1

解答　(1)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(2)　$\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　X のとりうる値は　0，1，2，3

X がそれぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},\quad P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8},$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8},\quad P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

よって，求める確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(2)　(1) の表から

$$P(2\leqq X\leqq 3)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

2

解答　5

解説

X のとりうる値は 0，10，20，30 である。

$$P(X=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36},\quad P(X=10)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$$

$$P(X=20)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36},\quad P(X=30)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

X	0	10	20	30	計
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

したがって，X の期待値は

$$E(X)=0\times\frac{25}{36}+10\times\frac{5}{36}+20\times\frac{5}{36}+30\times\frac{1}{36}=\frac{180}{36}=5$$

3

解答　$V(X)=\dfrac{14}{25}$，$\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{14}}{5}$

解説

X のとりうる値は 0，1，2，3 である。

$$P(X=0)=\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{5}{30},\quad P(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{15}{30}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{9}{30},\quad P(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{30}$$

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$	1

したがって　$E(X)=0\times\dfrac{5}{30}+1\times\dfrac{15}{30}+2\times\dfrac{9}{30}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{36}{30}=\dfrac{6}{5}$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{30}+1^2\times\frac{15}{30}+2^2\times\frac{9}{30}+3^2\times\frac{1}{30}=\frac{60}{30}=2$$

よって，X の分散は　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{14}{25}$

また，X の標準偏差は　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{14}{25}}=\dfrac{\sqrt{14}}{5}$

4

解答　期待値 $\dfrac{7}{5}$，分散 $\dfrac{36}{25}$，標準偏差 $\dfrac{6}{5}$

解説

X のとりうる値は 0，1，2 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10},\quad P(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

ゆえに，X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ は

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$$

$$V(X)=\left(0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{6}{10}+2^2\cdot\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{3}{5}$$

よって，求める $Y=-2X+3$ の期待値 $E(Y)$，分散 $V(Y)$，標準偏差 $\sigma(Y)$ は

$$E(Y)=E(-2X+3)=-2E(X)+3=-2\cdot\frac{4}{5}+3=\frac{7}{5}$$

$$V(Y)=V(-2X+3)=(-2)^2V(X)=4\cdot\frac{9}{25}=\frac{36}{25}$$

$$\sigma(Y)=\sigma(-2X+3)=|-2|\sigma(X)=2\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$$

5

解答　$\dfrac{75}{4}$

解説

硬貨を 3 回投げ終わったときの表の出た回数を X とする。

$T=3X-2(3-X)=5X-6$

$X=r$ となる確率 $P(X=r)$ は

$$P(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{3-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって，X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$ は

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=\left\{0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}\right\}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

ゆえに　$V(T)=V(5X-6)=5^2V(X)=25\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{75}{4}$

6

解答

$X \backslash Y$	1	2	計
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{8}{12}$
2	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$
計	$\frac{8}{12}$	$\frac{4}{12}$	1

解説

$$P(X=1,\ Y=1)=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{30}{72}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=1,\ Y=2)=\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{18}{72}=\frac{3}{12}$$

$$P(X=2,\ Y=1)=\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{18}{72}=\frac{3}{12}$$

$$P(X=2,\ Y=2)=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{6}{72}=\frac{1}{12}$$

よって，X，Y の同時分布は右のようになる。

$X \backslash Y$	1	2	計
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{8}{12}$
2	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$
計	$\frac{8}{12}$	$\frac{4}{12}$	1

7

解答　(1)　従属　　(2)　独立

解説

(1)　$P(A)=\dfrac{5}{9}$，$P(B)=\dfrac{5}{9}$，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{9}$

よって　$P(A\cap B)\fallingdotseq P(A)P(B)$

したがって，2 つの事象 A，B は従属である。

(2)　$P(A)=\dfrac{13}{52}$，$P(B)=\dfrac{4}{52}$，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{52}$

よって　$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

したがって，2 つの事象 A，B は独立である。

8

解答　(1)　期待値 -1，分散 9，標準偏差 3　　(2)　-6

解説

(1)　$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-3+2=-1$

X と Y が互いに独立であるから　$V(Z)=V(X+Y)=V(X)+V(Y)=5+4=9$

よって　$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=3$

(2)　X と Y が互いに独立であるから　$E(W)=E(XY)=E(X)E(Y)=-3\cdot 2=-6$

1

解答　(1)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$	1

(2)　$\frac{45}{56}$

解説

(1)　X のとりうる値は　　$X=0,\ 1,\ 2,\ 3$

また，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56},\quad P(X=1)=\frac{{}_5C_1\times{}_3C_2}{{}_8C_3}=\frac{15}{56},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\times{}_3C_1}{{}_8C_3}=\frac{15}{28},\quad P(X=3)=\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{5}{28}$$

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$	1

(2)　$P(1\leqq X\leqq 2)=\frac{15}{56}+\frac{15}{28}=\frac{45}{56}$

2

解答　$\frac{9}{8}$

解説

玉の取り出し方は全部で　　${}_8C_3$ 通り

確率変数 X のとりうる値は　　$X=0,\ 1,\ 2,\ 3$

各値について，X がその値をとる確率を求めると

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{10}{56},\ P(X=1)=\frac{{}_5C_2\cdot{}_3C_1}{{}_8C_3}=\frac{30}{56},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_5C_1\cdot{}_3C_2}{{}_8C_3}=\frac{15}{56},\ P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

ゆえに，求める期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=0\cdot\frac{10}{56}+1\cdot\frac{30}{56}+2\cdot\frac{15}{56}+3\cdot\frac{1}{56}=\frac{63}{56}=\frac{9}{8}$$

3

解答　$E(X)=\frac{6}{5}$，$\sigma(X)=\frac{\sqrt{14}}{5}$

解説

X のとりうる値は 0，1，2，3 である。

$$P(X=0)=\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{5}{30},\qquad P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_6C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{15}{30}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_6C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{9}{30},\qquad P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$$

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$	1

したがって，X の期待値は

$$E(X)=0\times\frac{5}{30}+1\times\frac{15}{30}+2\times\frac{9}{30}+3\times\frac{1}{30}=\frac{36}{30}=\frac{6}{5}$$

また　　$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{30}+1^2\times\frac{15}{30}+2^2\times\frac{9}{30}+3^2\times\frac{1}{30}=\frac{60}{30}=2$

よって，X の分散は　　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

ゆえに，X の標準偏差は　　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{14}{25}}=\frac{\sqrt{14}}{5}$

4

解答　期待値，分散，標準偏差の順に $\frac{13}{5}$，$\frac{36}{25}$，$\frac{6}{5}$

解説

X のとりうる値は 0，1，2 である。それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}\qquad P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_0}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

よって

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{6}{10}+2^2\cdot\frac{1}{10}=1$$

ゆえに

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$$E(Y)=E(2X+1)=2E(X)+1=2\cdot\frac{4}{5}+1=\frac{13}{5}$$

$$V(Y)=V(2X+1)=2^2V(X)=4\cdot\frac{9}{25}=\frac{36}{25}$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\frac{6}{5}$$

5

解答　$E(X)=\frac{77}{3}$，$V(X)=\frac{505}{9}$

解説

１回目，２回目に出る目の数を，それぞれ X_1，X_2 とする。

1，2，3 の目が出る確率は，順に　$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}$

よって　$E(X_1)=E(X_2)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}=\frac{7}{3}$

$$V(X_1)=V(X_2)=E(X_1{}^2)-\{E(X_1)\}^2$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{2}{6}+3^2\cdot\frac{3}{6}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$X=10X_1+X_2$ であるから

$$E(X)=E(10X_1+X_2)=10E(X_1)+E(X_2)$$

$$=11E(X_1)=11\cdot\frac{7}{3}=\frac{77}{3}$$

また，X_1 と X_2 は独立であるから

$$V(X)=V(10X_1+X_2)=10^2V(X_1)+V(X_2)$$

$$=101V(X_1)=101\cdot\frac{5}{9}=\frac{505}{9}$$

6

解答

$X\backslash Y$	0	1	2	計
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
計	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

解説

１回目の試行と２回目の試行は独立である。

X のとりうる値は 0，1，2 である。

また，$X=k$ ($k=0$，1，2) となる確率は

$$P(X=k)={}_2C_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2-k}=\frac{{}_2C_k}{2^2}$$

同様に，Y のとりうる値は 0，1，2 であり，

$Y=m$ ($m=0$，1，2) となる確率は

$$P(Y=m)=\frac{{}_2C_m}{2^2}$$

よって　$P(X=k,\ Y=m)=\frac{{}_2C_k}{2^2}\times\frac{{}_2C_m}{2^2}=\frac{{}_2C_k\times{}_2C_m}{2^4}$

$(k=0,\ 1,\ 2\ ;\ m=0,\ 1,\ 2)$

したがって，求める同時分布は右のようになる。

$X\backslash Y$	0	1	2	計
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
計	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

7

解答　(1)　従属　　(2)　独立

解説

(1)　$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，　$P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，　$P(A\cap B)=\frac{3}{10}$

よって　　$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

したがって，２つの事象 A，B は従属である。

(2)　$P(A)=\frac{13}{52}$，　$P(B)=\frac{12}{52}$，　$P(A\cap B)=\frac{3}{52}$

よって　　$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

したがって，２つの事象 A，B は独立である。

$\boxed{8}$

解答　(1)　6　　(2)　6　　(3)　6

解説

(1)　$E(X)=0\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{3}=1$，$E(Y)=1\cdot\frac{3}{4}+5\cdot\frac{1}{4}=2$，$E(Z)=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=3$

よって　$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=1+2+3=6$

(2)　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=0^2\cdot\frac{2}{3}+3^2\cdot\frac{1}{3}-1^2=2$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=1^2\cdot\frac{3}{4}+5^2\cdot\frac{1}{4}-2^2=3$

$V(Z)=E(Z^2)-\{E(Z)\}^2=2^2\cdot\frac{1}{2}+4^2\cdot\frac{1}{2}-3^2=1$

X，Y，Z が互いに独立であるから

$V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)=2+3+1=6$

(3)　X，Y，Z が互いに独立であるから，(1) より

$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z)=1\times2\times3=6$

$\boxed{1}$

解答　順に　(1)　$\frac{6}{5}$，$\frac{32}{75}$　　(2)　$\frac{6}{5}$，$\frac{12}{25}$

解説

(1)　X のとりうる値は　0，1，2

X がそれぞれの値をとる確率は

$P(X=0)=\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{6}{45}$　　$P(X=1)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{24}{45}$

$P(X=2)=\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{15}{45}$

よって　X の期待値 $E(X)$ と 分散 $V(X)$ は

$E(X)=0\cdot\frac{6}{45}+1\cdot\frac{24}{45}+2\cdot\frac{15}{45}=\frac{6}{5}$

$V(X)=0^2\cdot\frac{6}{45}+1^2\cdot\frac{24}{45}+2^2\cdot\frac{15}{45}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{32}{75}$

(2)　X のとりうる値は　0，1，2

X がそれぞれの値をとる確率は

$P(X=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$　　$P(X=1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$

$P(X=2)=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

よって　X の期待値 $E(X)$ と 分散 $V(X)$ は

$E(X)=0\cdot\frac{4}{25}+1\cdot\frac{12}{25}+2\cdot\frac{9}{25}=\frac{6}{5}$

$V(X)=0^2\cdot\frac{4}{25}+1^2\cdot\frac{12}{25}+2^2\cdot\frac{9}{25}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{12}{25}$

$\boxed{2}$ [宮崎医科大]

解答　(1)　$P(X=k)=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}$　　(2)　期待値 $\frac{2}{3}(n+1)$，分散 $\frac{1}{18}(n+1)(n-2)$

解説

(1)　n 枚のカードから 2 枚を取り出す方法の総数は　${}_nC_2$ 通り

$X=k$ とすると，1 枚のカードは k で　$2\leqq k\leqq n$

このとき，もう 1 枚のカードは 1 以上 $k-1$ 以下の $k-1$ 枚の中から選ばれれるから

${}_{k-1}C_1$ 通り

よって，$2\leqq k\leqq n$ のとき　$P(X=k)=\frac{{}_{k-1}C_1}{{}_nC_2}=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}$　……①

また，$k=1$ のときは起こりえないから　$P(X=1)=0$

したがって，$k=1$ のときも ① は成り立つから，$1\leqq k\leqq n$ のとき

$P(X=k)=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}$

(2)　$E(X)=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\right\}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$

$=\frac{2}{n(n-1)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$=\frac{2(n+1)}{6(n-1)}\{(2n+1)-3\}=\frac{2}{3}(n+1)$

$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2\times\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\right\}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(k^3-k^2)$

ここで　$\sum_{k=1}^{n}(k^3-k^2)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$

$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)=\frac{1}{12}n(n-1)(n+1)(3n+2)$

よって　$E(X^2)=\frac{1}{6}(n+1)(3n+2)$

したがって　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{6}(n+1)(3n+2)-\left\{\frac{2}{3}(n+1)\right\}^2$

$=\frac{1}{18}(n+1)\{3(3n+2)-8(n+1)\}=\frac{1}{18}(n+1)(n-2)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{1}{4}$

よって　$P_A(B)=P(B)$　　ゆえに，A と B は独立。

(2)　$P(C)=\frac{3}{8}$，$P_A(C)=\frac{n(A\cap C)}{n(A)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

よって　$P_A(C)\neqq P(C)$　　ゆえに，A と C は従属。

(3)　$B\cap C=\{6\}$ であるから　$P(B\cap C)=\frac{1}{8}$

$P(B)P(C)\neqq P(B\cap C)$ であるから，B と C は従属。

$\boxed{4}$ [神戸女学院大]

解答　(1)　$\frac{4}{9}$　　(2)　$\frac{5}{14}$　　(3)　555　　(4)　15

解説

(1)　3 桁の数字の総数は　${}_9P_3=9\times8\times7=504$

そのうち，偶数の個数は，一の位が偶数であるから　$4\times{}_8P_2=4\times8\times7=224$

ゆえに，求める確率は　$\frac{224}{504}=\frac{4}{9}$

(2)　3 枚の数字の和が 3 の倍数となる 3 数の選び方は，3 の倍数 3 枚，3 で割ると 1 余る数 3 枚，3 で割ると 2 余る数 3 枚，または，それぞれから 1 枚ずつの 3 枚である．

よって，3 の倍数の総数は　$(1+1+1+3^3)\times3!=180$

ゆえに，求める確率は　$\frac{180}{504}=\frac{5}{14}$

(3)　一の位，十の位，百の位の数をそれぞれ x_1, x_2, x_3 とおくと

$E(x_1)=E(x_2)=E(x_3)=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9}k=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot9\cdot10=5$

