$\boxed{1}$

(解説)

(1)　X の確率分布は右のようになる。

X	0	1	2	3	計
$P(X)$	$\frac{612}{720}$	$\frac{54}{720}$	$\frac{36}{720}$	$\frac{18}{720}$	1

よって

$$E(X)=0\cdot\frac{612}{720}+1\cdot\frac{54}{720}+2\cdot\frac{36}{720}+3\cdot\frac{18}{720}$$

$$=\frac{180}{720}=\frac{^{ア}1}{^{イ}4}$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{612}{720}+1^2\cdot\frac{54}{720}+2^2\cdot\frac{36}{720}+3^3\cdot\frac{18}{720}=\frac{360}{720}=\frac{^{ウ}1}{^{エ}2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-\{E(X)\}^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{^{オ}7}}{^{カ}4}$$

(2)　確率変数 Y は二項分布 $B(600,\ p)$ に従う。

$p=0.4$ のとき　　$E(Y)=600\times0.4={}^{キクケ}240$

$$\sigma(Y)=\sqrt{600\times0.4\times0.6}=\sqrt{144}={}^{コサ}12$$

$Z=\dfrac{Y-240}{12}$ とおくと，確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(Y\leqq215)=P\left(Z\leqq-\dfrac{25}{12}\right)$ であり，$-\dfrac{25}{12}\fallingdotseq-2.08$ であるから

$$P(Y\leqq215)=P(Z\leqq-2.08)=0.5-p(2.08)=0.5-0.4812=0.0188\fallingdotseq0.{}^{シス}02$$

$p=0.2$ のとき，Y の平均 $E_{0.2}(Y)$ は　　$E_{0.2}(Y)=600\times0.2=120$

よって，$E_{0.2}(Y)$ は $E(Y)$ の $\dfrac{1}{^{セ}2}$ 倍である。

また，Y の標準偏差 $\sigma_{0.2}(Y)$ は　　$\sigma_{0.2}(Y)=\sqrt{600\times0.2\times0.8}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

よって，$\sigma_{0.2}(Y)$ は $\sigma(Y)$ の $\dfrac{\sqrt{^{ソ}6}}{3}$ 倍である。

(3)　$E(U_1)=E(U_2)=\cdots\cdots=E(U_n)=m-{}^{タチ}60$

$$\sigma(U_1)=\sigma(U_2)=\cdots\cdots=\sigma(U_n)={}^{ツテ}30$$

U_1，U_2，……，U_{100} の標本平均が 50 分であることから，t の信頼区間は

$$50-1.96\cdot\frac{30}{\sqrt{100}}\leqq t\leqq50+1.96\cdot\frac{30}{\sqrt{100}}$$

$$50-5.88\leqq t\leqq50+5.88$$

よって　　${}^{トナ}44.{}^{ニ}1\leqq t\leqq{}^{ヌネ}55.{}^{ノ}9$

$\boxed{2}$

解説

(1) $a_2=\dfrac{1+3}{1+1}\{3a_1+3^{1+1}-(1+1)(1+2)\}=\dfrac{4}{2}(3\cdot0+9-2\cdot3)={}^{ア}6$

(2) $b_1=\dfrac{a_1}{3^1(1+1)(1+2)}=\dfrac{0}{3\cdot2\cdot3}={}^{イ}0$

① の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}\cdot\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$
$$=\frac{3a_n}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}+\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}-\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}$$

よって　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{{}^{ウ}1}{(n+{}^{エ}1)(n+{}^{オ}2)}-\left(\dfrac{1}{{}^{カ}3}\right)^{n+1}$

$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$ であるから

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{{}^{キ}1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項は　$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

n を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-2}{2(n+1)}=\frac{1}{{}^{ク}2}\left(\frac{n-{}^{ケ}1}{n+{}^{コ}1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{{}^{サ}1}{{}^{シ}6}-\frac{{}^{ス}1}{{}^{セ}2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

よって

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right\}=0+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{3(n-1)-(n+1)}{6(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$
$$=\frac{n-{}^{ソ}2}{{}^{タ}3(n+{}^{チ}1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\quad(n\geqq2)$$

$\dfrac{-1}{3\cdot2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=0$ より，これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3) (2) より，すべての自然数 n について　$\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n-2}{3(n+1)}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{3^n(n+1)(n+2)(n-2)}{3(n+1)}+\frac{3^n(n+1)(n+2)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$={}^{ツ}3^{n-{}^{テ}1}(n^2-{}^{ト}4)+\frac{(n+{}^{ナ}1)(n+{}^{ニ}2)}{{}^{ヌ}2}$$

すべての自然数 n について，$3^{n-1}(n^2-4)$，$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ は整数であるから，a_n は整数である。

(4)　n が自然数のとき，$3^{n-1}(n^2-4)$ を 3 で割った余りは 0 であるから，a_n を 3 で割った余りは $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ を 3 で割った余りに等しい。

