$\boxed{1}$

(解説)

(1)　確率変数 W は，n 回の反復試行において事象 A が起こる回数を表しているから，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

よって　$m=np,\ \sigma=\sqrt{np(1-p)}$

条件から　$np=\dfrac{1216}{27}$ ……①，　$\sqrt{np(1-p)}=\dfrac{152}{27}$ ……②

②から　$np(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}$

ゆえに，①から　$\dfrac{1216}{27}(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}$　　すなわち　$1-p=\dfrac{152^2}{27^2}\cdot\dfrac{27}{1216}$

よって　$1-p=\dfrac{19}{27}$　　ゆえに　$p=1-\dfrac{19}{27}=\dfrac{^{\text{エ}}8}{^{\text{オカ}}27}$

したがって，①から　$n=\dfrac{1216}{27}\cdot\dfrac{27}{8}={}^{\text{アイウ}}152$

(2)　$W\geqq 38$ となる確率を求める場合，n は大きいと考えられるので，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 W は，近似的に正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$\sigma>0$ であるから，$W\geqq 38$ のとき　$\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq\dfrac{38-m}{\sigma}=\dfrac{38-\dfrac{1216}{27}}{\dfrac{152}{27}}=-1.25$

よって　$P(W\geqq 38)=P\left(\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq -{}^{\text{キ}}1.{}^{\text{クケ}}25\right)$

さらに，標準正規分布の分布曲線が y 軸に関して対称であることから

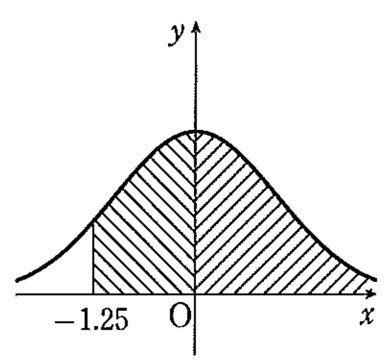
$$P(Z\geqq -1.25)=P(Z\geqq 0)+P(-1.25\leqq Z\leqq 0)$$
$$=0.5+P(0\leqq Z\leqq 1.25)$$

ここで，正規分布表より　$P(0\leqq Z\leqq 1.25)=0.3944$

であるから

$$P(Z\geqq -1.25)=0.5+0.3944=0.8944$$

よって　$P(Z\geqq -1.25)=0.{}^{\text{コサ}}89$



(3)　確率変数 X について，$a\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}a$ となる確率 $P\left(a\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}a\right)$ は

$$P\left(a\leqq X\leqq\frac{3}{2}a\right)=\int_a^{\frac{3}{2}a}f(x)dx=\int_a^{\frac{3}{2}a}\frac{1}{3a^2}(2a-x)dx=\frac{1}{3a^2}\left[2ax-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{\frac{3}{2}a}$$
$$=\frac{1}{3a^2}\left[\left\{2a\cdot\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a\right)^2\right\}-\left(2a\cdot a-\frac{1}{2}a^2\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{3}{8}a^2=\frac{^{\text{シ}}1}{^{\text{ス}}8}$$

また，確率変数 X の平均は

$$E(X)=\int_{-a}^{2a}xf(x)dx=\int_{-a}^{0}x\cdot\frac{2}{3a^2}(x+a)dx+\int_0^{2a}x\cdot\frac{1}{3a^2}(2a-x)dx$$
$$=\frac{2}{3a^2}\int_{-a}^{0}x(x+a)dx+\frac{1}{3a^2}\int_0^{2a}x(2a-x)dx$$
$$=\frac{2}{3a^2}\left[-\frac{1}{6}\{0-(-a)\}^3\right]+\frac{1}{3a^2}\left\{\frac{1}{6}(2a-0)^3\right\}=-\frac{a}{9}+\frac{4a}{9}=\frac{^{\text{セ}}a}{^{\text{ソ}}3}$$

確率変数 Y は $Y=2X+7$ を満たすから

$$E(Y)=E(2X+7)=2E(X)+7=2\cdot\frac{a}{3}+7=\frac{^{\text{タチ}}2a}{^{\text{ツ}}3}+{}^{\text{テ}}7$$