ゆえに，3 桁の数字 $x=x_1+10x_2+100x_3$ の期待値は

$E(x)=E(x_1+10x_2+100x_3)=E(x_1)+10E(x_2)+100E(x_3)=555$

(4)　(3) と同様にして，各桁の数字の和は　$y=x_1+x_2+x_3$ から

$E(y)=E(x_1)+E(x_2)+E(x_3)=15$

1［慶応義塾大］

解答　$\dfrac{17}{4}$

解説

もらえる得点を X とし，1回目に出た目が a $(1\leqq a\leqq 5)$ 以下のとき振り直すとする。

[1]　$k\leqq a$ のとき，$X=k$ となるのは，

(1回目の目，2回目の目)$=(1,\ k)$，……，$(a,\ k)$

となる場合であるから　$P(X=k)=\dfrac{a}{6^2}$

[2]　$k\geqq a+1$ のとき，$X=k$ となるのは，

(1回目の目，2回目の目)$=(1,\ k)$，……，$(a,\ k)$

となる場合と，1回目に k の目が出て2回目は振らない場合があるから

$$P(X=k)=\frac{a}{6^2}+\frac{1}{6}$$

[1]，[2] から　$E(X)=\sum_{k=1}^{a}k\cdot\dfrac{a}{6^2}+\sum_{k=a+1}^{6}k\cdot\left(\dfrac{a}{6^2}+\dfrac{1}{6}\right)=\sum_{k=1}^{6}k\cdot\dfrac{a}{6^2}+\sum_{k=a+1}^{6}k\cdot\dfrac{1}{6}$

$$=\frac{a}{6^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(6-a)(a+1+6)=\frac{1}{12}(-a^2+6a+42)$$

$$=\frac{1}{12}\{-(a-3)^2+51\}$$

よって，$a=3$ のとき，$E(X)$ は最大値 $\dfrac{51}{12}=\dfrac{17}{4}$ をとる。

2［鹿児島大］

解答　(1)　$P(T=6)=\dfrac{1}{12}$，$P(T\geqq 0)=\dfrac{5}{6}$　　(2)　$V(X)=\dfrac{35}{12}$，$E(T)=\dfrac{7}{2}$

(3)　$a=\pm\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

解説

(1)　$T=6$ となるのは，$(X,\ Y)=(4,\ 2)$，$(5,\ 4)$，$(6,\ 6)$ のときであるから

$$P(T=6)=\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12}$$

$T<0$ となるのは，$(X,\ Y)=(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(1,\ 5)$，$(1,\ 6)$，$(2,\ 5)$，$(2,\ 6)$ のときであるから

$$P(T<0)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

よって　$P(T\geqq 0)=1-P(T<0)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

(2)　$E(X)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{6}+5\times\dfrac{1}{6}+6\times\dfrac{1}{6}$

$$=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$E(X^2)=1^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times\dfrac{1}{6}+3^2\times\dfrac{1}{6}+4^2\times\dfrac{1}{6}+5^2\times\dfrac{1}{6}+6^2\times\dfrac{1}{6}$

$$=\frac{91}{6}$$

よって　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{91}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{35}{12}$

$E(Y)=E(X)$ であるから

$$E(T)=E(2X-Y)=2E(X)-E(Y)=2\times\frac{7}{2}-\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$$

(3)　$V(Y)=V(X)=\dfrac{35}{12}$

X，Y は互いに独立であるから

$$V(T)=V(2X-Y)=2^2V(X)+(-1)^2V(Y)=4\cdot\frac{35}{12}+1\cdot\frac{35}{12}=5\cdot\frac{35}{12}$$

よって　$V(aT)=a^2V(T)=a^2\cdot 5\cdot\dfrac{35}{12}$

$V(aT)=25$ であるから　$a^2\cdot 5\cdot\dfrac{35}{12}=25$

ゆえに　$a^2=\dfrac{12}{7}$

したがって　$a=\pm\sqrt{\dfrac{12}{7}}=\pm\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

3［千葉大］

解答　(1)　$P(X=1)=P(X=-1)=\dfrac{1}{2}$

(2)

$X+Y$	-2	0	2	計
確率	a	$1-2a$	a	1

(3)　$E(X+Y)=0$，$V(X+Y)=8a$　　(4)　$a=\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$X=-1$，$Y=-1$ となる事象と $X=-1$，$Y=1$ となる事象は互いに排反であるから

$$P(X=-1)=P(X=-1,\ Y=-1)+P(X=-1,\ Y=1)$$
$$=a+\left(\frac{1}{2}-a\right)=\frac{1}{2}$$

また　$P(X=1)=1-P(X=-1)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(2)　$X+Y$ のとりうる値は　2，0，-2

$P(X+Y=-2)=P(X=-1,\ Y=-1)=a$

$P(X+Y=2)=P(X=1,\ Y=1)=a$

$P(X+Y=0)=1-P(X+Y=-2)-P(X+Y=2)=1-2a$

よって，$X+Y$ の確率分布は，下の表のようになる．

$X+Y$	-2	0	2	計
確率	a	$1-2a$	a	1

(3)　$E(X+Y)=(-2)\cdot a+0\cdot(1-2a)+2\cdot a=0$

$$V(X+Y)=E((X+Y)^2)-\{E(X+Y)\}^2$$
$$=(-2)^2\cdot a+0^2\cdot(1-2a)+2^2\cdot a-0^2=8a$$

(4)　(1) と同様にして　$P(Y=-1)=\dfrac{1}{2}$，$P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$

X と Y が互いに独立であるための条件は

$$P(X=i,\ Y=j)=P(X=i)P(Y=j)\quad(i,\ j=1,\ -1)$$

$i=1$，$j=1$ のとき　$a=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$　　　$i=1$，$j=-1$ のとき　$\dfrac{1}{2}-a=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$i=-1$，$j=1$ のとき　$\dfrac{1}{2}-a=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$　　　$i=-1$，$j=-1$ のとき　$a=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

以上により　$a=\dfrac{1}{4}$

$\boxed{1}$

解答　順に　(1)　8，4，2　　(2)　$\dfrac{7}{4}$，$\dfrac{21}{16}$，$\dfrac{\sqrt{21}}{4}$　　(3)　10，$\dfrac{10}{3}$，$\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

解説

与えられた二項分布に従う確率変数を X とする。

(1)　$E(X)=16\cdot\dfrac{1}{2}=8$

$V(X)=16\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=4$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4}=2$

(2)　$E(X)=7\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$

$V(X)=7\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{21}{16}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$

(3)　$E(X)=15\cdot\dfrac{2}{3}=10$

$V(X)=15\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{10}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

$\boxed{2}$

解答　期待値 3，分散 $\dfrac{3}{2}$，標準偏差 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解説

1 つの問題に正解する確率は　$\dfrac{1}{2}$

よって，X は二項分布 $B\left(6,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから

$E(X)=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$

$V(X)=6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{3}$

解答　順に　0.6；$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{2}{9}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

解説

$$P(0.4\leqq X\leqq 1.6)=\int_{0.4}^{1.6}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_{0.4}^{1.6}=0.6$$

$$E(X)=\int_0^2 xf(x)\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$$V(X)=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2f(x)\,dx=\int_0^2\left\{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}x\right\}dx$$

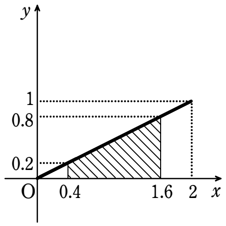
$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{8}{9}x^3+\frac{8}{9}x^2\right]_0^2=\frac{2}{9}$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

別解　[確率の求め方]

右の図から

$$P(0.4\leqq X\leqq 1.6)=\frac{1}{2}\times(0.2+0.8)\times 1.2$$
$$=0.6$$



$\boxed{4}$

解答　(1)　0.4772　　(2)　0.0082　　(3)　0.8185

解説

(1)　$P(0\leqq Z\leqq 2)=p(2)=0.4772$

(2)　$P(Z\geqq 2.4)=0.5-p(2.4)=0.5-0.4918=0.0082$

(3)　$P(-2\leqq Z\leqq 1)=p(2)+p(1)=0.4772+0.3413=0.8185$

$\boxed{5}$

解答　(1)　0.1151　　(2)　0.5670

解説

$Z=\dfrac{X-4}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$$P(X\geqq 10)=P\left(Z\geqq\frac{10-4}{5}\right)=P(Z\geqq 1.2)$$
$$=0.5-p(1.2)=0.5-0.3849=0.1151$$

$$P(1\leqq X\leqq 9)=P\left(\frac{1-4}{5}\leqq Z\leqq\frac{9-4}{5}\right)=P(-0.6\leqq Z\leqq 1)$$
$$=p(0.6)+p(1)=0.2257+0.3413=0.5670$$

$\boxed{6}$

解答　(1)　約 82 %　　(2)　約 172.5 cm 以上

解説

身長 X(cm) が正規分布 $N(170,\ 5.5^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-170}{5.5}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(1)　$X=165$ のとき $Z\fallingdotseq -0.91$ であるから

$$P(X\geqq 165)\fallingdotseq P(Z\geqq -0.91)=0.5+p(0.91)=0.5+0.3186=0.8186$$

よって，約 82 %

(2)　a cm 以上あればよいとすると

$$P(X\geqq a)=\frac{165}{500}=0.33\qquad よって\qquad P\left(Z\geqq\frac{a-170}{5.5}\right)=0.33$$

$0.33<0.5$ から $\dfrac{a-170}{5.5}>0$ で

$$0.5-p\left(\frac{a-170}{5.5}\right)=0.33\qquad すなわち\qquad p\left(\frac{a-170}{5.5}\right)=0.17$$

正規分布表より　$\dfrac{a-170}{5.5}=0.44$ であるから　　$a=172.42$

したがって，約 172.5 cm 以上あればよい。

$\boxed{7}$

解答　0.4772

解説

表の出る確率は $\dfrac{1}{2}$ で，X は二項分布 $B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$m=400\cdot\dfrac{1}{2}=200$

$\sigma=\sqrt{400\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$

よって，$Z=\dfrac{X-200}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=200$ のとき　$Z=\dfrac{200-200}{10}=0$

$X=220$ のとき　$Z=\dfrac{220-200}{10}=2$

であるから，求める確率は

$$P(200\leqq X\leqq 220)=P(0\leqq Z\leqq 2)=p(2)=0.4772$$

1

解答　順に

(1)　3，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　(2)　$\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{15}{16}$，$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　(3)　8，$\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

解説

与えられた二項分布に従う確率変数を X とする。

(1)　$E(X)=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$　　$V(X)=6\cdot\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$　　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(2)　$E(X)=5\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$　　$V(X)=5\cdot\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{15}{16}$　　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(3)　$E(X)=12\cdot\dfrac{2}{3}=8$　　$V(X)=12\cdot\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$　　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

2

解答　期待値 5，分散 $\dfrac{25}{6}$，標準偏差 $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

解説

さいころを 1 回投げて 1 の目が出る確率は　$\dfrac{1}{6}$

よって，X は二項分布 $B\left(30,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=30\cdot\frac{1}{6}=5$$

$$V(X)=30\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{25}{6}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

3

解答　(1)　$\dfrac{71}{125}$　　(2)　$E(X)=5$　　(3)　$\sigma(X)=\sqrt{5}$

解説

(1)　$P(3\leqq X\leqq 7)=\displaystyle\int_3^7 f(x)\,dx=\frac{3}{500}\int_3^7 x(10-x)dx=\frac{3}{500}\int_3^7(10x-x^2)dx$

$$=\frac{3}{500}\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_3^7=\frac{3}{500}\left\{5(7^2-3^2)-\frac{7^3-3^3}{3}\right\}=\frac{71}{125}$$

(2)　$E(X)=\displaystyle\int_0^{10}xf(x)\,dx=\int_0^{10}\frac{3}{500}x^2(10-x)dx=\frac{3}{500}\int_0^{10}(10x^2-x^3)dx$

$$=\frac{3}{500}\left[\frac{10}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=5$$

(3)　$V(X)=\displaystyle\int_0^{10}\{x-E(X)\}^2f(x)\,dx=\int_0^{10}(x-5)^2\cdot\frac{3}{500}x(10-x)dx$

$$=\frac{3}{500}\int_0^{10}(-x^4+20x^3-125x^2+250x)dx$$

$$=\frac{3}{500}\left[-\frac{x^5}{5}+5x^4-\frac{125}{3}x^3+125x^2\right]_0^{10}=5$$

ゆえに　　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{5}$

4

解答　(1)　0.4772　(2)　0.4382　(3)　0.15735　(4)　0.0082　(5)　0.8185
(6)　0.8849

解説

(1)　$P(0\leqq Z\leqq 2)=p(2)=0.4772$

(2)　$P(0\leqq Z\leqq 1.54)=p(1.54)=0.4382$

(3)　$P(1\leqq Z\leqq 3)=p(3)-p(1)=0.49865-0.3413=0.15735$

(4)　$P(Z\geqq 2.4)=0.5-p(2.4)=0.5-0.4918=0.0082$

(5)　$P(-2\leqq Z\leqq 1)=P(-2\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1)$

$$=p(2)+p(1)=0.4772+0.3413=0.8185$$

(6)　$P(-1.2\leqq Z)=P(-1.2\leqq Z\leqq 0)+P(Z\geqq 0)$

$$=p(1.2)+0.5=0.3849+0.5=0.8849$$

5

解答　(1)　0.5　(2)　0.4772　(3)　0.0215　(4)　0.8882　(5)　0.1056

解説

$Z=\dfrac{X-30}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(1)　$X=30$ のとき　$Z=\dfrac{30-30}{4}=0$

　よって　$P(X\leqq 30)=P(Z\leqq 0)=0.5$

(2)　$X=30$ のとき　$Z=0$，　$X=38$ のとき　$Z=\dfrac{38-30}{4}=2$

　よって　$P(30\leqq X\leqq 38)=P(0\leqq Z\leqq 2)=p(2)=0.4772$

(3)　$X=38$ のとき　$Z=2$，　$X=42$ のとき　$Z=\dfrac{42-30}{4}=3$

　よって　$P(38\leqq X\leqq 42)=P(2\leqq Z\leqq 3)=p(3)-p(2)=0.4987-0.4772=0.0215$

(4)　$X=20$ のとき　$Z=\dfrac{20-30}{4}=-2.5$，　$X=35$ のとき　$Z=\dfrac{35-30}{4}=1.25$

　よって　$P(20\leqq X\leqq 35)=P(-2.5\leqq Z\leqq 1.25)$

$$=p(2.5)+p(1.25)=0.4938+0.3944=0.8882$$

(5)　$X=35$ のとき　$Z=1.25$

　よって　$P(X\geqq 35)=P(Z\geqq 1.25)=0.5-p(1.25)=0.5-0.3944=0.1056$

6

解答　(1)　約 78 %　　(2)　175.5 cm 以上

解説

X が正規分布 $N(170.0,\ 6.5^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-170.0}{6.5}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(1)　$X=165$ のとき　$Z=\dfrac{165-170}{6.5}\fallingdotseq -0.77$

　よって　$P(X\geqq 165)=P(Z\geqq -0.77)=0.5+p(0.77)=0.5+0.2794=0.7794$

　よって，約 78 %

(2)　a cm 以上あればよいとすると

$$P(X\geqq a)=\frac{100}{500}=0.2$$

　よって　$P\left(Z\geqq\dfrac{a-170}{6.5}\right)=0.2$

　$0.5-p\left(\dfrac{a-170}{6.5}\right)=0.2$ より　　$p\left(\dfrac{a-170}{6.5}\right)=0.3$