[1]　$n=3k$ (k は自然数) のとき

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}=\frac{9k^2+9k+2}{2}=3\cdot\frac{3k(k+1)}{2}+1$$

$\dfrac{3k(k+1)}{2}$ は整数であるから，a_{3k} を 3 で割った余りは　${}^{ネ}1$

[2]　$n=3k+1$ (k は自然数) のとき

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(3k+2)(3k+3)}{2}=3\cdot\frac{(3k+2)(k+1)}{2}=3\left\{\frac{3k(k+1)}{2}+k+1\right\}$$

$\dfrac{3k(k+1)}{2}+k+1$ は整数であるから，a_{3k+1} を 3 で割った余りは　${}^{ノ}0$

[3]　$n=3k+2$ (k は自然数) のとき

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(3k+3)(3k+4)}{2}=3\cdot\frac{(k+1)(3k+4)}{2}=3\left\{\frac{3k(k+1)}{2}+2(k+1)\right\}$$

$\dfrac{3k(k+1)}{2}+2(k+1)$ は整数であるから，a_{3k+2} を 3 で割った余りは　${}^{ハ}0$

[1] ～ [3] と $a_1=0$，$a_2=6$ より，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは，1 から 2020 までの自然数の中に含まれる 3 の倍数の個数を 3 で割った余りに等しい。

$2020=3\times673+1$ であるから，1 から 2020 までの自然数の中に含まれる 3 の倍数の個数は　673

$673=3\times224+1$ であるから，求める余りは　${}^{ヒ}1$

参考　(合同式を用いる)

$a_{3k}\equiv1\pmod 3$，$a_{3k+1}\equiv0\pmod 3$，$a_{3k+2}\equiv0\pmod 3$ であるから，求める余りは

$$\sum_{k=1}^{2020}a_k\equiv0+0+1+0+0+1+\cdots\cdots+1+0\pmod 3$$

$$\equiv673\pmod 3$$

$$\equiv1\pmod 3$$

$\boxed{3}$

(解説)

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

条件から　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{m}{2}|\vec{a}|^2, |\vec{b}|^2=\dfrac{m}{n}|\vec{a}|^2$　　ゆえに　$\cos^2\theta=\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}=\dfrac{mn}{4}$

$0\leqq\cos^2\theta\leqq 1$ から　$0\leqq mn\leqq 4$

m，n は $0<m\leqq n$ を満たす整数であるから　$(m, n)=(1, 1)$，$(1, 2)$，$(1, 3)$，$(1, 4)$

または　$(2, 2)$　　よって，このとき，$\cos^2\theta$ の値はそれぞれ $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4}$，1 であり，

したがって，$\cos\theta\ (>0)$ の値は $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，1 である．

よって，θ の値はそれぞれ $60°$，$45°$，$30°$，$0°$ である．

ゆえに，$\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{n}{m}$ であるから $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\sqrt{\dfrac{n}{m}}=k$ とおくと

$\theta=60°$ のとき　$k=1$　$(m, n)=(1, 1)$

$\theta=45°$ のとき　$k=\sqrt{2}$　$(m, n)=(1, 2)$

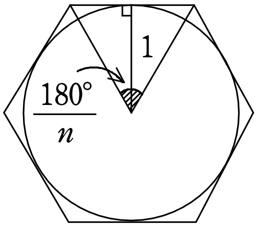
$\theta=30°$ のとき　$k=\sqrt{3}$　$(m, n)=(1, 3)$

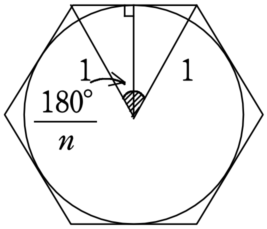
$\theta=0°$ のとき　$k=2, 1$　$(m, n)=(1, 4)$，$(2, 2)$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　図から　$a_n = n\tan\dfrac{180°}{n}$，$b_n = n\sin\dfrac{180°}{n}$





(2)　$0° < \theta < 90°$ から　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$，$\tan\theta > 0$

よって　$\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}} = \dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}} = \sin\theta$

また　$\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$$\left(\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right)^2 = \left(\frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}}\right)^2 = \left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$\tan\dfrac{\theta}{2} > 0$，$\dfrac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}} > 0$ から $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

(3)　$a_{12} = 12\tan 15°$

(2) から　$\tan 15° = \dfrac{\tan 30°}{1+\sqrt{1+\tan^2 30°}} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}} = 2-\sqrt{3}$

ゆえに　$a_{12} = 12(2-\sqrt{3})$

$$b_{12} = 12\sin 15° = \frac{12\tan 15°}{\sqrt{1+\tan^2 15°}} = \frac{12(2-\sqrt{3})}{\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}} = \frac{12(2-\sqrt{3})}{\sqrt{8-2\sqrt{12}}} = \frac{12(2-\sqrt{3})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{12(2-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = 3\sqrt{2}(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$