan2\theta_n$

よって，$a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$ から

$a_2=\tan\left(2\cdot\dfrac{\pi}{20}\right)$，$a_3=\tan\left(2^2\cdot\dfrac{\pi}{20}\right)$，……，$a_n=\tan\left(2^{n-1}\cdot\dfrac{\pi}{20}\right)$

ゆえに，$a_{n+k}=a_n$ とすると　$\tan\left(2^{n+k-1}\cdot\dfrac{\pi}{20}\right)=\tan\left(2^{n-1}\cdot\dfrac{\pi}{20}\right)$

したがって　$2^{n+k-1}\cdot\dfrac{\pi}{20}=2^{n-1}\cdot\dfrac{\pi}{20}+l\pi$　（l は整数）

両辺に $\dfrac{20}{\pi}$ を掛けると　$2^{n+k-1}=2^{n-1}+20l$

ゆえに　$2^{n-1}(2^k-1)=20l$　　すなわち　$2^{n-3}(2^k-1)=5l$

2^{n-3} は 5 の倍数でないから，2^k-1 が 5 の倍数である。

$k=1$ のとき　$2^k-1=1$，　$k=2$ のとき　$2^k-1=3$，

$k=3$ のとき　$2^k-1=7$，　$k=4$ のとき　$2^k-1=15=5\cdot3$

よって，$a_{n+k}=a_n$ を満たす最小の自然数 k は　$k=4$

8

解答　(1)　$a_3=6$，$b_3=6$，$a_4=6$，$b_4=18$

(2)　$a_n=2^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}$，$b_n=2^n+2\cdot(-1)^n$

解説

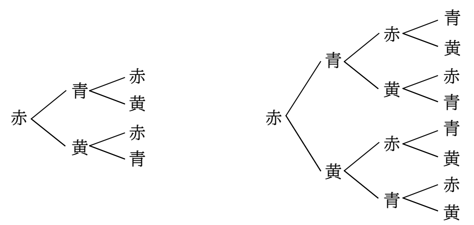
両端のマスが同じ色になる塗り方を A，両端のマスが異なる色になる塗り方を B とする。

(1)　$n=3$ のとき

左端のマスを赤で塗るとき，樹形図から A の塗り方は 2 通り，B の塗り方は 2 通りある。よって　$a_3=3\times2=6$，　$b_3=3\times2=6$

$n=4$ のとき

左端のマスを赤で塗るとき，樹形図から A の塗り方は 2 通り，B の塗り方は 6 通りある。よって　$a_4=3\times2=6$，　$b_4=3\times6=18$



(2)　$n+1$ 個のマスがあるとする。

A の塗り方になるには，左から n 個のマスの両端を異なる色とし，残りの 1 マスに左端と同じ色を塗ればよい。

ゆえに　$a_{n+1}=b_n$　……①

B の塗り方になるのは，次の [1]，[2] のいずれかである。

[1]　左から n 個のマスの両端を同じ色とし，残りの 1 マスにそれと異なる 2 色のどちらかを塗る。

[2]　左から n 個のマスの両端を異なる色とし，残りの 1 マスに両端以外の 1 色を塗る。

よって　$b_{n+1}=2a_n+b_n$　……②

①，② から　$a_{n+2}=2a_n+a_{n+1}$　($n\geqq3$)

変形して　$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$　……③

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$　……④

(1) から　$a_4+a_3=12$，$a_4-2a_3=-6$

よって，③，④ から　$a_{n+1}+a_n=2^{n-3}(a_4+a_3)=3\cdot2^{n-1}$

$a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-3}(a_4-2a_3)=-6\cdot(-1)^{n-1}$

辺々を引くと　$3a_n=3\cdot2^{n-1}+6\cdot(-1)^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=2^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}$