　正規分布表より $\dfrac{a-170}{6.5}=0.84$ であるから　　$a=175.46$

　したがって，175.5 cm 以上あればよい。

7

解答　(1)　0.0228　　(2)　0.9544

解説

不良品の個数を X とすると，X は二項分布 $B(2500,\ 0.02)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=2500\times 0.02=50,\quad \sigma=\sqrt{2500\times 0.02\times 0.98}=7$$

よって，X は近似的に正規分布 $N(50,\ 7^2)$ に従い，$Z=\dfrac{X-50}{7}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(1)　不良品が 64 個以上である確率は

$$P(X\geqq 64)=P(Z\geqq 2)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 2)=0.5-p(2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

(2)　不良品が 36 個以上 64 個以下である確率は

$$P(36\leqq X\leqq 64)=P(-2\leqq Z\leqq 2)=2P(0\leqq Z\leqq 2)=2p(2)$$
$$=2\times 0.4772=0.9544$$

1

解答　(1)　期待値 3，分散 $\frac{3}{2}$　　(2)　$\frac{21}{2}\pi$

解説

(1)　硬貨を 1 枚投げたとき，表の出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから，X は二項分布 $B\left(6,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

よって　$E(X)=6\cdot\frac{1}{2}=3$

$$V(X)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

(2)　$Y=\pi X^2$ から　$E(Y)=\pi E(X^2)$

ここで，$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ であるから　$\frac{3}{2}=E(X^2)-3^2$

よって　$E(X^2)=\frac{3}{2}+9=\frac{21}{2}$

したがって　$E(Y)=\pi\cdot\frac{21}{2}=\frac{21}{2}\pi$

2

解答　$a=20$，$n=16$

解説

1 回の操作で赤玉を取り出す確率は $\frac{a}{100}$ であるから，$X=r$ となる確率 $P(X=r)$ は

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{a}{100}\right)^r\left(1-\frac{a}{100}\right)^{n-r}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

よって，X は二項分布 $B\left(n,\ \frac{a}{100}\right)$ に従う。

X の期待値が $\frac{16}{5}$，分散が $\frac{64}{25}$ であるから

$$\frac{na}{100}=\frac{16}{5},\quad n\cdot\frac{a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)=\frac{64}{25}$$

ゆえに　$na=320$　……①，$na(100-a)=25600$　……②

また，$0<\frac{a}{100}<1$ から　$0<a<100$　……③

① を ② に代入して　$320(100-a)=25600$

これを解いて　$a=20$　　これは ③ を満たす。

① から　$n=16$　　よって　$a=20$，$n=16$

3 [琉球大]

解答　0.2119

解説

さいころを 100 回投げたとき，1 点，100 点，0 点を得点する回数をそれぞれ x，y，z とすると，合計点は　$x+100y+0\cdot z=x+100y$

この値を 100 で割った余り x が X である。

すなわち，X は 3，4，5 の目が出る回数で

$$P(X=r)={}_{100}\mathrm{C}_r\left(\frac{3}{6}\right)^r\left(1-\frac{3}{6}\right)^{100-r}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 100)$$

よって，確率変数 X は二項分布 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

ゆえに　平均　$m=100\times\frac{1}{2}=50$，　標準偏差　$\sigma=\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=5$

$n=100$ は十分に大きいから，この二項分布は正規分布 $N(50,\ 5^2)$ で近似される。

よって，$Z=\frac{X-50}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから

$$P(X\leqq 46)=P\left(Z\leqq\frac{46-50}{5}\right)=P(Z\leqq -0.8)=0.5-p(0.8)$$
$$=0.5-0.2881=0.2119$$

4 [旭川医科大]

解答　0.6247

解説

AB 型の人数 X は二項分布 $B(400,\ 0.1)$ に従う。

よって　平均　$m=400\times 0.1=40$

標準偏差　$\sigma=\sqrt{400\times 0.1\times 0.9}=6$

$n=400$ は十分大きいから，この X の分布は正規分布 $N(40,\ 6^2)$ で近似される。

よって，$Z=\frac{X-40}{6}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

ゆえに　$P(37\leqq X\leqq 49)=P\left(\frac{37-40}{6}\leqq Z\leqq\frac{49-40}{6}\right)$

$$=P(-0.5\leqq Z\leqq 1.5)=p(0.5)+p(1.5)$$
$$=0.1915+0.4332=0.6247$$

5

解答　16 粒

解説

母集団は正規分布 $N(0.05,\ 0.2^2)$ に従うから，大きさ n の標本の標本平均は正規分布 $N\left(0.05,\ \frac{0.2^2}{n}\right)$ に従う。

よって，標準偏差が 5 % 以下のとき　$\frac{0.2}{\sqrt{n}}\leqq 0.05$　　ゆえに　$n\geqq 16$

したがって，少なくとも 16 粒必要である。

1 [鹿児島大]

解答　(1)　平均 $\frac{nr}{100}$，標準偏差 $\frac{\sqrt{nr(100-r)}}{100}$　　(2)　$r=20, n=16$　　(3)　$b=20$

解説

(1)　1 回の操作で赤玉を取り出す確率は $\frac{r}{100}$ であり，X は二項分布 $B\left(n, \frac{r}{100}\right)$ に従う．

よって，X の平均　$E(X)=n\times\frac{r}{100}=\frac{nr}{100}$　答

X の標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{n\times\frac{r}{100}\left(1-\frac{r}{100}\right)}=\frac{\sqrt{nr(100-r)}}{100}$　答

(2)　条件から　$\frac{nr}{100}=\frac{16}{5}$ ……①，$\frac{\sqrt{nr(100-r)}}{100}=\frac{8}{5}$ ……②

① から　$nr=320$　　ゆえに，② から　$320(100-r)=160^2$

よって　$100-r=80$　　したがって　$r=20$　　このとき　$n=16$　答

(3)　(2) より，16 回目に初めて青玉が取り出されることから，15 回目までは赤玉か白玉のいずれかが取り出される．

よって，赤玉を取り出した回数 Y は，二項分布 $B\left(15, \frac{r}{r+w}\right)$ に従う．

条件から　$E(Y)=15\times\frac{r}{r+w}=\frac{15}{4}$　　$r=20$ であるから　$w=60$

また，$r+b+w=100$ であるから　$b=20$　答

2

解答　(1)　評点 1 は 3 人，評点 2 は 11 人，評点 3 は 17 人，評点 4 は 11 人，評点 5 は 3 人

(2)　評点 4

解説

(1)　x は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うから，$Z=\frac{x-m}{\sigma}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

評点 1 と 5　$P(Z<-1.5)=P(1.5<Z)$

$$=0.5-p(1.5)=0.5-0.4332=0.0668$$

よって　$45\times 0.0668=3.0$ (人)

評点 2 と 4　$P(-1.5\leqq Z\leqq -0.5)=P(0.5\leqq Z\leqq 1.5)$

$$=p(1.5)-p(0.5)=0.4332-0.1915=0.2417$$

よって　$45\times 0.2417=10.9$ (人)

評点 3　$P(-0.5\leqq Z\leqq 0.5)=2p(0.5)=2\times 0.1915=0.3830$

よって　$45\times 0.3830=17.2$ (人)

ゆえに　評点 1 は 3 人，評点 2 は 11 人，評点 3 は 17 人，評点 4 は 11 人，評点 5 は 3 人

(2)　$0.5\sigma=10$，$1.5\sigma=30$ であるから

$$m+0.5\sigma=72,\quad m+1.5\sigma=92$$

よって　$m+0.5\sigma<85<m+1.5\sigma$　　したがって　評点 4

3

解答　(1)　64 粒以上　　(2)　87.5 %　　(3)　約 6.6 %

解説

(1)　昨年の種の発芽率は　$\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

今年の種を n 粒以上まけばよいとすると　$\frac{4}{5}n \geqq 51$

よって　$n \geqq \frac{255}{4}=63.75$

これを満たす最小の自然数 n は 64 であるから，64 粒以上まけばよい。

(2)　$\frac{56}{64}\times 100=87.5$ より　87.5 %

(3)　今年の種 1 粒の発芽率は $\frac{56}{64}=\frac{7}{8}$ であるから，400 粒まいたときに発芽する数 X は，二項分布 $B\left(400,\ \frac{7}{8}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=400\cdot\frac{7}{8}=350,\quad \sigma=\sqrt{400\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$$

よって，$Z=\dfrac{X-350}{\frac{5\sqrt{7}}{2}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=360$ のとき　$Z=\frac{20}{5\sqrt{7}}=1.509\cdots\cdots \fallingdotseq 1.51$

ゆえに　$P(X\geqq 360)\fallingdotseq P(Z\geqq 1.51)=0.5-0.4345=0.0655$

したがって，求める確率は　約 6.6 %

1

解答　(1)

X	1	2	3	計
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

(2)　母平均 $\frac{9}{5}$，母標準偏差 $\frac{\sqrt{14}}{5}$

解説

(1)　母集団分布は，大きさ 1 の無作為標本の確率分布であるから，右の表のようになる。

X	1	2	3	計
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

(2)　母平均 m は　$m=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$

母標準偏差 σ は　$\sigma=\sqrt{1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{2}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{5}$

2

解答　期待値 157.9 cm，標準偏差 0.64 cm

解説

母平均 157.9，母標準偏差 6.4 であるから，$\overline{X}$ の期待値と標準偏差は

$$E(\overline{X})=157.9\ \text{(cm)},\qquad \sigma(\overline{X})=\frac{6.4}{\sqrt{100}}=0.64\ \text{(cm)}$$

3

解答　期待値 $\frac{7}{2}$，標準偏差 $\frac{\sqrt{70}}{60}$

解説

さいころを 1 回投げるとき，出る目の数 X は，$P(X=k)=\frac{1}{6}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6)$ の確率分布に従う。

母集団分布は大きさ 1 の無作為標本と一致するから，母平均 m は

$$m=E(X)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

母標準偏差 σ は　$\sigma=\sqrt{(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot6\cdot7\cdot13-\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{35}{12}}=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

よって，標本平均 $\overline{X}$ の期待値 $E(\overline{X})$，標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ は

$$E(\overline{X})=\frac{7}{2},\ \sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{150}}\cdot\frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{\sqrt{70}}{60}$$

4

解答　0.9876

解説

得点 X は正規分布 $N(58,\ 12^2)$ に従うから，大きさ 100 の標本の標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(58,\ \frac{12^2}{100}\right)$ すなわち $N(58,\ 1.2^2)$ に従う。

よって，$Z=\dfrac{\overline{X}-58}{1.2}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって，求める確率は

$$P(55\leqq\overline{X}\leqq 61)=P(-2.5\leqq Z\leqq 2.5)=2p(2.5)=2\times0.4938=0.9876$$

5

解答　0.5762

解説

母比率は　$p=0.5$

標本の大きさは 400 であるから

$$E(R)=p=0.5,\quad \sigma(R)=\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{400}}=\frac{0.5}{20}=0.025$$

よって，$Z=\dfrac{R-0.5}{0.025}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって　$P(0.48\leqq R\leqq 0.52)=P(-0.8\leqq Z\leqq 0.8)$

$=2p(0.8)=2\cdot0.2881=0.5762$

6

解答　信頼度 95%で　[298.9，301.9]　単位は g

信頼度 99%で　[298.5，302.3]　単位は g

解説

標本の大きさは $n=100$，標本平均は $\overline{X}=300.4$，標準偏差は $s=7.5$ で，n は大きいから，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

よって，母平均の信頼度 95 %の信頼区間は，母標準偏差 σ の代わりに標本標準偏差 s を用いると

$$\left[300.4-1.96\cdot\frac{7.5}{\sqrt{100}},\ 300.4+1.96\cdot\frac{7.5}{\sqrt{100}}\right]$$

すなわち　[298.9，301.9]　ただし，単位は g

また，信頼度 99%で　$\left[300.4-2.58\cdot\frac{7.5}{\sqrt{100}},\ 300.4+2.58\cdot\frac{7.5}{\sqrt{100}}\right]$

すなわち　[298.5，302.3]　ただし，単位は g

7

解答　[0.218，0.342]

解説

標本比率 R は　$R=\frac{56}{200}=\frac{28}{100}=0.28$

標本の大きさ n は　$n=200$

信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\ R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right]$$

ここで　$1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\sqrt{\frac{0.28\times0.72}{200}}=1.96\times\frac{3\sqrt{7}}{250}\fallingdotseq 0.062$

よって，求める信頼区間は

$[0.28-0.062,\ 0.28+0.062]$　すなわち　[0.218，0.342]

8

解答　1825 以上

解説

不良品の標本比率を R，標本の大きさを n とすると，信頼度 95 %の信頼区間の幅は

$$2\cdot 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

$R=0.05$ としてよいから

$$2\cdot 1.96\sqrt{\frac{0.05\cdot 0.95}{n}}\leqq 0.02 \qquad よって \qquad \sqrt{n}\geqq 196\sqrt{0.05\times 0.95}$$

両辺を 2 乗すると　$n\geqq 1824.76$

ゆえに，標本の大きさを 1825 以上にすればよい。

9

解答　1 の出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよい

解説

1 の目が出る確率を p とする。1 の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ でないならば，$p\neq\frac{1}{6}$ であるという次の仮説を立てる。

仮説 $H_0: p=\frac{1}{6}$

仮説 H_0 が正しいとすると，720 回のうち 1 の目が出る回数 X は，二項分布 $B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=720\cdot\frac{1}{6}=120,\ \sigma=\sqrt{720\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)}=10$$

よって，$Z=\frac{X-120}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より

$$P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$$

であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z\leqq -1.96,\ 1.96\leqq Z$$

$X=95$ のとき $Z=\frac{95-120}{10}=-2.5$ であり，この値は棄却域に入るから，仮説 H_0 を棄却できる。

したがって，1 の出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよい。

10

解答　(1)　品種改良によって発芽率が上がったと判断してよい

(2)　品種改良によって発芽率が上がったとは判断できない

解説

(1)　品種改良した種子の発芽率を p とする。品種改良によって発芽率が上がったならば，$p>0.8$ である。

ここで，「品種改良によって発芽率が上がらなかった」という次の仮説を立てる。

仮説 $H_0: p=0.8$

仮説 H_0 が正しいとすると，400 個のうち発芽する種子の個数 X は，二項分布 $B(400,\ 0.8)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=400\cdot 0.8=320,\ \sigma=\sqrt{400\cdot 0.8\cdot(1-0.8)}=8$$

よって，$Z=\frac{X-320}{2}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(Z\leqq 1.64)\fallingdotseq 0.95$ であるから，有意水準 5 %の棄却域は

$$Z\geqq 1.64 \quad \cdots\cdots ①$$

$X=334$ のとき $Z=\frac{334-320}{8}=1.75$ であり，この値は棄却域 ① に入るから，仮説 H_0 を棄却できる。

ゆえに，品種改良によって発芽率が上がったと判断できる。

(2)　正規分布表より $P(Z\leqq 2.33)\fallingdotseq 0.99$ であるから，有意水準 1 %の棄却域は

$$Z\geqq 2.33 \quad \cdots\cdots ②$$

$Z=1.75$ は棄却域 ② に入らないから，仮説 H_0 を棄却できない。

ゆえに，品種改良によって発芽率が上がったとは判断できない。

1

解答　(1)

