1

(解説)

$BC=6$, $BD:DC=1:5$ であるから

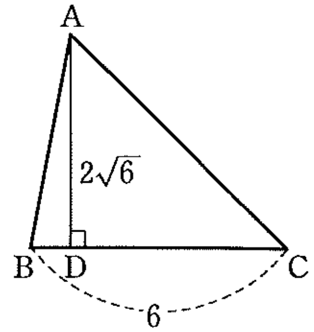
$$BD=1,\ CD=5$$

よって，$\triangle ABD$ において，三平方の定理により

$$AB=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{25}={}^{\text{ア}}5$$

$\triangle ACD$ において，三平方の定理により

$$AC=\sqrt{5^2+(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{49}={}^{\text{イ}}7$$

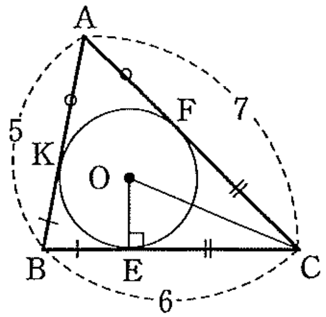


$\triangle ABC$ の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)=\frac{1}{2}r(5+6+7)=9r$$

一方　$S=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

よって　$9r=6\sqrt{6}$　　したがって　$r=\dfrac{{}^{\text{ウ}}2\sqrt{{}^{\text{エ}}6}}{{}^{\text{オ}}3}$



内接円が辺 AB に接する点を K とすると

$$AK=AF,\ BK=BE,\ CE=CF$$

$CE=CF=x$ とおくと　$AF=7-x$, $BE=6-x$

よって　$AK=7-x$, $BK=6-x$

$AK+BK=5$ であるから　$(7-x)+(6-x)=5$

よって　$x=4$　　すなわち　$CE=CF={}^{\text{カ}}4$

$\triangle OEC$ において　$\angle OEC=90°$, $OE=r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

ゆえに，三平方の定理より

$$CO=\sqrt{OE^2+CE^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+4^2}=\sqrt{\frac{168}{9}}=\frac{{}^{\text{キ}}2\sqrt{{}^{\text{クケ}}42}}{{}^{\text{コ}}3}$$

線分 CO と円 O の交点を I とする。

$\triangle CEF$ は $CE=CF$ の二等辺三角形であり，

CO はその頂角の二等分線であるから，

CO は辺 EF の垂直二等分線でもある。

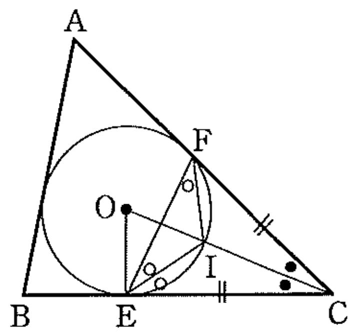
よって　$IE=IF$

ゆえに　$\angle IEF=\angle IFE$　……①

また，接線と弦の作る角により

$$\angle IEC=\angle IFE\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　$\angle IEF=\angle IEC$



よって，$\triangle CEF$ において，点 I は $\angle E$ の二等分線上にある。

点 I は $\angle C$ の二等分線上にもあるから，点 I は $\triangle CEF$ の内心である。

したがって，求める距離は，線分 OI の長さ，すなわち円 O の半径 r であるから

$$\frac{{}^{\text{サ}}2\sqrt{{}^{\text{シ}}6}}{{}^{\text{ス}}3}$$

2

(解説)

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$, $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ から y を消去して整理すると

$$x^2-2ax+a^3+a^2-3a=0\quad\cdots\cdots①$$

$y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$, $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ が異なる 2 点で交わるから，x の 2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ。

よって，① の判別式 D について　$D>0$

$$\frac{D}{4}=a^2-(a^3+a^2-3a)=-a^3+3a=-a(a^2-3)>0$$

$a>0$ であるから　$a^2-3<0$　　これを解くと　$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

$a>0$ であるから　$0<a<\sqrt{3}$

(2)　2 次方程式 ① の解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\left\{-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2-\left(\frac{1}{2}x^2-3a\right)\right\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

ここで，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a^3+a^2-3a$

よって　$S(a)=\dfrac{1}{6}\{(2a)^2-4(a^3+a^2-3a)\}^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{6}\cdot4^{\frac{3}{2}}(3a-a^3)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}(3a-a^3)^{\frac{3}{2}}$

(3)　$f(a)=3a-a^3$ とおくと　$f'(a)=3-3a^2=-3(a+1)(a-1)$

$f'(a)=0$ とすると　$a=-1,\ 1$

$0<a<\sqrt{3}$ における $f(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	…	1	…	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$		↗	2	↘	

よって，$f(a)$ は $a=1$ のとき最大値 2 をとる。

$f(a)$ が最大となるとき，$S(a)$ も最大となる。

$$S(1)=\frac{4}{3}\times2^{\frac{3}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

よって，$S(a)$ は $a=1$ のとき最大値 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

(1) △ABCは辺ABを斜辺とする直角三角形であるから，CA⊥CBより

$$\frac{a^2-c^2}{a-c}\cdot\frac{b^2-c^2}{b-c}=-1$$

$$(a+c)(b+c)=-1$$

したがって　$a=-c-\dfrac{1}{b+c}$

(2) (1)より　$b-a=b-\left(-c-\dfrac{1}{b+c}\right)=(b+c)+\dfrac{1}{b+c}$　……①

$a<b$ より $b-a>0$ であるから，① は正である。

したがって　$b+c>0$

よって，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$(b+c)+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

したがって ① から　$b-a\geqq 2$

(3) $AB^2=(b-a)^2+(b^2-a^2)^2$

$=(b-a)^2+(b-a)^2(b+a)^2=(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}$

ここで，(2) より　$(b-a)^2\geqq 4$　……②

また，a，b は実数であるから　$1+(b+a)^2\geqq 1$　……③

したがって　$AB^2\geqq 4$　　すなわち　$AB\geqq 2$　……④

④ の等号が成り立つのは，② と ③ の等号が同時に成り立つときである。

したがって，$b-a=2$ かつ $b+a=0$ のとき，すなわち $a=-1$，$b=1$ のとき ④ の等号が成り立つ。

$a=-1$，$b=1$ のとき，(1) より $c=0$ であるから

ABは，A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ 1)$，C$(0,\ 0)$ のとき最小値2をとる。