また，① から　$b_n=a_{n+1}=2^n+2\cdot(-1)^n$

9

解答　$\dfrac{1}{3}\{2^{n+2}-(-1)^n\}$

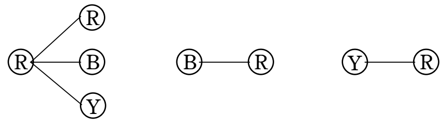
解説

求める塗り方の総数を a_n とする。

車両を赤色で塗ることを Ⓡ，青色で塗ることを Ⓑ，

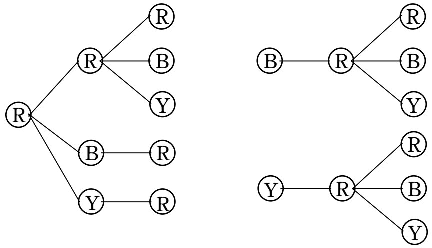
黄色で塗ることを Ⓨ で表す。

$n=2$ のとき　塗り方は次の 5 通り



よって　$a_2=5$

$n=3$ のとき　塗り方は次の 11 通り



よって　$a_3=11$

次に，$(n+2)$ 両を塗る場合を考える。このとき，先頭車両の色の塗り方で次の [1]，[2] の場合に分かれる。

[1]　先頭車両を赤色で塗る場合

残りの $(n+1)$ 両の色の塗り方は　a_{n+1} 通り

[2]　先頭車両を青色または黄色で塗る場合

2 両目は赤色を塗り，残りの n 両の塗り方は a_n 通りあるから，全部で　$2a_n$ 通り

したがって　$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

これを変形すると　$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$

よって　$a_{n+1}+a_n=2^{n-2}(a_3+a_2)$

$a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-2}(a_3-2a_2)$

$a_2=5$，$a_3=11$ から　$a_{n+1}+a_n=2^{n+2}$，$a_{n+1}-2a_n=(-1)^n$

辺々引いて　$3a_n=2^{n+2}-(-1)^n$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3}\{2^{n+2}-(-1)^n\}$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　(2)　$\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1)　n 回さいころを投げて，左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とおく。

$(n+2)$ 回さいころを投げて，左から $(n+2)$ 番目の文字が A となる場合を，次の場合に分けて考える。

[1]　1 回目に 1，2，3 のいずれかの目が出るとき

$\mathrm{A\ A}\underbrace{\square\square\cdots\cdots\square\square\ \mathrm{A}}_{n\text{ 文字}}$ となるから，この確率は　$\dfrac{1}{2}p_n$

[2]　1 回目に 4，5，6 のいずれかの目が出るとき

$\bigcirc\ \underbrace{\square\square\cdots\cdots\square\square\ \mathrm{A}}_{(n+1)\text{ 文字}}$ となるから，この確率は　$\dfrac{1}{2}p_{n+1}$

[1]，[2] から　$p_{n+2}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}p_{n+1}$

この式を変形すると

$$p_{n+2}-p_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n)\quad\cdots\cdots ①$$

$$p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n\quad\cdots\cdots ②$$

また，1 回さいころを投げて，左から 1 番目の文字が A となるのは，1 回目に 1，2，3 のいずれかの目が出るときであるから　$p_1=\dfrac{1}{2}$

2 回さいころを投げて，左から 2 番目の文字が A となるのは，次の場合である。

[1]　1 回目に 1，2，3 のいずれかの目が出るとき

[2]　1 回目に 4，5，6 のいずれかの目が出て，
2 回目に 1，2，3 のいずれかの目が出るとき

よって　$p_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

ゆえに，① より，数列 $\{p_{n+1}-p_n\}$ は初項 $p_2-p_1=\dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから　$p_{n+1}-p_n=\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　$\cdots\cdots ③$

② より，数列 $\left\{p_{n+1}+\dfrac{1}{2}p_n\right\}$ は初項 $p_2+\dfrac{1}{2}p_1=1$，公比 1 の等比数列であるから

$$p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=1\cdot 1^{n-1}=1\quad\cdots\cdots ④$$

③，④ から　$\dfrac{3}{2}p_n=1-\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　よって　$p_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

すなわち　$p_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

したがって，求める確率は　$\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，n 回さいころを投げて，左から $(n-1)$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を q_n とおく。

$(n+2)$ 回さいころを投げて，左から $(n+1)$ 番目の文字が A で，かつ $(n+2)$ 番目の文字が B となる確率を，(1) と同様に考えると　$q_{n+2}=\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{2}q_{n+1}$

変形すると　$q_{n+2}-q_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(q_{n+1}-q_n)$　$\cdots\cdots ⑤$

$$q_{n+2}+\frac{1}{2}q_{n+1}=q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n\quad\cdots\cdots ⑥$$

また，文字 A が書かれるときは，必ず 2 文字続けて文字 A が書かれるから，2 回さいころを投げて，左から 1 番目の文字が A となるとき，左から 2 番目の文字も必ず A となる。