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

(2)　母平均 3，母標準偏差 1

解説

(1)　母集団分布は，大きさ 1 の無作為標本の確率分布であるから，次の表のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

(2)　母平均 m は　$m=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{2}{5}=3$

母標準偏差 σ は　$\sigma=\sqrt{1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{2}{5}-3^2}=1$

2

解答　期待値 59.8 kg，標準偏差 0.69 kg

解説

母平均 59.8，母標準偏差 6.9 であるから

$$E(\overline{X})=59.8\ (\text{kg}) \qquad \sigma(\overline{X})=\frac{6.9}{\sqrt{100}}=0.69\ (\text{kg})$$

3

解答　期待値 $\frac{7}{2}$，標準偏差 $\frac{\sqrt{105}}{60}$

解説

母集団分布は，1 個のさいころを 1 回投げたときの確率分布である。

よって，母平均 m は　$m=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

母標準偏差 σ は　$\sigma^2=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

ゆえに　$\sigma=\frac{\sqrt{105}}{6}$

よって，標本平均 $\overline{X}$ の

期待値　$E(\overline{X})=m=\frac{7}{2}$　　標準偏差　$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{105}}{60}$

4

解答　0.0228

解説

体重 X は正規分布 $N(58.5,\ 10^2)$ に従うから，大きさ 64 の標本の標本平均 $\overline{X}$ は，正規分布 $N\left(58.5,\ \frac{10^2}{64}\right)$ すなわち $N(58.5,\ 1.25^2)$ に従う。

よって，$Z=\frac{\overline{X}-58.5}{1.25}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって，求める確率は

$$P(\overline{X}\leqq 56)=P(Z\leqq -2)=0.5-p(2)=0.5-0.4772=0.0228$$

5

解答　0.9544

解説

母比率は　$p=0.5$

標本の大きさは 2500 であるから

$$E(R)=p=0.5,\ \sigma(R)=\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{2500}}=\frac{0.5}{50}=0.01$$

よって，$Z=\dfrac{R-0.5}{0.01}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって　$P(0.48\leqq R\leqq 0.52)=P(-2\leqq Z\leqq 2)=2p(2)=2\cdot 0.4772=0.9544$

6

解答　[167.4，171.0]　ただし，単位は cm

解説

標本平均は $\overline{X}=169.2$，標本の標準偏差は $s=9.0$，標本の大きさは $n=100$ である。

よって，信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[169.2-1.96\cdot\frac{9.0}{\sqrt{100}},\ 169.2+1.96\cdot\frac{9.0}{\sqrt{100}}\right]$$

ゆえに　[167.4，171.0]　ただし，単位は cm

7

解答　[0.426，0.555]

解説

標本比率は $R=\dfrac{196}{400}=0.49$ で，標本の大きさは $n=400$ であるから

$$\sqrt{\frac{R(1-R)}{400}}=\frac{\sqrt{0.49\cdot 0.51}}{20}\fallingdotseq 0.025$$

よって，住人の比率の信頼度 99%のときの信頼区間は

$$[0.49-2.58\cdot 0.025,\ 0.49+2.58\cdot 0.025]$$

すなわち　[0.426，0.555]

8

解答　8100 以上

解説

標本の大きさを n，標本比率を R とする。

母比率 p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\ R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right]$$

ゆえに，信頼区間の幅は　$2\times 1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=3.92\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

$R=0.3$ としてよいから　$3.92\sqrt{\dfrac{0.3\times 0.7}{n}}\leqq 0.02$

よって　$\sqrt{n}\geqq 196\sqrt{0.3\times 0.7}$　両辺を 2 乗すると　$n\geqq 8067.36$

したがって，標本の大きさを 8100 以上にすればよい。

9

解答　メンデルの法則に反するとはいえない。

解説

黄色の豆ができる割合を p とする。メンデルの法則に従わないならば，$p\neq\dfrac{3}{4}$ である。

ここで，メンデルの法則に従う，すなわち，黄色の豆ができる割合が $p=\dfrac{3}{4}$ であるという次の仮説を立てる。

仮説 $H_0:p=\dfrac{3}{4}$

仮説 H_0 が正しいとすると，560 個のうち黄色の豆の個数 X は，二項分布 $B\left(560,\ \dfrac{3}{4}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=560\cdot\frac{3}{4}=420,\ \sigma=\sqrt{560\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)}=\sqrt{105}$$

よって，$Z=\dfrac{X-420}{\sqrt{105}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$に従う。

正規分布表より

$$P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$$

であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z\leqq -1.96,\ 1.96\leqq Z$$

$X=428$ のとき $Z=\dfrac{428-420}{\sqrt{105}}=\dfrac{8}{10.25}\fallingdotseq 0.78$ であり，この値は棄却域に入らないから，仮説 H_0 を棄却できない。

したがって，メンデルの法則に反するとはいえない。

10

解答　(1)　白球の方が多いといえる　(2)　白球の方が多いとはいえない

解説

(1)　白球の個数の割合を p とする。白球の方が多いならば，$p>0.5$ である。

ここで，「白球と黒球の個数の割合は等しい」という次の仮説を立てる。

仮説 $H_0:p=0.5$

仮説 H_0 が正しいとすると，900 個の球のうち白球の個数 X は，二項分布 $B(900,\ 0.5)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=900\cdot 0.5=450,\ \sigma=\sqrt{900\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}=15$$

よって，$Z=\dfrac{X-450}{15}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(Z\leqq 1.64)\fallingdotseq 0.95$ であるから，有意水準 5 %の棄却域は

$$Z\geqq 1.64\ \cdots\cdots①$$

$X=480$ のとき $Z=\dfrac{480-450}{15}=2$ であり，この値は棄却域 ① に入るから，仮説 H_0 を棄却できる。

したがって，白球の方が多いといえる。

(2)　正規分布表より $P(Z\leqq 2.33)\fallingdotseq 0.99$ であるから，有意水準 1 %の棄却域は

$$Z\geqq 2.33\ \cdots\cdots②$$

$Z=2$ は棄却域 ② に入らないから，仮説 H_0 を棄却できない。

したがって，白球の方が多いとはいえない。

1 [山梨医科大]

解答　0.98

解説

B が跳んだ距離の平均 $\overline{x}$，標準偏差 s は

$$\overline{x}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i=\frac{1}{20}\times 107.00=5.35\ (\mathrm{m})$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i{}^2-(\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{20}\times 572.90-5.35^2}=\sqrt{0.0225}=0.15\ (\mathrm{m})$$

よって，B が跳ぶ距離 X は正規分布 $N(5.35,\ 0.15^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-5.35}{0.15}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって，A が B に勝つ確率は

$$P(X<5.65)=P\left(Z<\frac{5.65-5.35}{0.15}\right)=P(Z<2)$$
$$=0.5+p(2)=0.5+0.4772\fallingdotseq 0.98$$

2

解答　(1)　0.0228　(2)　484 本

解説

(1)　ニクロム線の抵抗 X は正規分布 $N(5.158,\ 0.1100^2)$ に従うから，100 本のニクロム線の標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(5.158,\ \dfrac{0.1100^2}{100}\right)$ すなわち $N(5.158,\ 0.011^2)$ に従う。

よって，$Z=\dfrac{\overline{X}-5.158}{0.011}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって，求める確率は

$$P(\overline{X}\geqq 5.180)=P\left(Z\geqq\frac{5.180-5.158}{0.011}\right)=P(Z\geqq 2)$$
$$=0.5-p(2)=0.5-0.4772=0.0228$$

(2)　母標準偏差は 0.1100 であるから，大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差は

$$\frac{0.1100}{\sqrt{n}}$$

よって，$\overline{X}$ の標準偏差が 0.005 オーム以下のとき

$$\frac{0.1100}{\sqrt{n}}\leqq 0.005\qquad \text{ゆえに}\qquad n\geqq 22^2=484$$

よって，少なくとも 484 本取り出せばよい。

3

解答　(1)　[167.8，169.0]　単位は cm　　(2)　[428.9，430.8]　単位は cm^2

解説

(1)　標本の大きさは $n=400$，標本平均は $\overline{X}=168.4$，標本標準偏差は $S=5.7$ で，n は大きいから，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{S^2}{n}\right)$ に従う。

よって，母平均の信頼区間は，信頼度 95% で

$$\left[168.4-1.96\cdot\frac{5.7}{\sqrt{400}},\ 168.4+1.96\cdot\frac{5.7}{\sqrt{400}}\right]$$

すなわち　[167.8，169.0]　ただし，単位は cm

(2)　円の直径，半径，面積をそれぞれ d，r，S とする。

d について，信頼度 99% の信頼区間は　$\left[23.4-2.58\cdot\dfrac{0.1}{\sqrt{100}},\ 23.4+2.58\cdot\dfrac{0.1}{\sqrt{100}}\right]$

すなわち　[23.374，23.426]　単位は cm

$r=\dfrac{d}{2}$ であるから，r について，信頼度 99% の信頼区間は

[11.687，11.713]　単位は cm

$S=\pi r^2$ であるから，S について，信頼度 99% の信頼区間は

$[3.14\times11.687^2,\ 3.14\times11.713^2]$

すなわち　[428.9，430.8]　ただし，単位は cm^2

4 [山梨医科大]

解答　(1)　2.50 kg 以上 2.64 kg 以下　　(2)　189 以上

解説

(1)　標本の大きさは $n=100$，標本平均は $\overline{X}=2.57$，標本標準偏差は $s=0.35$ である。

よって，母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[2.57-1.96\frac{0.35}{\sqrt{100}},\ 2.57+1.96\frac{0.35}{\sqrt{100}}\right]$$

ゆえに　$[2.57-0.07,\ 2.57+0.07]$

すなわち　[2.50，2.64]

よって　2.50 kg 以上 2.64 kg 以下

(2)　標本の大きさを n とすると　$1.96\dfrac{0.35}{\sqrt{n}}\leqq0.05$

よって　$\sqrt{n}\geqq\dfrac{1.96\times0.35}{0.05}$

両辺を平方して　$n\geqq(1.96\times7)^2=188.2384$

ゆえに　189 以上

1 [旭川医科大]

解答　約 6150 粒

解説

標本比率を R，標本の大きさを n とすると，母比率 p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\leqq p\leqq R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

よって，信頼区間の幅は　$3.92\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

信頼区間の幅が 0.02 以下になるとき　$3.92\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}\leqq0.02$

R は $p=0.2$ の近似値とみてよいから，$R=0.2$ を代入して

$$3.92\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\leqq0.02$$

よって　$\sqrt{n}\geqq\dfrac{3.92\sqrt{0.2\times0.8}}{0.02}$

両辺を平方して　$n\geqq196^2\times0.16=6146.56$

ゆえに　約 6150 粒

2 [東京理科大]

解答　(1)　0.30　(2)　0.0576　(3)　0.3456　(4)　9220

解説

(1)　$(0.4)^2+(0.3)^2+(0.2)^2+(0.1)^2=0.30$

(2)　4 人を a，b，c，d とする。血液型が，例えば a：A 型，b：O 型，c：B 型，d：AB 型 となる確率は　$0.4\times0.3\times0.2\times0.1=0.0024$

4 人に 4 種類の血液型を対応させる順列の総数は　$4!=24$

ゆえに，求める確率は　$24\times0.0024=0.0576$

(3)　1 人の血液型が A 型である確率は 0.4，A 型でない確率は $1-0.4=0.6$ であるから，

求める確率は　${}_5\mathrm{C}_2(0.4)^2(0.6)^3=10\cdot0.03456=0.3456$

(4)　n 人中，A 型の人が X 人いるとすると

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r(0.4)^r(0.6)^{n-r}\quad(r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

よって，X は二項分布 $B(n,\ 0.4)$ に従うから

$$E(X)=0.4n,\ V(X)=n\cdot0.4\cdot0.6=0.24n$$

n は大きいから，X は近似的に正規分布 $N(0.4n,\ 0.24n)$ に従う。

よって　$E\left(\dfrac{X}{n}\right)=\dfrac{1}{n}E(X)=0.4$，$V\left(\dfrac{X}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}V(X)=\dfrac{0.24}{n}$

A 型の人の割合 $\dfrac{X}{n}$ は近似的に正規分布 $N\left(0.4,\ \dfrac{0.24}{n}\right)$ に従うから，$Z=\dfrac{\dfrac{X}{n}-0.4}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}$

とおくと，Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従い

$$P\left(0.39\leqq\frac{X}{n}\leqq0.41\right)=2P\left(0.4\leqq\frac{X}{n}\leqq0.41\right)=2P\left(0\leqq Z\leqq0.01\sqrt{\frac{n}{0.24}}\right)$$
$$=2p\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.24}}\right)$$

ゆえに，$2p\left(0.01\sqrt{\dfrac{n}{0.24}}\right)\geqq0.95$，すなわち，$p\left(0.01\sqrt{\dfrac{n}{0.24}}\right)\geqq0.475$ であるための条件は，正規分布表から　$0.01\sqrt{\dfrac{n}{0.24}}\geqq1.96$

よって　$\sqrt{n}\geqq196\sqrt{0.24}$

両辺を 2 乗して　$n\geqq196^2\cdot0.24=9219.84$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=9220$

1 [山梨大]

解答 (1) $\dfrac{2(N-a+1)}{N(N+1)}$ (2) $\dfrac{N+2}{3}$ (3) 1

解説

(1) $X=a$ となるのは，2 球に書かれた数が $(0,\ a)$，$(1,\ a+1)$，……，$(N-a,\ N)$ の $N-a+1$ 通りの場合である．

ゆえに $P(X=a)=\dfrac{N-a+1}{{}_{N+1}C_2}=\dfrac{2(N-a+1)}{N(N+1)}$

(2) $E(X)=\displaystyle\sum_{a=1}^{N}aP(X=a)=\sum_{a=1}^{N}\frac{2\{(N+1)a-a^2\}}{N(N+1)}=\frac{2}{N}\sum_{a=1}^{N}a-\frac{2}{N(N+1)}\sum_{a=1}^{N}a^2$

$=\dfrac{2}{N}\cdot\dfrac{1}{2}N(N+1)-\dfrac{2}{N(N+1)}\cdot\dfrac{1}{6}N(N+1)(2N+1)=\dfrac{N+2}{3}$

(3) $N=4$ のとき $P(X=a)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}a$，$E(X)=2$

更に $E(X^2)=\displaystyle\sum_{a=1}^{4}a^2P(X=a)=\sum_{a=1}^{4}\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{10}a^3\right)$

$=\dfrac{1+4+9+16}{2}-\dfrac{1+8+27+64}{10}=15-10=5$

ゆえに $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$

2 [千葉大]

解答 (1) $\dfrac{n}{3^{n-1}}$ (2) $1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$ (3) $\dfrac{n(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}}$