参考　連続型確率変数 X と定数 a，b に対しても，$Y=aX+b$ とすると，Y も確率変数となり，Y の平均 (期待値) $E(Y)$，分散 $V(Y)$ について

$$E(Y)=aE(X)+b,\ V(Y)=a^2V(X)$$

が成り立つ。

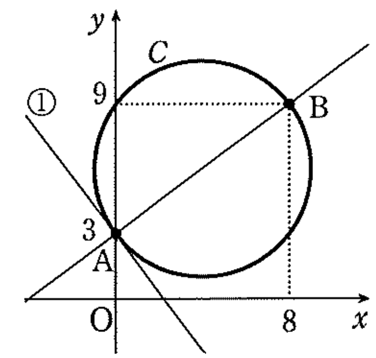
$\boxed{2}$

(解説)

(1) 2点 A，B を通る直線の方程式は

$$y-3=\frac{9-3}{8-0}(x-0)$$

すなわち　$y=\dfrac{{}^{\text{ア}}3}{{}^{\text{イ}}4}x+{}^{\text{ウ}}3$



(2) $AB=\sqrt{(8-0)^2+(9-3)^2}=\sqrt{100}={}^{\text{エオ}}10$

(3) 円 C の中心は直径の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+8}{2},\ \frac{3+9}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (4,\ 6)$$

円 C の直径は 10 であるから，半径は 5 である。

よって，円 C の方程式は　$(x-{}^{\text{カ}}4)^2+(y-{}^{\text{キ}}6)^2={}^{\text{クケ}}25$

また，A における円 C の接線の方程式は，直線 AB と垂直に交わるから，その傾きを m とすると　$\dfrac{3}{4}\cdot m=-1$　すなわち　$m=-\dfrac{4}{3}$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-0)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{{}^{\text{コサ}}-4}{{}^{\text{シ}}3}x+{}^{\text{ス}}3$$

(4) $P(x,\ y)$ とする。

直線 AB の方程式は $3x-4y+12=0$ と変形できるから，点 P と直線 AB との距離を d とすると　$d=\dfrac{|3x-4y+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{1}{5}|3x-4y+12|$

$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot d$ であるから，$\triangle ABP$ の面積が 20 のとき

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{1}{5}|3x-4y+12|=20\quad \text{すなわち}\quad |3x-4y+12|=20$$

よって　$3x-4y+12=\pm 20$

したがって，求める軌跡は，2直線　$y=\dfrac{{}^{\text{セ}}3}{{}^{\text{ソ}}4}x+{}^{\text{タ}}8$　と　$y=\dfrac{3}{4}x-{}^{\text{チ}}2$　である。

(5) $y=-\dfrac{4}{3}x+3$ と $y=\dfrac{3}{4}x+8$ を連立して解くと　$x=-\dfrac{12}{5}$

よって，直線①と直線②の交点の x 座標は　$\dfrac{{}^{\text{ツテト}}-12}{{}^{\text{ナ}}5}$

$y=\dfrac{3}{4}x+8$ を $(x-4)^2+(y-6)^2=25$ に代入して，整理すると　$5x^2-16x-16=0$

因数分解して　$(x-4)(5x+4)=0$

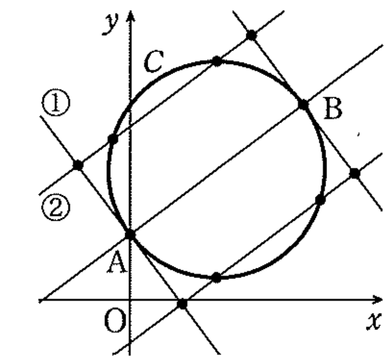
よって　$x=4,\ -\dfrac{4}{5}$

したがって，円 C と直線②の交点の x 座標は　${}^{\text{ニ}}4$　と　$\dfrac{{}^{\text{ヌネ}}-4}{{}^{\text{ノ}}5}$

(6) 三角形ABP が直角三角形となるのは次の3つの場合がある。

(i) $\angle APB=90^\circ$　(ii) $\angle PAB=90^\circ$　(iii) $\angle PBA=90^\circ$

(i) $\angle APB=90^\circ$ のとき



円周角の定理より，$\angle APB=90^\circ$ のとき点 P は円 C 上にあるから，条件を満たす点 P の個数は，円 C と直線 $y=\dfrac{3}{4}x+8$ および円 C と直線 $y=\dfrac{3}{4}x-2$ の交点の個数に等しい。