よって　$q_2=0$

3 回さいころを投げて，左から 2 番目の文字が A で，かつ 3 番目の文字が B となるのは，1 回目に 1，2，3 のいずれかの目が出て，2 回目に 4 の目が出るときであるから

$$q_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

ゆえに，⑤ から　$q_{n+1}-q_n=(q_3-q_2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}=\dfrac{1}{12}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$　$\cdots\cdots ⑦$

⑥ から　$q_{n+1}+\dfrac{1}{2}q_n=\left(q_3+\dfrac{1}{2}q_2\right)\cdot 1^{n-2}=\dfrac{1}{12}$　$\cdots\cdots ⑧$

⑦，⑧ から　$\dfrac{3}{2}q_n=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$　　よって　$q_n=\dfrac{1}{18}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$

すなわち　$q_n=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって，求める確率は　$\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\boxed{11}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　3

解説

(1)　与えられた漸化式から　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)^2$

よって　$b_{n+1}=3b_n{}^2$　$\cdots\cdots ①$

また　$b_1=a_2-a_1=2$

$b_1=2$，① から　$b_n\geqq 0$

(2)　「b_n の一の位の数は 2 である」を ② とする。

[1]　$n=1$ のとき

$b_1=2$ であるから，② は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，② が成り立つと仮定すると，

$b_k=10m+2$ (m は 0 以上の整数)　$\cdots\cdots ③$

とおける。

$n=k+1$ のときを考えると，①，③ から

$b_{k+1}=3b_k{}^2=3(10m+2)^2=10(30m^2+12m+1)+2$

$30m^2+12m+1$ は自然数であるから，b_{k+1} の一の位の数は 2 となり，$n=k+1$ のときにも ② は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して ② は成り立つ。

(3)　(2) から $b_k=10c_k+2$ (c_k は 0 以上の整数) とおける。

このとき　$a_{2017}=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}b_k=1+\sum_{k=1}^{2016}(10c_k+2)$

$=1+10\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}c_k+4032$

$=10\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}c_k+403\right)+3$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}c_k+403$ は自然数であるから，a_{2017} の一の位の数は　3

別解　a_n の一の位の数を d_n とする。

(2)，$a_1=1$，$a_2=3$ から　d_n：1，3，5，7，9，1，3，……

$2017=5\cdot 403+2$ であるから　$d_{2017}=3$

よって，a_{2017} の一の位の数は　3

$\boxed{12}$

解答　略

解説

$\displaystyle\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$　$\cdots\cdots ①$　とおく。

[1]　$n=1$ のとき

$S(1)=\displaystyle\sum_{p=1}^{2}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$T(1)=\displaystyle\sum_{q=1}^{1}\frac{1}{1+q}=\frac{1}{2}$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$S(k+1)=\displaystyle\sum_{p=1}^{2(k+1)}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\sum_{p=1}^{2k}\frac{(-1)^{p-1}}{p}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}$

$$=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{k+1}+\sum_{q=2}^{k}\frac{1}{k+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}$$

$$=\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{k+1+l}+\frac{1}{2(k+1)}=\sum_{l=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+l}=T(k+1)$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

13

解答　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

解説

$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n$ …… ① とおく。

すべての n について，$a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$a_3=\cos 2\theta$，$a_4=\cos 3\theta$ となることが必要条件である。

① で $n=1$ とすると，$a_3=\dfrac{3}{2}a_2-a_1$ であるから　　$\cos 2\theta=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1$

すなわち　　$2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1$

よって　　$\cos\theta(4\cos\theta-3)=0$　　　ゆえに　　$\cos\theta=0,\ \dfrac{3}{4}$

また，① で $n=2$ とすると，$a_4=\dfrac{3}{2}a_3-a_2$ であるから

$$\cos 3\theta=\frac{3}{2}\cos 2\theta-\cos\theta$$

すなわち　　$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\dfrac{3}{2}(2\cos^2\theta-1)-\cos\theta$

ゆえに　　$8\cos^3\theta-6\cos^2\theta-4\cos\theta+3=0$ …… ②

$\cos\theta=0$ を ② の左辺に代入して　　(左辺)$=3$

(右辺)$=0$ であるから，$\cos\theta=0$ のとき不適である。

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ を ② の左辺に代入して　　(左辺)$=8\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^3-6\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-4\cdot\dfrac{3}{4}+3=0$