解説

(1) n 人の手の出し方の総数は 3^n 通り

1 人だけが勝つ場合，勝者の決まり方が n 通りあり，その各々について，勝ち方がグー，チョキ，パーの 3 通りある。

よって，求める確率は $\dfrac{n\times3}{3^n}=\dfrac{n}{3^{n-1}}$

(2) あいこの余事象は，勝つ人数が 1 人以上 $(n-1)$ 人以下となる場合である。

勝つ人数が k 人 $(1\leqq k\leqq n-1)$ の場合，勝者の決まり方が ${}_nC_k$ 通りあり，その各々について，勝ち方がグー，チョキ，パーの 3 通りあるから，その確率は

$$\frac{{}_nC_k\times3}{3^n}=\frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$$

よって，あいこになる確率は $1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}=1-\frac{1}{3^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}{}_nC_k$ ……①

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}{}_nC_k=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k-2=(1+1)^n-2=2^n-2$

したがって，① から，求める確率は $1-\dfrac{1}{3^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}{}_nC_k=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$

別解 あいこにならないのは，手の出し方が 2 種類の場合である。

n 人が 2 種類の手 (グー，チョキまたはチョキ，パーまたはパー，グー) を出す場合の数は ${}_3C_2\cdot(2^n-2)=3(2^n-2)$ (通り)

よって，あいこになる確率は $1-\dfrac{3(2^n-2)}{3^n}=1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$

(3) 勝つ人数の期待値は

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\cdot{}_nC_k}{3^{n-1}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{3^{n-1}}\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}\cdot\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(k-1)\}!(k-1)!}$$

$$=\frac{n}{3^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-1}C_{k-1}\quad\cdots\cdots②$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-1}C_{k-1}=\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}C_{k-1}-1=(1+1)^{n-1}-1=2^{n-1}-1$

よって，② から，求める期待値は $\dfrac{n}{3^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-1}C_{k-1}=\frac{n(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}}$

3 [千葉大]

解答 (1) $\dfrac{14}{55}$ (2) $E(X+Y+Z)=2$，$V(X+Y+Z)=\dfrac{6}{11}$ (3) $\dfrac{12}{13}$

解説

(1) 取り出した 3 枚のカードすべてが 1 である場合だから

$$P(X=1)=\frac{{}_8C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{56}{220}=\frac{14}{55}$$

(2) $P(X+Y+Z=0)=P(X=0,\ Y=0,\ Z=0)=\dfrac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{1}{55}$

$P(X+Y+Z=1)=P(X=0,\ Y=0,\ Z=1)=\dfrac{{}_4C_2\times{}_8C_1}{{}_{12}C_3}=\dfrac{12}{55}$

$P(X+Y+Z=2)=P(X=0,\ Y=1,\ Z=1)=\dfrac{{}_4C_1\times{}_8C_2}{{}_{12}C_3}=\dfrac{28}{55}$

$P(X+Y+Z=3)=P(X=1,\ Y=1,\ Z=1)=\dfrac{14}{55}$

よって，$X+Y+Z$ の確率分布は右の表のようになる。

$X+Y+Z$	0	1	2	3
確率	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

ゆえに

$E(X+Y+Z)=0\times\dfrac{1}{55}+1\times\dfrac{12}{55}$

$+2\times\dfrac{28}{55}+3\times\dfrac{14}{55}=\dfrac{110}{55}=2$

また $E((X+Y+Z)^2)=0^2\times\dfrac{1}{55}+1^2\times\dfrac{12}{55}+2^2\times\dfrac{28}{55}+3^2\times\dfrac{14}{55}=\dfrac{250}{55}=\dfrac{50}{11}$

よって $V(X+Y+Z)=E((X+Y+Z)^2)-\{E(X+Y+Z)\}^2=\dfrac{50}{11}-4=\dfrac{6}{11}$

(3) 求める条件つき確率は $\dfrac{P(Y=0,\ Z=1)}{P(Y=0)}$ である。

(2) から $P(Y=0,\ Z=1)=P(X+Y+Z=1)=\dfrac{12}{55}$

$P(Y=0)=P(X+Y+Z=0)+P(X+Y+Z=1)=\dfrac{1}{55}+\dfrac{12}{55}=\dfrac{13}{55}$

ゆえに $\dfrac{\frac{12}{55}}{\frac{13}{55}}=\dfrac{12}{13}$

4 [大阪歯科大]

解答 (1) $\dfrac{1}{5}$

(2) X の平均は $\dfrac{3}{2}$，分散は $\dfrac{9}{20}$，Y の平均は $\dfrac{3}{2}$，分散は $\dfrac{9}{20}$，

$\dfrac{2}{5}X+\dfrac{3}{5}Y$ の平均は $\dfrac{3}{2}$

解説

最初に A から取り出した石が白石であるとき，

A には白石 2 個，黒石 3 個

B には白石 3 個，黒石 2 個 が入っている。

また，A から取り出した石が黒石であるとき，

A には白石 3 個，黒石 2 個

B には白石 2 個，黒石 3 個 が入っている。

(1) B から 1 個取り出したとき白石である確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{2}$$

また，A から取り出した白石をそのまま B から取り出す確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{1}{10}\div\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$

(2) $P(X=0)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\dfrac{1}{20}$

$P(X=1)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_2C_2\cdot{}_3C_1}{{}_5C_3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_3C_2\cdot{}_2C_1}{{}_5C_3}=\dfrac{9}{20}$

$P(X=2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_2}{{}_5C_3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_2C_2}{{}_5C_3}=\dfrac{9}{20}$

$P(X=3)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\dfrac{1}{20}$

したがって，X の平均 $E(X)$，分散 $V(X)$ は

$E(X)=0\cdot\dfrac{1}{20}+1\cdot\dfrac{9}{20}+2\cdot\dfrac{9}{20}+3\cdot\dfrac{1}{20}=\dfrac{3}{2}$

$V(X)=0^2\cdot\dfrac{1}{20}+1^2\cdot\dfrac{9}{20}+2^2\cdot\dfrac{9}{20}+3^2\cdot\dfrac{1}{20}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{20}$

同様にして $P(Y=0)=\dfrac{1}{20}$，$P(Y=1)=\dfrac{9}{20}$，$P(Y=2)=\dfrac{9}{20}$，$P(Y=3)=\dfrac{1}{20}$

よって，Y の平均 $E(Y)$，分散 $V(Y)$ は

$E(Y)=\dfrac{3}{2}$，$V(Y)=\dfrac{9}{20}$

$\dfrac{2}{5}X+\dfrac{3}{5}Y$ の平均は

$$E\left(\frac{2}{5}X+\frac{3}{5}Y\right)=\frac{2}{5}E(X)+\frac{3}{5}E(Y)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

5 [琉球大]

解答 (1)

$(x,\ y)$	$(3,3)$	$(3,2)$	$(3,1)$	$(3,0)$
P	p^3	$3p^2(1-p)$	$3p(1-p)^2$	$(1-p)^3$

(2) $(\sqrt{2}-1)p+1$　　(3) $\dfrac{(3-2\sqrt{2})p(1-p)}{n}$

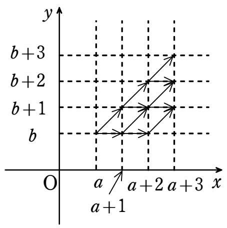
解説

(1) 点 $(x,\ y)$ に到達する確率を $P(x,\ y)$ とする．$P(3,3)=p^3$

$P(3,2)={}_3C_1p^2(1-p)=3p^2(1-p)$

$P(3,1)={}_3C_2p(1-p)^2=3p(1-p)^2$

$P(3,0)=(1-p)^3$　よって，到達できる点およびそれぞれの点に到達する確率は，次のようになる．



$(x,\ y)$	$(3,3)$	$(3,2)$	$(3,1)$	$(3,0)$
P	p^3	$3p^2(1-p)$	$3p(1-p)^2$	$(1-p)^3$

(2) 表の出る回数を k とすると　$X=\sqrt{2}\,k+(n-k)=(\sqrt{2}-1)k+n$ …… ①

したがって　$E\left(\dfrac{X}{n}\right)=E\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{n}k+1\right)=\dfrac{\sqrt{2}-1}{n}E(k)+1$

確率変数 $k\,(=0,1,\cdots,n)$ は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うから　$E(k)=np$

ゆえに　$E\left(\dfrac{X}{n}\right)=(\sqrt{2}-1)p+1$

(3) ① から　$V\left(\dfrac{X}{n}\right)=V\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{n}k+1\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{n}\right)^2V(k)$

確率変数 $k\,(=0,1,\cdots,n)$ は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うから　$V(k)=np(1-p)$

ゆえに　$V\left(\dfrac{X}{n}\right)=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2p(1-p)}{n}=\dfrac{(3-2\sqrt{2})p(1-p)}{n}$

6 [北海道大]

解答 (1) $P(\mathrm{A})=\dfrac{5}{8}$　(2) $\dfrac{3475}{4096}$　(3) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^n$

解説

(1) 3 個とも偶数の目が出る事象の確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

1 個奇数の目，2 個偶数の目の出る事象の確率は　${}_3C_1\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$

2 個奇数の目，1 個 4 の目が出る事象の確率は　${}_3C_1\cdot\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$

事象 A は互いに排反である上の 3 つの事象の和事象であるから

$P(\mathrm{A})=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$

別解　A の余事象 $\overline{\mathrm{A}}$ は 3 個とも奇数の目が出る事象と，2 個奇数の目が出て 1 個が 2 または 6 の目の出る事象との和事象である．

$P(\overline{\mathrm{A}})=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+{}_3C_1\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$　　$P(\mathrm{A})=1-P(\overline{\mathrm{A}})=1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$

(2) 4 回繰り返したとき A が k 回起こる確率は　${}_4C_k\left(\dfrac{5}{8}\right)^k\left(\dfrac{3}{8}\right)^{4-k}$

よって，求める確率は　${}_4C_2\left(\dfrac{5}{8}\right)^2\left(\dfrac{3}{8}\right)^2+{}_4C_3\left(\dfrac{5}{8}\right)^3\cdot\dfrac{3}{8}+{}_4C_4\left(\dfrac{5}{8}\right)^4=\dfrac{25(54+60+25)}{4096}$

$=\dfrac{3475}{4096}$

別解　$1-{}_4C_0\left(\dfrac{5}{8}\right)^0\left(\dfrac{3}{8}\right)^4-{}_4C_1\left(\dfrac{5}{8}\right)\left(\dfrac{3}{8}\right)^3=1-\dfrac{81}{4096}-\dfrac{540}{4096}=\dfrac{3475}{4096}$ と計算する．

(3) $E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^k\times{}_nC_k\left(\frac{5}{8}\right)^k\left(\frac{3}{8}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{15}{8}\right)^k\left(\frac{3}{8}\right)^{n-k}=\left(\frac{15}{8}+\frac{3}{8}\right)^n=\left(\frac{9}{4}\right)^n$

7

解答 (1) $\displaystyle\int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$　(2) $k>a\sigma$

解説

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うから，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$P(\alpha\leqq X\leqq\beta)=\displaystyle\int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

(2) (1) と同様にして　$P(|X-m|\leqq k)=P(m-k\leqq X\leqq m+k)$

$=\displaystyle\int_{-\frac{k}{\sigma}}^{\frac{k}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{\frac{k}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

よって，与えられた不等式から　$2\displaystyle\int_0^{\frac{k}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx>\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\frac{k}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx>\int_0^a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

したがって　$\dfrac{k}{\sigma}>a$　　$\sigma>0$ であるから　$k>a\sigma$

8

解答 (1) 3　(2) [498.7，499.3]　ただし，単位は回

解説

(1) 無作為抽出した標本について，標本の大きさ $n=400$ は大きいから，母標準偏差の代わりに標本標準偏差を用いることができる。

標本平均 $\overline{X}$ は，仮平均を 500 とすると

$\overline{X}=500+\dfrac{1}{400}\{(-5)\times62+(-4)\times57+(-3)\times44$

$+(-2)\times27+(-1)\times12+1\times29+2\times46+3\times17+4\times41\}$

$=500+\dfrac{-310-228-132-54-12+29+92+51+164}{400}$

$=500-\dfrac{400}{400}=499$

標本の分散 S^2 は

$S^2=\dfrac{1}{400}\{(-4)^2\times62+(-3)^2\times57+(-2)^2\times44+(-1)^2\times27$

$+1^2\times65+2^2\times29+3^2\times46+4^2\times17+5^2\times41\}$

$=\dfrac{25\times41+16\times79+9\times103+4\times73+92}{400}=\dfrac{3600}{400}=9$

よって，標本標準偏差 S は　$S=3$

(2) 信頼度 N % の信頼区間とは，k を定数として $\dfrac{N}{100}$ の確率で成り立つような母平均 m の不等式 $\overline{X}-k\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+k\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ が表す範囲である。

($\overline{X}$ は標本平均，σ は母標準偏差)

$N=97$ のとき，$2p(k)=\dfrac{97}{100}$ を満たす k は，正規分布表から　$k=2.17$

よって，$k=2.17$，$\sigma=S=3$，$n=400$ のとき　$k\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{2.17\times3}{20}=0.3255$

したがって，信頼度 97 % の信頼区間は　$[499-0.3255,\ 499+0.3255]$

小数第 2 位を四捨五入して　[498.7，499.3]　ただし，単位は回

$\boxed{9}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　[0.12，0.27]

解説

(1)　n 回のうち表が出る回数を X_n とすると，確率変数 X_n は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

確率変数 S_n について　　$S_n=1\cdot X_n+(-1)\cdot(n-X_n)=2X_n-n$

よって　　$X_n=\dfrac{1}{2}(S_n+n)$

したがって，$\dfrac{1}{2}(S_n+n)$ は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

(2)　(1) から $p=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{2}(S_{100}+100)$ は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

よって，$X=\dfrac{1}{2}(S_{100}+100)$ とおくと，X の期待値 m と標準偏差 σ は

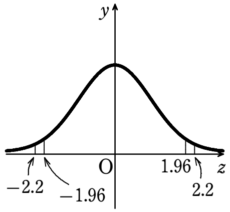
$$m=100\times\frac{1}{2}=50,\quad \sigma=\sqrt{100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=5$$

ゆえに，この二項分布は近似的に正規分布 $N(50,\ 5^2)$ に従い，$U=\dfrac{X-50}{5}$ とおくと，

U は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって

$$\begin{aligned}P(|S_{100}|\geqq 22)&=1-P(|S_{100}|<22)\\&=1-P(|2X-100|<22)\\&=1-P\left(\left|\frac{X-50}{5}\right|<\frac{11}{5}\right)\\&=1-P(|U|<2.2)\\&<1-P(|U|<1.96)\\&=1-0.95=0.05\end{aligned}$$



よって，原点から 22 以上隔たっている確率は 0.05 より小さい。

(3)　$S_{100}=-60$ であるから，表が出た回数は　　$\dfrac{1}{2}(-60+100)=20$

よって，標本比率 R は　　$R=\dfrac{20}{100}=0.2$

また，$n=100$ であるから

$$1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100}}=0.0784$$

ゆえに，p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$[0.2-0.0784,\ 0.2+0.0784]$　　すなわち　　$[0.1216,\ 0.2784]$