2直線 $y=\dfrac{3}{4}x+8$ および $y=\dfrac{3}{4}x-2$ は，ともに円 C の中心からの距離が等しく，直線 $y=\dfrac{3}{4}x+8$ は，円 C と相異なる2点で交わることから，直線 $y=\dfrac{3}{4}x-2$ も円 C と相異なる2点で交わる。

したがって，条件を満たす点 P の個数は 4 個である。

(ii) $\angle PAB=90^\circ$ のとき

条件を満たす点 P の個数は，点 A における円 C の接線と，2直線 $y=\dfrac{3}{4}x+8$ および $y=\dfrac{3}{4}x-2$ の交点の個数に等しい。

したがって，条件を満たす点 P の個数は 2 個である。

(iii) $\angle PBA=90^\circ$ のとき

条件を満たす点 P の個数は，点 B における円 C の接線と，2直線 $y=\dfrac{3}{4}x+8$ および $y=\dfrac{3}{4}x-2$ の交点の個数に等しい。

したがって，条件を満たす点 P の個数は 2 個である。

以上より，三角形 ABP の面積が 20 であり，かつ三角形 ABP が直角三角形であるような点 P は全部で　$4+2+2={}^{\text{ハ}}8$（個）

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $f(x)=|2-|x-1||$ において

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geqq 1) \\ -x+1 & (x<1) \end{cases}$$ であるから

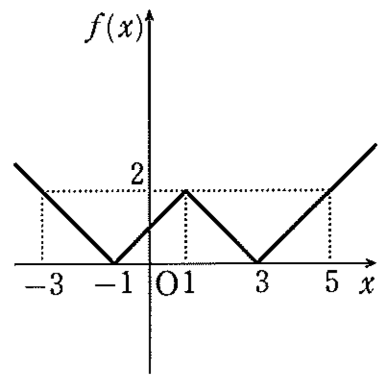
$x\geqq 1$ のとき $f(x)=|2-(x-1)|=|3-x|$

$$=\begin{cases} x-3 & (x\geqq 3) \\ -x+3 & (x<3) \end{cases}$$

$x<1$ のとき $f(x)=|2+x-1|=|x+1|$

$$=\begin{cases} x+1 & (x\geqq -1) \\ -x-1 & (x<-1) \end{cases}$$

よって，グラフは右の図のようになる．



(2) $a>0$ から

$0<a\leqq 1$ のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{a}(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-a}^{a}=2a$

$1<a\leqq 3$ のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{a} f(x)dx$$

$$=\int_{-a}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{1}^{a}(-x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-a}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{1}^{a}=2a$$

$3<a$ のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{a} f(x)dx$$

$$=\int_{-a}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{1}^{3}(-x+3)dx+\int_{3}^{a}(x-3)dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-a}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{1}^{3}+\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_{3}^{a}$$

$$=a^2-4a+9$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1) 点 $(1,\ 0)$ を通り，傾きが -4 の直線の方程式は

$y=-4(x-1)$ すなわち $y=-4x+4$

$y=x^2-4x$ のグラフと直線 $y=-4x+4$ の共有点の x 座標は，$x^2-4x=-4x+4$ から $x=\pm 2$

よって，共有点の座標は $(2,\ -4)$，$(-2,\ 12)$

(2) [1] $a>1$ のとき

直線 $y=-4(x-a)$ は，直線 $y=-4x+4$ と平行で，常に上側にあるから，直線 $y=-4(x-a)$ は $y=x^2-4x$ のグラフの $-2\leqq x\leqq 2$ の部分と共有点をもたない．

[2] $a<0$ のとき

原点における，放物線 $y=x^2-4x$ の接線の方程式は $y=-4x$

直線 $y=-4(x-a)$ は $y=-4x$ と平行で，常に下側にあるから，直線 $y=-4(x-a)$ は $y=x^2-4x$ のグラフの $-2\leqq x\leqq 2$ の部分と共有点をもたない．

[3] $0\leqq a\leqq 1$ のとき

直線 $y=k(x-a)$ と x 軸との交点 $(a,\ 0)$ は，2 点 $(0,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を結ぶ線分上にある．

$k\geqq -4$ のとき，直線 $y=k(x-a)$ と $y=x^2-4x$ のグラフは，少なくとも 1 つの共有点を $-2\leqq x<1$ でもち，$k<-4$ のとき，少なくとも 1 つの共有点を $0\leqq x<2$ でもつ．

以上から，求める a の値の範囲は $0\leqq a\leqq 1$