1

(解説)

(1)　箱から1枚のカードを無作為に取り出すとき，$X=2a$ となる確率は　$\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}a}$

$a=5$ のとき，確率変数 X の確率分布は次の表のようになる。

X	2	4	6	8	10	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって，X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}+10\cdot\frac{1}{5}$$
$$=(2+4+6+8+10)\cdot\frac{1}{5}={}^{ウ}6$$

分散 $V(X)$ は　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=2^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{5}+6^2\cdot\frac{1}{5}+8^2\cdot\frac{1}{5}+10^2\cdot\frac{1}{5}-6^2$$
$$=(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)\cdot\frac{1}{5}-36$$
$$=44-36={}^{エ}8$$

したがって　$E(sX+t)=sE(X)+t=6s+t$

$V(sX+t)=s^2V(X)=8s^2$

$E(sX+t)=20$，$V(sX+t)=32$ より　$6s+t=20$，$8s^2=32$

$s>0$ であるから　$s={}^{オ}2$，$t={}^{カ}8$

このとき，$2X+8\geqq 20$ を解くと　$X\geqq 6$

よって，$2X+8$ が20以上である確率は

$$P(6\leqq X\leqq 10)=P(X=6)+P(X=8)+P(X=10)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0.{}^{キ}6$$

(2)　取り出す3枚のカードをどのように選んでも，それらを横1列に並べる $3!=6$ 通りの並べ方のうち，数字が左から小さい順に並んでいる並べ方は1通りしかない。

よって，事象 A の起こる確率は　$\dfrac{{}^{ク}1}{{}^{ケ}6}$

事象 A が，ちょうど n 回起こる確率は，${}_{180}\mathrm{C}_n\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\left(\dfrac{5}{6}\right)^{180-n}$ であるから，確率変数 Y は，二項分布 $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。

したがって，Y の平均 m は　$m=180\cdot\dfrac{1}{6}=^{\text{コサ}}30$

分散 σ^2 は　$\sigma^2=180\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=^{\text{シス}}25$

試行回数 180 は大きいことから，Y は近似的に正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従う。

ここで，$Z=\dfrac{Y-30}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$$\begin{aligned}P(18\leqq Y\leqq 36)&=P(-^{\text{セ}}2.^{\text{ソタ}}40\leqq Z\leqq ^{\text{チ}}1.^{\text{ツテ}}20)\\&=p(2.40)+p(1.20)\\&=0.4918+0.3849\\&=0.8767\end{aligned}$$

したがって　$P(18\leqq Y\leqq 36)=0.^{\text{トナ}}88$

(3)　400 人の有権者のうち，320 人が賛成であったから，標本比率 R は

$$R=\frac{320}{400}=\frac{4}{5}=0.^{\text{ニ}}8$$

また，標本の大きさは，$n=400$ であるから

$$\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=0.02$$

したがって，p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$[0.8-1.96\cdot0.02,\ 0.8+1.96\cdot0.02]$$

すなわち　$[0.7608,\ 0.8392]$

よって　$0.^{\text{ヌネ}}76\leqq p\leqq 0.^{\text{ノハ}}84$

標本の大きさ n，標本比率 R の p に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅は，n が大きいとき　$2\times1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=3.92\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

よって　$$\begin{aligned}L_1&=3.92\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=3.92\sqrt{\frac{0.16}{400}}\\L_2&=3.92\sqrt{\frac{0.6\times(1-0.6)}{400}}=3.92\sqrt{\frac{0.24}{400}}\\L_3&=3.92\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{500}}=3.92\sqrt{\frac{0.16}{500}}\end{aligned}$$

したがって，$L_1<L_2$ かつ $L_3<L_1$ より　$L_3<L_1<L_2$　（$^{\text{ヒ}}$ ④）

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　1 ラジアンとは，

半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ $\left({}^{ア}②\right)$

である。

(2)　144° を弧度法で表すと　$\dfrac{144}{180}\pi=\dfrac{{}^{イ}4}{{}^{ウ}5}\pi$

$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアン を度数法で表すと　$\dfrac{23}{12}\times180^\circ={}^{エオカ}345^\circ$

(3)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$ ……① について，$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおくと

$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$　すなわち　$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{{}^{キ}6}\right)=1$

加法定理により　$(\text{左辺})=2\sin x-2\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

よって，① は　$\sin x-\sqrt{{}^{ク}3}\cos x=1$

さらに，左辺について，三角関数の合成を用いると　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

すなわち　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{{}^{ケ}3}\right)=\dfrac{1}{{}^{コ}2}$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-\dfrac{\pi}{3}=\theta-\dfrac{2}{15}\pi$ であるから　$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ より　$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{15}\pi\leqq\theta-\dfrac{2}{15}\pi\leqq\pi-\dfrac{2}{15}\pi$

この範囲において，$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ を満たすのは　$\theta-\dfrac{2}{15}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{{}^{サシ}29}{{}^{スセ}30}\pi$

$\boxed{3}$

(解説)

2の倍数でも3の倍数でもないということは，6で割って1または5余るということであるから，数列は $\{a_n\}$：1，5，7，11，13，17，19，……

よって，奇数番目には1余る数が，偶数番目には5余る数が小さい順に並ぶ.

これらはどちらも公差6の等差数列であるから

$a_{2n-1}=1+6(n-1)=6n-5$ …… ①

$a_{2n}=5+6(n-1)=6n-1$ …… ②

(1) $1003=6\times167+1=6\times168-5$　　よって，①から　$n=168$

ゆえに　$1003=a_{168\times2-1}=a_{335}$ すなわち　第335項

(2) ②から　$a_{2000}=a_{2\times1000}=6\times1000-1=5999$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2m}a_n&=(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2m-1})+(a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{2m})\\&=\sum_{n=1}^{m}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{m}a_{2n}\\&=\sum_{n=1}^{m}(a_{2n-1}+a_{2n})\\&=\sum_{n=1}^{m}(12n-6)\\&=12\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-6m\\&=6m^2\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

(解説)

① の両辺を x で微分して　$f'(x)+g'(x)=3ax^2+2bx+c$

これと ② から　$3a=b$，$2b=c$，$c=d$

よって　$b=3a$，$c=d=6a$

ゆえに，① から　$f(x)+g(x)=ax^3+3ax^2+6ax+6a$ …… ④

③ の両辺を x で微分して　$f(x)-g(x)=3x^2-2ax+a$ …… ⑤

④，⑤ から

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{a}{2}x^3+\dfrac{3}{2}(a+1)x^2+2ax+\dfrac{7}{2}a \\ g(x)=\dfrac{a}{2}x^3+\dfrac{3}{2}(a-1)x^2+4ax+\dfrac{5}{2}a \end{cases} \quad \cdots\cdots ⑥$$

③ で $x=a$ とおくと　$0=a^3-a^3+a^2-2$　　これを解いて　$a=\pm\sqrt{2}$

これを ⑥ に代入する．

$a=\sqrt{2}$ のとき

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x^3+\frac{3}{2}(\sqrt{2}+1)x^2+2\sqrt{2}x+\frac{7\sqrt{2}}{2},$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x^3+\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)x^2+4\sqrt{2}x+\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$a=-\sqrt{2}$ のとき

$$f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^3-\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)x^2-2\sqrt{2}x-\frac{7\sqrt{2}}{2},$$

$$g(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^3-\frac{3}{2}(\sqrt{2}+1)x^2-4\sqrt{2}x-\frac{5\sqrt{2}}{2}$$