したがって，p の信頼区間の端点を小数第 2 位まで求めると　　[0.12，0.27]

$\boxed{10}$ [鹿児島大]

解答　(1)　平均 p，分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$　　(2)　[0.76，0.84]

解説

(1)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うから

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=np,\quad V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=np(1-p)$$

よって，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ の平均は　　$E(\overline{X})=E\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n}E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=p$

$\overline{X}$ の分散は　　$V(\overline{X})=V\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^2V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{p(1-p)}{n}$

(2)　$n=400$ は十分大きいから，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う。

ゆえに，$Z=\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$ とおくと，Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う。

標本比率は $R=\dfrac{320}{400}=0.8$ で，標本の大きさは $n=400$ であるから

$$\sqrt{\frac{R(1-R)}{400}}=\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}=\frac{0.4}{20}=0.02$$

よって，母比率 p の信頼度 95 % の信頼区間は　　$[0.8-1.96\times0.02,\ 0.8+1.96\times0.02]$

ゆえに　　[0.76，0.84]

$\boxed{11}$ [和歌山県立医科大]

解答　(1)　0.0124　　(2)　$k=8$　　(3)　治癒率は向上したと判断してよい

解説

(1)　この病気の患者 100 人のうち治癒する人数 X は，二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{8}{10}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=100\cdot\frac{8}{10}=80,\ \sigma=\sqrt{100\cdot\frac{8}{10}\cdot\left(1-\frac{8}{10}\right)}=4$$

よって，　$Z=\dfrac{X-80}{4}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

$|X-m|\geqq 10$ から　　$\left|\dfrac{X-80}{4}\right|\geqq\dfrac{10}{4}$

すなわち $|Z|\geqq 2.5$

ゆえに，求める確率は　$P(|Z|\geqq 2.5)$

正規分布表より，$p(2.5)=0.4938$ であるから

$$\begin{aligned}P(|Z|\geqq 2.5)&=2\{0.5-p(2.5)\}\\&=2\cdot(0.5-0.4938)\\&=0.0124\end{aligned}$$

(2)　$|X-m|\geqq k$ から　　$\left|\dfrac{X-80}{4}\right|\geqq\dfrac{k}{4}$

すなわち　　$|Z|\geqq\dfrac{k}{4}$

よって，$P\left(\left|Z\geqq\dfrac{k}{4}\right|\right)$ となる最小の整数 k を求めればよい。

k の値が大きくなると $P\left(\left|Z\geqq\dfrac{k}{4}\right|\right)$ の値は小さくなり，

$P(|Z|\geqq 1.96)=0.05$ であるから，$P\left(|Z|\geqq\dfrac{k}{4}\right)$ を満たす k の値の範囲は

$$\frac{k}{4}\geqq 1.96$$

ゆえに　　$k\geqq 7.84$

これを満たす最小の整数 k は　　$k=8$

(3)　治癒率を p とする。新しい治療法が在来の物と比較して，治癒率が向上したならば，

$p>\dfrac{8}{10}$ である。

ここで，治癒率が向上していない，すなわち，在来の治療法の治癒率と同じであるという次の仮説を立てる。

仮説 H_0 : $p=\dfrac{8}{10}$

仮説 H_0 が正しいとすると，(1) から，患者 100 人のうち治癒する人数 X は，二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{8}{10}\right)$ に従い，$Z=\dfrac{X-80}{4}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

正規分布表より $P(Z\leqq 1.64)\fallingdotseq 0.95$ であるから，有意水準 5 % の棄却域は $1.64\leqq Z$

$X=92$ のとき $Z=\dfrac{92-80}{4}=3$ であり，この値は棄却域に入るから，仮説 H_0 を棄却できる。

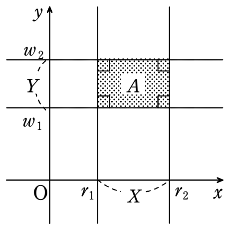
したがって，治癒率は向上したと判断してよい。

1 [広島大]

解答 (1) $\dfrac{4(3n^2-14n+12)}{n^2(n-1)^2}$ (2) $\dfrac{n+1}{3}$ (3) $\left(\dfrac{n+1}{3}\right)^2$

解説

$X=|r_1-r_2|$, $Y=|w_1-w_2|$ とすると，四角形 A の面積は XY



赤い袋から玉を 2 個取り出す方法は ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り

このうち，$X=k$ となる r_1，r_2 の組合せは

$(n-k)$ 通り

よって $P(X=k)=\dfrac{n-k}{{}_n\mathrm{C}_2}=\dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$

同様にして $P(Y=l)=\dfrac{2(n-l)}{n(n-1)}$

(1) $XY=4$ となるのは，$(X,\ Y)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(4,\ 1)$のときである。

よって，求める確率は

$$\frac{2(n-1)}{n(n-1)}\cdot\frac{2(n-4)}{n(n-1)}+\frac{2(n-2)}{n(n-1)}\cdot\frac{2(n-2)}{n(n-1)}+\frac{2(n-4)}{n(n-1)}\cdot\frac{2(n-1)}{n(n-1)}$$

$$=\frac{4}{n^2(n-1)^2}\{2(n-1)(n-4)+(n-2)^2\}=\frac{4(3n^2-14n+12)}{n^2(n-1)^2}$$

(2) X のとりうる値は 1，2，……，$n-1$ であるから，X の期待値は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\frac{2(n-k)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)$$

$$=\frac{2}{n(n-1)}\left\{n\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}$$

$$=\frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)\{3n-(2n-1)\}=\frac{n+1}{3}$$

(3) (2) と同様にして $E(Y)=\dfrac{n+1}{3}$

X と Y は互いに独立であるから，求める期待値は

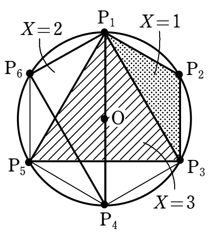
$$E(XY)=E(X)E(Y)=\left(\frac{n+1}{3}\right)^2$$

2 [京都大]

解答 1

解説

さいころの目の出方は全部で $6^3=216$ (通り)



そのうち，目がすべて異なる出方は

${}_6\mathrm{P}_3=6\cdot5\cdot4=120$ (通り)

得点を X とする。

[1] $X=0$ となる目の出方は

$216-120=96$ (通り)

[2] $X=1$ となるのは出た目の数の組合せが $(1,\ 2,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 4)$，……，$(6,\ 1,\ 2)$ のときで，この場合の目の出方は $6\cdot3!=36$ (通り)

[3] $X=2$ となるのは，$\triangle\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ が直角三角形のときで，その斜辺の選び方は 3 通りで，そのおのおのに対して，残りの頂点の選び方は 4 通りあるから，この場合の目の出方は

$3\cdot4\cdot3!=72$ (通り)

[4] $X=3$ となるのは $\triangle\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ が正三角形のとき，すなわち出た目の数の組合せが $(1,\ 3,\ 5)$，$(2,\ 4,\ 6)$ のときで，この場合の目の出方は $2\cdot3!=12$ (通り)

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{96}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{72}{216}$	$\frac{12}{216}$	1

ゆえに

$$E(X)=1\cdot\frac{36}{216}+2\cdot\frac{72}{216}+3\cdot\frac{12}{216}=\frac{216}{216}=1$$

3 [大阪大]

解答 (1) $E(Y)=(a+b)p+cp^2$ (2) $a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=0$

解説

(1) $E(X_1)=1\times p+0\times(1-p)=p$ 同様にして $E(X_2)=p$

X_1 と X_2 は独立であるから

$$E(Y)=E(aX_1+bX_2+cX_1X_2)$$
$$=aE(X_1)+bE(X_2)+cE(X_1)E(X_2)$$
$$=ap+bp+cp^2=(a+b)p+cp^2$$

(2) $E(Y)=p\ (0<p<1)$ から $cp^2+(a+b)p=p$

これが $0<p<1$ を満たす p についての恒等式であるから

$c=0$，$a+b=1$

よって $Y=aX_1+bX_2=aX_1+(1-a)X_2$

また $V(X_1)=V(X_2)=p-p^2=p(1-p)$

X_1 と X_2 は独立であるから

$$V(Y)=V(aX_1+bX_2)=a^2V(X_1)+b^2V(X_2)=p(1-p)(a^2+b^2)$$
$$=p(1-p)\{a^2+(1-a)^2\}=p(1-p)(2a^2-2a+1)$$
$$=p(1-p)\left\{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}$$

$p(1-p)>0$ であるから，$V(Y)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小となる。

$b=1-a$ から $b=\dfrac{1}{2}$

ゆえに $a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=0$

4 [鹿児島大]

解答 (1) 〔表〕

(2) $E(W)=-a+2b-2$

(3) $E(Z)=-ab+2a-b+2$

(4) $V(Z)=\dfrac{19}{16}$

X \ Y	2	4	計
1	ab	$a(1-b)$	a
2	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
計	b	$1-b$	1

解説

(1) $P(X=1)=a$ より $P(X=2)=1-P(X=1)=1-a$

$P(Y=2)=b$ より $P(Y=4)=1-P(Y=2)=1-b$

また，X，Y は互いに独立なので

$P(X=1,\ Y=2)=P(X=1)P(Y=2)=ab$

$P(X=1,\ Y=4)=P(X=1)P(Y=4)=a(1-b)$

$P(X=2,\ Y=2)=P(X=2)P(Y=2)=(1-a)b$

$P(X=2,\ Y=4)=P(X=2)P(Y=4)=(1-a)(1-b)$

よって，X，Y の同時確率分布は次のようになる。

X \ Y	2	4	計
1	ab	$a(1-b)$	a
2	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
計	b	$1-b$	1

(2) $E(X)=1\cdot a+2\cdot(1-a)=2-a$，$E(Y)=2\cdot b+4\cdot(1-b)=4-2b$

であるから

$E(W)=E(X-Y)=E(X)-E(Y)=2-a-(4-2b)=-a+2b-2$

(3) Z のとりうる値は 1，2，4

$P(Z=1)=P(X=2,\ Y=2)=(1-a)b$

$P(Z=2)=P(X=1,\ Y=2)+P(X=2,\ Y=4)$

$=ab+(1-a)(1-b)=1-a-b+2ab$

$P(Z=4)=P(X=1,\ Y=4)=a(1-b)$

よって，Z の確率分布表は次のようになる。

Z	1	2	4	計
P	$(1-a)b$	$1-a-b+2ab$	$a(1-b)$	1

また，Z の平均は

$E(Z)=1\cdot(1-a)b+2\cdot(1-a-b+2ab)+4\cdot a(1-b)=-ab+2a-b+2$

(4) $E(Z)=\dfrac{9}{4}$，$E(W)=-\dfrac{3}{2}$ より

$$\begin{cases}-ab+2a-b+2=\dfrac{9}{4} & \cdots\cdots① \\ -a+2b-2=-\dfrac{3}{2} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

② より $a=2b-\dfrac{1}{2}$ ……③

③ を ① に代入して整理すると

$8b^2-14b+5=0$ よって $(2b-1)(4b-5)=0$

$0<b<1$ より $b=\dfrac{1}{2}$ ③ より $a=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，Z の確率分布表は右のようになる。

Z	1	2	4	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

したがって，Z の分散は

$$V(Z)=\left(1-\frac{9}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(2-\frac{9}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(4-\frac{9}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{19}{16}$$

$\boxed{5}$ [大阪医科大]

解答　(1)　独立でない　　(2)　独立である

解説

(1)　$W=0$ となるのは，$X=10$ の 1 通り。

$Z=0$ となるのは，$2 \leqq X+Y \leqq 26$ から $X+Y=10,\ 20$ のとき。

$X+Y=10$ となるのは，$(X,\ Y)=(9,\ 1),\ (8,\ 2),\ \cdots\cdots,\ (1,\ 9)$ の 9 通り。

$X+Y=20$ となるのは，$(X,\ Y)=(13,\ 7),\ (12,\ 8),\ \cdots\cdots,\ (7,\ 13)$ の 7 通り。

よって　$9+7=16$ (通り)

$W=0,\ Z=0$ となるのは，$(X,\ Y)=(10,\ 10)$ の 1 通り。

よって　$P(W=0)P(Z=0)=\dfrac{1}{13}\cdot\dfrac{16}{13^2}=\dfrac{16}{13^3}$，$P(W=0,\ Z=0)=\dfrac{1}{13^2}$

ゆえに　$P(W=0,\ Z=0) \fallingdotseq P(W=0)P(Z=0)$

したがって，W，Z は独立でない。

(2)　余りが 0 を余りが 13 と考える。

このとき，$1 \leqq m,\ n \leqq 13$ である。

$X=m$ と $W=m$ は 1 対 1 に対応するから，$W=m$ となるのは，$X=m$ の 1 通り。

$Z=n$ となるのは，$X+Y=n,\ n+13$ のとき。

$X+Y=n$ となるのは，$(X,\ Y)=(n-1,\ 1),\ (n-2,\ 2),\ \cdots\cdots,\ (1,\ n-1)$ の $n-1$ 通り。

$X+Y=n+13$ となるのは，$(X,\ Y)=(13,\ n),\ (12,\ n+1),\ \cdots\cdots,\ (n,\ 13)$ の $14-n$ 通り。

よって　$(n-1)+(14-n)=13$ (通り)

$W=m,\ Z=n$ となるのは，$X=m,\ X+Y=n,\ n+13$ のとき。

$m<n$ のときは，$X+Y=n$ から　$Y=n-m$

$m \geqq n$ のときは，$X+Y=n+13$ から　$Y=13+n-m$

すなわち　1 通り。

よって　$P(W=m)P(Z=n)=\dfrac{1}{13}\cdot\dfrac{13}{13^2}=\dfrac{1}{13^2}$，

$P(W=m,\ Z=n)=\dfrac{1}{13^2}$

ゆえに　$P(W=m,\ Z=n)=P(W=m)P(Z=n)$

したがって，W，Z は独立である。

$\boxed{6}$ [鹿児島大]

解答　(1)　期待値 n，標準偏差 $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$　　(2)　$\dfrac{2n-k}{k+1}$　　(3)　$k=n$　　(4)　0.682

解説

(1)　コインの表が k 回 $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ 出る確率は ${}_{2n}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-k}$ であるから，X は二項分布 $B\left(2n,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

よって，X の期待値は　$2n\cdot\dfrac{1}{2}=n$

標準偏差は　$\sqrt{2n\cdot\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}=\sqrt{\dfrac{n}{2}}$

(2)　$P(X=k)={}_{2n}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}=\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$

$P(X=k+1)={}_{2n}\mathrm{C}_{k+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}=\dfrac{(2n)!}{(k+1)!\{2n-(k+1)\}!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$

よって

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{(2n)!}{(k+1)!\{2n-(k+1)\}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\times\frac{k!(2n-k)!}{(2n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2n}=\frac{2n-k}{k+1}$$

(3)　$\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}>1$ のとき，(2) から　$\dfrac{2n-k}{k+1}>1$