(右辺)$=0$ であるから，$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，② は成り立つ。

よって　　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

逆に，$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，すべての n について $a_n=\cos(n-1)\theta$ …… ③ が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

③ で $n=1$ とすると　　$a_1=\cos(1-1)\theta=1$

$n=2$ のとき

③ で $n=2$ とすると　　$a_2=\cos(2-1)\theta=\cos\theta$

$a_1=1$，$a_2=\cos\theta$ であるから，$n=1$，2 のとき ③ は成り立つ。

[2]　$n=k$，$k+1$ のとき成り立つと仮定すると

$a_k=\cos(k-1)\theta$ …… ④，$a_{k+1}=\cos k\theta$ …… ⑤

$n=k+2$ のときを考えると，④，⑤ から

$$a_{k+2}=\frac{3}{2}a_{k+1}-a_k=\frac{3}{2}\cos k\theta-\cos(k-1)\theta$$

$$=\frac{3}{2}\cos k\theta-\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta$$

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ であるから

$$a_{k+2}=2\cos\theta\cos k\theta-\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta$$

$$=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta=\cos(k+1)\theta$$

よって，$n=k+2$ のときにも ③ は成り立つ。

[1]，[2] からすべての自然数 n について，③ は成り立つ。

以上から，求める $\cos\theta$ の値は　　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

14

解答　(1)　$a_1=4$，$a_2=18$　　(2)　$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$　　(3)　略　　(4)　2

解説

(1)　$a_1=p-\dfrac{1}{p}=2+\sqrt{5}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}-\dfrac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=4$

$$a_2=p^2+\frac{1}{p^2}=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2=4^2+2=18$$

(2)　$q=-\dfrac{1}{p}$ とおくと，$pq=-1$ であり，$a_n=p^n+q^n$ であるから

$$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})=a_{n+1}-a_{n-1}$$

(3)　「a_n は自然数である」を ① とする。

[1]　$n=1$，2 のとき

(1) から a_1，a_2 はともに自然数である。

よって，$n=1$，2 のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$，$k+1$ のとき，① が成り立つと仮定する。

$n=k+2$ のときを考えると，(2) から　　$a_{k+2}=a_1a_{k+1}+a_k=4a_{k+1}+a_k$

仮定により，a_{k+1}，a_k は自然数であるから，$4a_{k+1}+a_k$ は自然数である。

よって，$n=k+2$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，① は成り立つ。

(4)　(2) から　$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}$

これを繰り返すと　　$a_n=4a_{n-1}+a_{n-2}$

⋮

$a_3=4a_2+a_1$

よって，2 数 A，B の最大公約数を $(A,\ B)$ で表すと，(3) から，すべての自然数 n について a_n は自然数であるから

$$(a_{n+1},\ a_n)=(a_n,\ a_{n-1})=(a_{n-1},\ a_{n-2})=\cdots\cdots=(a_2,\ a_1)$$

$a_1=4$，$a_2=18$ であるから　　$(a_2,\ a_1)=2$

したがって，a_{n+1} と a_n の最大公約数は　　2

15

解答　略

解説

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)\ \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

[1]　$n=2$ のとき

(A) の両辺の差を考えると

$$(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\}=1-a_1-a_2+a_1a_2-1+a_1+\frac{a_2}{2}$$

$$=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=\left(a_1-\frac{1}{2}\right)a_2>0$$

よって，(A) は成り立つ。

[2]　$n=k\ (k\geqq 2)$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\ \cdots\cdots ①$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，(A) の両辺の差を考えると

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)\right\}$$

$$=(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)-a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)$$
$$-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}+\frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$=(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}$$
$$-a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)+\frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$>-a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)+\frac{a_{k+1}}{2^k}\quad(① より)$$

$$=\left\{\frac{1}{2^k}-(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)\right\}a_{k+1}$$

$\dfrac{1}{2}<a_j<1\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k+1)$ より

$$a_{k+1}>0\quad かつ\quad 0<1-a_j<\frac{1}{2}\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$$

であるから

$$\left\{\frac{1}{2^k}-(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)\right\}a_{k+1}>\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{2}\right)a_{k+1}$$

$$=\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}=0$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成り立つ。

[1]，[2] から，2 以上のすべての整数 n に対して (A) は成り立つ。