よって　$k<n-\dfrac{1}{2}$

これを満たす k は　$k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1$

このとき

$P(X=0)<P(X=1)<P(X=2)<\cdots\cdots<P(X=n-1)<P(X=n)$　…… ①

$\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}<1$ のとき，同様にして　$k>n-\dfrac{1}{2}$

これを満たす k は　$k=n,\ n+1,\ \cdots\cdots,\ 2n-1$

このとき

$P(X=n)>P(X=n+1)>P(X=n+2)>\cdots\cdots>P(X=2n-1)>P(X=2n)$　…… ②

$\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=1$ のとき $k=n-\dfrac{1}{2}$ となるが，これを満たす k は存在しない。

ゆえに，①，② から

$P(X=0)<P(X=1)<\cdots\cdots<P(X=n-1)<P(X=n)>P(X=n+1)>\cdots\cdots>P(X=2n-1)>P(X=2n)$

よって，$P(X=k)$ を最大にする k の値は　$k=n$

(4)　$n=200$ のとき，X は二項分布 $B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

このとき，(1) から，期待値は 200，標準偏差は $\sqrt{\dfrac{200}{2}}=10$ である。

試行回数 400 は十分大きいから，X は近似的に正規分布 $N(200,\ 100)$ に従う。

ゆえに，$Z=\dfrac{X-200}{10}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$P(190 \leqq X \leqq 210)=P\left(\dfrac{190-200}{10} \leqq Z \leqq \dfrac{210-200}{10}\right)$

$=P(-1 \leqq Z \leqq 1)=1-2P(Z>1)=1-2\cdot 0.159=0.682$

$\boxed{7}$ [滋賀大]

解答　(1)　$\dfrac{175}{256}$　　(2)　0.5　　(3)　0.566

解説

(1)　A：「少なくとも 1 回当たりが出る」とすると，余事象 $\overline{A}$ は「4 回とも当たりが出ない」であるから，その確率は

$P(\overline{A})=\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{81}{256}$

よって，求める確率は

$P(A)=1-P(\overline{A})=\dfrac{175}{256}$

(2)　X は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{10}\right)$ に従う。

よって，X の平均は　$m=100\cdot\dfrac{1}{10}=10$

標準偏差は　$\sigma=\sqrt{100\cdot\dfrac{1}{10}\left(1-\dfrac{1}{10}\right)}=3$

$n=100$ は大きいから，この X は近似的に正規分布 $N(10,\ 3^2)$ に従う。

ゆえに，$Z=\dfrac{X-10}{3}$ とおくと，Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって　$P(X \geqq 10)=P\left(Z \geqq \dfrac{10-10}{3}\right)=P(Z \geqq 0)=0.5$

(3)　X は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{10}\right)$ に従う。

$P(X \geqq 10)=P\left(Z \geqq \dfrac{10-0.5-10}{3}\right)$

$=P\left(Z \geqq -\dfrac{1}{6}\right)=0.5+P\left(0 \leqq Z \leqq \dfrac{1}{6}\right)$

$=0.5+0.066=0.566$

8 [滋賀大]

解答 (1) 順に 0 cm，1 cm　(2) $x=167$　(3) 0.16
(4) 順に 160 cm，0.1 cm，0.05

解説

(1) 母平均 $E(X)=160$，母標準偏差 $\sigma(X)=5$ から

$$E\left(\frac{X-160}{5}\right)=\frac{E(X)-160}{5}=\frac{160-160}{5}=0\ (\mathrm{cm})$$

$$\sigma\left(\frac{X-160}{5}\right)=\frac{\sigma(X)}{5}=\frac{5}{5}=1\ (\mathrm{cm})$$

(2) $Z=\dfrac{X-160}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(Z\geqq u)\leqq 0.1$ となる $u\ (u\geqq 0)$ の値を調べる。

$P(Z\geqq u)\leqq 0.1$ から　$0.5-P(0\leqq Z\leqq u)\leqq 0.1$

よって　$P(0\leqq Z\leqq u)\geqq 0.4$

これを満たす最小の u は，正規分布表から　$u=1.29$

ゆえに　$P(Z\geqq 1.29)\leqq 0.1$

よって　$\dfrac{X-160}{5}\geqq 1.29$

ゆえに　$X\geqq 166.45$

したがって，求める x の値は　$x=167$

(3) $$P(165\leqq X\leqq 175)=P\left(\frac{165-160}{5}\leqq Z\leqq\frac{175-160}{5}\right)=P(1\leqq Z\leqq 3)$$
$$=P(0\leqq Z\leqq 3)-P(0\leqq Z\leqq 1)$$
$$=0.49865-0.3413=0.15735$$

小数第 3 位を四捨五入して，求める確率は　0.16

(4) 標本平均 $\overline{X}$ の平均，標準偏差は

$$E(\overline{X})=E(X)=160\ (\mathrm{cm})$$
$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{2500}}=\frac{5}{50}=0.1\ (\mathrm{cm})$$

$\overline{X}$ は正規分布 $N(160,\ 0.1)$ に従うから，$Z'=\dfrac{\overline{X}-160}{0.1}$ とおくと，Z' は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$$P(|\overline{X}-160|\geqq 0.2)=P(0.1|Z'|\geqq 0.2)=P(|Z'|\geqq 2)=2P(Z'\geqq 2)$$
$$=2\{0.5-P(0\leqq Z'\leqq 2)\}$$
$$=1-2\times 0.4772=0.0456$$

小数第 3 位を四捨五入して，求める確率は　0.05

9 [センター追試]

解答 $-$(ア).(イ)　-0.5　0.(ウエ)　0.31　$-$(オ).(カキ)　-1.75　(クケ).(コ)　50.7
(サシス).(セ)　531.8　(ソ).(タ)　1.2　$\dfrac{0.4}{(チ)}$　$\dfrac{0.4}{3}$　0.(ツテ)　0.07
50.(トナ)　50.06　50.(ニヌ)　50.14　(ネ)　⑤

解説

(1) $$P(X<50)=P\left(Z<\frac{50-50.2}{0.4}\right)=P(Z<-{}^{ア}0.{}^{イ}5)=P(Z>0.5)$$
$$=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 0.5)=0.5-0.1915\fallingdotseq 0.{}^{ウエ}31$$

(2) $$P\left(Z<-\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right)=P\left(Z>\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right)$$
$$=P(Z\geqq 0)-P\left(0\leqq Z\leqq\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right)$$
$$=0.5-P\left(0\leqq Z\leqq\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right)$$

$P\left(Z<-\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right)=0.0401$ であるとき，

$$P\left(0\leqq Z\leqq\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right)=0.5-P\left(Z<-\boxed{\text{オ}}.\boxed{\text{カキ}}\right)=0.5-0.0401=0.4599$$

となるから，正規分布表により，${}^{オ}1.{}^{カキ}75$ となる。

また，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ であり，標準偏差 σ が 0.4 のとき，製造される菓子 1 個あたりの重さが 50 g 未満となるとき　$\dfrac{X-m}{\sigma}<\dfrac{50-m}{0.4}$

よって，$\dfrac{50-m}{0.4}=-1.75$ であるから　$m={}^{クケ}50.{}^{コ}7$

(3) $Y=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_9+80$ であるから

$$\overline{Y}=9\overline{X}+80=9\cdot 50.2+80={}^{サシス}531.{}^{セ}8$$

また，$V(Y)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_9)=9\times 0.4^2$ であるから

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{9\times 0.4^2}=3\times 0.4={}^{ソ}1.{}^{タ}2$$

$\overline{X}$ の標準偏差は　$\dfrac{0.4}{\sqrt{9}}=\dfrac{0.4}{{}^{チ}3}$

よって　$$P(\overline{X}<50)=P\left(Z<\frac{50-50.2}{\frac{0.4}{3}}\right)=P(Z<-1.5)=P(Z>1.5)$$
$$=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 1.5)=0.5-0.4332\fallingdotseq 0.{}^{ツテ}07$$

(4) m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[50.10-1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{100}},\ 50.10+1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{100}}\right]$$

すなわち，$50.0608\leqq m\leqq 50.1392$ であるから　$50.{}^{トナ}06\leqq m\leqq 50.{}^{ニヌ}14$

このときの信頼区間の幅は

$$\left(50.10+1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{100}}\right)-\left(50.10-1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{100}}\right)=1.96\cdot\frac{0.4}{\sqrt{100}}$$

信頼度と標準偏差が変わらないものとして，標本の大きさが n であるときの信頼区間の幅は同様に $1.96\cdot\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}$ であるから，$1.96\cdot\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}\cdot 1.96\cdot\dfrac{0.4}{\sqrt{100}}$ より

$$n=400\ ({}^{ネ}⑤)$$

1 [三重大]

解答 (1) 平均 $-\dfrac{n}{3}$，分散 $\dfrac{8}{9}n$　(2) $\dfrac{1}{9}n(n+8)$　(3) $\dfrac{1}{9}n(5n+13)\pi$

解説

(1) 大きいさいころの 1 または 2 の目が出る回数を X とすると

$$x_n=1\cdot X+(-1)\cdot(n-X)=2X-n$$

X は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従うから，X の平均 $E(X)$，分散 $V(X)$ は

$$E(X)=\frac{n}{3},\quad V(X)=n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$$

よって，x_n の平均 $E(x_n)$，分散 $V(x_n)$ は

$$E(x_n)=E(2X-n)=2E(X)-n=2\cdot\frac{n}{3}-n=-\frac{n}{3}$$
$$V(x_n)=V(2X-n)=2^2V(X)=\frac{8}{9}n$$

(2) $V(x_n)=E(x_n{}^2)-\{E(x_n)\}^2$ であるから

$$E(x_n{}^2)=V(x_n)+\{E(x_n)\}^2=\frac{8}{9}n+\left(-\frac{n}{3}\right)^2=\frac{1}{9}n(n+8)$$

(3) $S=\pi(x_n{}^2+y_n{}^2)$ であるから，S の平均 $E(S)$ は

$$E(S)=\pi\{E(x_n{}^2)+E(y_n{}^2)\}$$

ここで，y_n の平均 $E(y_n)$ と分散 $V(y_n)$ を求める。

小さいさいころの 1 の目が出る回数を Y とすると　$y_n=2Y-n$

Y は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから，(1) と同様にして

$$E(y_n)=2\cdot\frac{n}{6}-n=-\frac{2}{3}n,\quad V(y_n)=2^2\cdot n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{9}n$$

更に，(2) と同様にして　$E(y_n{}^2)=\dfrac{5}{9}n+\left(-\dfrac{2}{3}n\right)^2=\dfrac{1}{9}n(4n+5)$

よって　$$E(S)=\pi\left\{\frac{1}{9}n(n+8)+\frac{1}{9}n(4n+5)\right\}=\frac{1}{9}n(5n+13)\pi$$

2 [一橋大]

解答 (1) $\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ (2) $\frac{7}{2}$

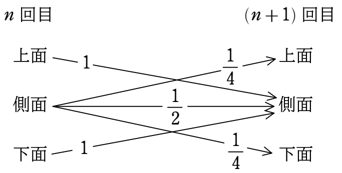
解説

(1) $n\geqq1$ とする。

n 回の操作の後，1 の目が上面，側面にある確率をそれぞれ p_n，q_n とすると，1 の目が下面にある確率は $1-p_n-q_n$ である。

また，$p_1=0$，$q_1=1$ である。

n 回目の操作の後から $(n+1)$ 回目の操作における 1 の目がある面の移動の推移およびその確率は，次の図のようになる。



これらから $p_{n+1}=\frac{1}{4}q_n$ ……①

$$q_{n+1}=p_n+\frac{1}{2}q_n+(1-p_n-q_n)=1-\frac{1}{2}q_n \quad \cdots\cdots②$$

② を変形すると $q_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(q_n-\frac{2}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{q_n-\frac{2}{3}\right\}$ は初項 $q_1-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$q_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ したがって $q_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

① より $p_{n+1}=\frac{1}{4}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$ $(n\geqq1)$

よって，$n\geqq2$ において $p_n=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

この式に $n=1$ を代入すると $p_1=0$

よって，これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める確率は $p_n=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

(2) n 回目の操作の後，2，3，4，5 が上面にあるのは，1 の目が側面にあるときであり，その確率はどれも等しく $\frac{1}{4}q_n$

また，6 の目が上面にあるのは，1 の目が下面にあるときであるから，その確率は

$$1-p_n-q_n=1-\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}-\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=p_n$$

よって，$p_n+q_n+(1-p_n-q_n)=1$ より $p_n+q_n+p_n=1$

ゆえに $q_n=1-2p_n$

以上から，求める期待値は $1\times p_n+(2+3+4+5)\times\frac{1}{4}(1-2p_n)+6\times p_n=\frac{7}{2}$

3 [大阪市立大]

解答 (1) $P(2j)=r^{j-1}(1-2r)$，$P(2j+1)=r^j$，$P(2N+2)=r^N$ (2) 略 (3) 略
(4) 略

解説

(1) $2j$ 回取り出して終わるのは，

- 赤白が $j-1$ 回続いたあと，赤赤が出る。
- 白赤が $j-1$ 回続いたあと，白白が出る。

のどちらかであるから

$$P(2j)=(pq)^{j-1}p^2+(qp)^{j-1}q^2=r^{j-1}(p^2+q^2)$$
$$=r^{j-1}\{(p+q)^2-2pq\}=r^{j-1}(1-2r)$$

$2j+1$ 回取り出して終わるのは，

- 赤白が j 回続いたあと，白が出る。
- 白赤が j 回続いたあと，赤が出る。

のどちらかであるから

$$P(2j+1)=(pq)^jq+(qp)^jp=r^j(q+p)=r^j$$

取り出す回数が $2N+2$ になるのは，$2N+1$ 回で終わらない場合で，それは

- 赤白が N 回続いたあと，赤が出る。
- 白赤が N 回続いたあと，白が出る。

のどちらかであるから

$$P(2N+2)=(pq)^Np+(qp)^Nq=r^N(p+q)=r^N$$

(2) $\sum_{j=1}^{N}jr^{j-1}=S$ とおく。

$$S=1+2r+3r^2+\cdots\cdots+Nr^{N-1}$$
$$rS=\qquad r+2r^2+\cdots\cdots+(N-1)r^{N-1}+Nr^N$$

$0<p<1$，$0<q<1$ より $r\neq1$ であるから，辺々引くと

$$(1-r)S=1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1}-Nr^N$$
$$=\frac{1-r^N}{1-r}-Nr^N$$

よって，$(1-r)\sum_{j=1}^{N}jr^{j-1}=\frac{1-r^N}{1-r}-Nr^N$ が成り立つ。

(3) $m=\sum_{n=2}^{2N+2}nP(n)$

$$=\sum_{j=1}^{N}2jP(2j)+\sum_{j=1}^{N}(2j+1)P(2j+1)+(2N+2)P(2N+2)$$
$$=\sum_{j=1}^{N}2j\cdot r^{j-1}(1-2r)+\sum_{j=1}^{N}(2j+1)r^j+(2N+2)r^N$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\{2jr^{j-1}(1-2r)+(2j+1)r^j\}+(2N+2)r^N$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\{2(1-r)jr^{j-1}+r^j\}+(2N+2)r^N$$
$$=2(1-r)\sum_{j=1}^{N}jr^{j-1}+\sum_{j=1}^{N}r^j+(2N+2)r^N$$
$$=2\left(\frac{1-r^N}{1-r}-Nr^N\right)+\frac{r(1-r^N)}{1-r}+(2N+2)r^N$$
$$=\frac{2(1-r^N)+r(1-r^N)+2r^N(1-r)}{1-r}$$
$$=\frac{2+r-3r^{N+1}}{1-r}$$

ここで，$0<r<1$ より $\frac{3r^{N+1}}{1-r}>0$ であるから

$\frac{2+r-3r^{N+1}}{1-r}<\frac{2+r}{1-r}$ すなわち $m<\frac{2+r}{1-r}$

(4) $3-\frac{2+r}{1-r}=\frac{1-4r}{1-r}$

また $r=pq=p(1-p)=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

$0<p<1$ であるから $0<r\leqq\frac{1}{4}$

よって $\frac{1-4r}{1-r}\geqq0$ ゆえに $\frac{2+r}{1-r}\leqq3$

これと (3) で示したことから $m<3$

4 [日本医科大]

解答　(1)　$|\vec{x}|^2=\dfrac{1}{n^2}(n^2-3t)$　　(2)　$\dfrac{n!}{a!b!c!}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　　(3)　$S_n=\dfrac{3^n}{n!}$

(4)　$\dfrac{n(n-1)}{9}$　　(5)　$\dfrac{1}{n}$

解説

(1)　$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{u}=1\times1\times\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

よって　$|\vec{x}|^2=\dfrac{1}{n^2}|a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}|^2$

$$=\frac{1}{n^2}(a^2|\vec{u}|^2+b^2|\vec{v}|^2+c^2|\vec{w}|^2+2ab\vec{u}\cdot\vec{v}+2bc\vec{v}\cdot\vec{w}+2ca\vec{w}\cdot\vec{u})$$
$$=\frac{1}{n^2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=\frac{1}{n^2}\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$$
$$=\frac{1}{n^2}(n^2-3t)$$

(2)　「1 または 2」，「3 または 4」，「5 または 6」が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ であるから，

これらがそれぞれ a 回，b 回，c 回 (計 n 回) 出る確率は

$$P(a,\ b,\ c)=\frac{n!}{a!b!c!}\left(\frac{1}{3}\right)^a\left(\frac{1}{3}\right)^b\left(\frac{1}{3}\right)^c=\frac{n!}{a!b!c!}\left(\frac{1}{3}\right)^{a+b+c}=\frac{n!}{a!b!c!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　(2) から　$\dfrac{1}{a!b!c!}=\dfrac{3^n}{n!}p(a,\ b,\ c)$

$\displaystyle\sum_{(A)\text{を満たす}(a,\ b,\ c)}p(a,\ b,\ c)=1$ であるから

$$S_n=\sum_{(A)\text{を満たす}(a,\ b,\ c)}\frac{3^n}{n!}p(a,\ b,\ c)=\frac{3^n}{n!}\sum_{(A)\text{を満たす}(a,\ b,\ c)}p(a,\ b,\ c)=\frac{3^n}{n!}$$

(4)　$a=0$ または $b=0$ のとき　$ab\cdot p(a,\ b,\ c)=0$

条件 (B) を「a，b，c は，$a+b+c=n$，$a\geqq1$，$b\geqq1$，$c\geqq0$ を満たす整数」とする。

ab の期待値 $E(ab)$ は

$$E(ab)=\sum_{(A)\text{を満たす}(a,\ b,\ c)}ab\cdot\frac{n!}{a!b!c!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\sum_{(B)\text{を満たす}(a,\ b,\ c)}\frac{n!}{(a-1)!(b-1)!c!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{n!}{3^n}\sum_{(B)\text{を満たす}(a,\ b,\ c)}\frac{1}{(a-1)!(b-1)!c!}$$

ここで，$a'=a-1$，$b'=b-1$ とすると，(B) は

$a'+b'+c=n-2$，$a'\geqq0$，$b'\geqq0$，$c\geqq0$ (a'，b'，c は整数)

よって，(3) を利用すると

$$\sum_{(B)\text{を満たす}(a,\ b,\ c)}\frac{1}{(a-1)!(b-1)!c!}=\frac{3^{n-2}}{(n-2)!}$$

ゆえに　$E(ab)=\dfrac{n!}{3^n}\cdot\dfrac{3^{n-2}}{(n-2)!}=\dfrac{n(n-1)}{9}$

(5)　$E(|\vec{x}|^2)=E\left(\dfrac{1}{n^2}(n^2-3t)\right)=E\left(1-\dfrac{3}{n^2}t\right)=1-\dfrac{3}{n^2}E(t)$

$$=1-\frac{3}{n^2}E(ab+bc+ca)=1-\frac{3}{n^2}\{E(ab)+E(bc)+E(ca)\}$$

(4) から　$E(ab)=E(bc)=E(ca)=\dfrac{n(n-1)}{9}$

よって　$E(|\vec{x}|^2)=1-\dfrac{3}{n^2}\cdot3\cdot\dfrac{n(n-1)}{9}=1-\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n}$

5 [東京大]

解答　(1)　a が偶数のとき $\dfrac{a}{2}$ 億円，a が奇数のとき $\dfrac{a+1}{2}$ 億円　　(2)　a 億円

解説

(1)　a は整数でかつ $2\leqq a\leqq10$，x は整数で　$1\leqq x\leqq a-1$　$\cdots(*)$

利益の期待値を $E(x)$ 億円とする。

$x>y$ となる確率は $\dfrac{x-1}{10}$

$x=y$ となり A 氏が落札する確率は　$\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{20}$

ゆえに　$E(x)=\left(\dfrac{x-1}{10}+\dfrac{1}{20}\right)(a-x)=\dfrac{1}{20}(2x-1)(a-x)=\dfrac{1}{20}\{-2x^2+(2a+1)x-a\}$

$$=\frac{1}{20}\left\{-2\left(x-\frac{2a+1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}(2a+1)^2-a\right\}$$
$$=-\frac{1}{10}\left(x-\frac{2a+1}{4}\right)^2+\frac{1}{160}(4a^2+4a+1-8a)$$
$$=-\frac{1}{10}\left(x-\frac{2a+1}{4}\right)^2+\frac{1}{160}(2a-1)^2$$

$(*)$ から　a が偶数のとき　$\dfrac{2a+1}{4}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{4}$　　よって，$x=\dfrac{a}{2}$ で最大となる。

a が奇数のとき　$\dfrac{2a+1}{4}=\dfrac{a+1}{2}-\dfrac{1}{4}$　　よって，$x=\dfrac{a+1}{2}$ で最大となる。

(2)　(1) と同様に A 氏が x 億円の買い値を記入するとして，$E(x)$ についても同様に定義する。

$$E(x)=\sum_{y=1}^{x-1}(a-y)p_y+\frac{1}{2}(a-x)p_x$$

$$E(x+1)-E(x)=(a-x)p_x+\frac{1}{2}(a-x-1)p_{x+1}-\frac{1}{2}(a-x)p_x$$
$$=\frac{1}{2}(a-x)p_x+\frac{1}{2}(a-x)p_{x+1}-\frac{1}{2}p_{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-x)(p_x+p_{x+1})-p_{x+1}\}$$

$1\leqq x\leqq a-1$ のとき　$E(x+1)-E(x)\geqq\dfrac{1}{2}(p_x+p_{x+1}-p_{x+1})=\dfrac{1}{2}p_x>0$

$x=a$ のとき　$E(x+1)-E(x)=-\dfrac{1}{2}p_{a+1}<0$

$x>a$ のとき　$E(x+1)-E(x)\leqq\dfrac{1}{2}\{-(p_x+p_{x+1})-p_{x+1}\}<0$

ゆえに　$E(1)<E(2)<\cdots<E(a-1)<E(a)>E(a+1)>\cdots$

よって，$x=a$ で最大となる。

6 [横浜市立大]

解答　(1)　(ア)

X	15	20	25	30
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(イ)　$E(X)=\dfrac{45}{2}$，$V(X)=\dfrac{75}{4}$

(2)　(ア)　二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$　　(イ)　$X=5M+5n$

(ウ)　$E(X)=\dfrac{15}{2}n$，$\sigma(X)=\dfrac{5}{2}\sqrt{n}$　　(エ)　12

(3)　(ア)　0.003　　(イ)　[0.546，0.734]　　(4)　385

解説

(1) (ア) 10円硬貨の枚数と5円硬貨の枚数の組み合わせ，それによる X の値とそのときの確率 P を表にすると，次のようになる。

10円硬貨の枚数	0	1	2	3
5円硬貨の枚数	3	2	1	0
X	15	20	25	30
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(イ) (ア)の結果から

$$E(X)=15\cdot\frac{1}{8}+20\cdot\frac{3}{8}+25\cdot\frac{3}{8}+30\cdot\frac{1}{8}=\frac{45}{2}$$

また　$E(X^2)=225\cdot\frac{1}{8}+400\cdot\frac{3}{8}+625\cdot\frac{3}{8}+900\cdot\frac{1}{8}=525$

$$(E(X))^2=\frac{2025}{4}$$

よって　$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{75}{4}$

別解　$X=10M+5(3-M)=5M+15$

M は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うから　$E(M)=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$V(M)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

よって　$E(X)=5E(M)+15=\frac{45}{2}$

$$V(X)=5^2V(M)=\frac{75}{4}$$

(2) (ア) 箱の中から10円硬貨を取り出す確率は $\frac{1}{2}$ であるから，M は二項分布 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数である。

(イ) $X=10M+5(n-M)=5M+5n$

(ウ) $E(M)=\frac{n}{2}$，$V(M)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{4}$

ゆえに　$E(X)=5E(M)+5n=\frac{5}{2}n+5n=\frac{15}{2}n$

$$V(X)=5^2V(M)=\frac{25}{4}n$$

よって　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{5}{2}\sqrt{n}$　……①

(エ)　$\frac{\sigma(X)}{E(X)}=\frac{1}{3\sqrt{n}}$

条件から　$\frac{1}{3\sqrt{n}}<0.1$

すなわち　$\sqrt{n}>\frac{10}{3}$　　よって　$n>\frac{100}{9}=11.1\cdots\cdots$

したがって，自然数 n の最小値は12

(3) (ア) $n=100$，$p=\frac{1}{2}$ のとき，①から　$\sigma(M)=\frac{\sqrt{100}}{2}=5$

よって，$Z=\frac{M-50}{5}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$M\geqq 64$ のとき　$Z\geqq\frac{64-50}{5}=\frac{14}{5}=2.8$

よって，求める確率は

$$P(M\geqq 64)=P(Z\geqq 2.8)=0.5-0.4974=0.0026\fallingdotseq 0.003$$

(イ) 標本比率 R は　$R=\frac{64}{100}=0.64$

p に対する信頼度95％の信頼区間は

$$\left[R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\ R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right]\ \cdots\cdots②$$

ここで，$n=100$ であるから

$$1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\sqrt{\frac{0.64\times 0.36}{100}}=0.09408$$

ゆえに　$R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=0.5459\fallingdotseq 0.546$

$$R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=0.7340\fallingdotseq 0.734$$

したがって，②から，求める信頼区間は　$[0.546,\ 0.734]$

(4) ②から，信頼区間の幅は

$$R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}-\left(R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)$$

$$=2\times 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=3.92\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

これが0.1以下になるから　$3.92\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\leqq 0.1$

すなわち　$3.92\sqrt{R(1-R)}\leqq 0.1\sqrt{n}$

ここで　$R(1-R)=-R^2+R=-\left(R-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

ゆえに　$3.92\sqrt{R(1-R)}\leqq 3.92\sqrt{\frac{1}{4}}=1.96$

$1.96\leqq 0.1\sqrt{n}$ を満たす最小の n を求めればよい。

$$19.6\leqq\sqrt{n}$$

両辺を2乗して　$384.16\leqq n$

したがって，自然数 n の最小値は385

7 [滋賀大]

解答 (1) 平均はそれぞれ順に105，104，分散はそれぞれ順に $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

(2) 平均は1，分散は1

(3) 0.841

(4) $P(W'\geqq 0)>P(W\geqq 0)$

解説

(1) A店のあんパンの重さは平均105 g，標準偏差 $\sqrt{5}$ g の正規分布に従い，B店のあんパンの重さは平均104 g，標準偏差 $\sqrt{2}$ g の正規分布に従う。

よって，$\overline{X}$，$\overline{Y}$ の期待値 $E(\overline{X})$，$E(\overline{Y})$ は　$E(\overline{X})=105$，$E(\overline{Y})=104$

また，$\overline{X}$，$\overline{Y}$ の分散 $V(\overline{X})$，$V(\overline{Y})$ は

$$V(\overline{X})=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{1}{2},\ V(\overline{Y})=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(2) W の期待値 $E(W)$ は　$E(W)=E(\overline{X}-\overline{Y})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=105-104=1$

また，$\overline{X}$ と $\overline{Y}$ は独立であるから，W の分散 $V(W)$ は

$$V(W)=V(\overline{X}-\overline{Y})=1^2V(\overline{X})+(-1)^2V(\overline{Y})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(3) W は正規分布 $N(1,\ 1)$ に従うから，$Z=\frac{W-1}{\sqrt{1}}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$P(W\geqq 0)=P(Z\geqq -1)=P(-1\leqq Z\leqq 0)+P(Z\geqq 0)$

$$=P(0\leqq Z\leqq 1)+P(Z\geqq 0)=0.341+0.5=0.841$$

(4) 同様にして，$\overline{X'}$，$\overline{Y'}$ の期待値 $E(\overline{X'})$，$E(\overline{Y'})$ は　$E(\overline{X'})=105$，$E(\overline{Y'})=104$

また，$\overline{X'}$，$\overline{Y'}$ の分散 $V(\overline{X'})$，$V(\overline{Y'})$ は

$$V(\overline{X'})=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}}\right)^2=\frac{1}{5},\ V(\overline{Y'})=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\right)^2=\frac{1}{4}$$

さらに，W' の期待値 $E(W')$ は

$$E(W')=E(\overline{X'}-\overline{Y'})=E(\overline{X'})-E(\overline{Y'})=105-104=1$$

また，$\overline{X'}$ と $\overline{Y'}$ は独立であるから，W' の分散 $V(W')$ は

$$V(W')=V(\overline{X'}-\overline{Y'})=1^2V(\overline{X'})+(-1)^2V(\overline{Y'})=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20}$$

W' は正規分布 $N\left(1,\ \frac{9}{20}\right)$ に従うから，$Z'=\frac{W'-1}{\sqrt{\frac{9}{20}}}$ とおくと，Z' は $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$P(W'\geqq 0)=P\left(Z'\geqq -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

$-\frac{2\sqrt{5}}{3}<-1$ であるから　$P\left(Z'\geqq -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)\geqq P(Z\geqq -1)$

したがって　$P(W'\geqq 0)>P(W\geqq 0)$