第７章　１次関数　例題

1

解説

(1)　y を x の式で表すと

$y=50\times x+150$

$y=50x+150$

よって，y は x の１次関数である。

(2)　y を x の式で表すと

$y=200-x\times 2$

$y=-2x+200$

よって，y は x の１次関数である。

(3)　y を x の式で表すと

$y=x^2$

よって，y は x の１次関数でない。

(4)　y を x の式で表すと

$y=\dfrac{30}{x}$

よって，y は x の１次関数でない。

(5)　y を x の式で表すと

$y=\dfrac{1}{2}\times 1\times x$

$y=\dfrac{1}{2}x$

よって，y は x の１次関数である。

2

解説

(1)　１次関数 $y=-3x+1$ で，x の値が２から４まで増加するとき，

x の増加量は　$4-2=2$

y の増加量は　$(-3\times 4+1)-(-3\times 2+1)=-6$

よって，求める変化の割合は　$\dfrac{-6}{2}=-3$

(2)　１次関数 $y=-3x+1$ で，x の値が -5 から -2 まで増加するとき，

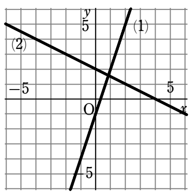
x の増加量は　$-2-(-5)=3$

y の増加量は　$\{-3\times(-2)+1\}-\{-3\times(-5)+1\}=-9$

よって，求める変化の割合は　$\dfrac{-9}{3}=-3$

3

解説



4

解説

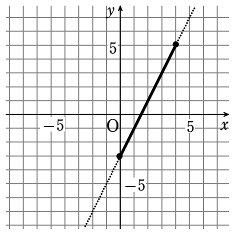
(1)　１次関数 $y=2x-3$ について，

$x=0$ のとき　$y=-3$

$x=4$ のとき　$y=5$

よって，グラフは図の実線部分で，値域は

$-3\leqq y\leqq 5$



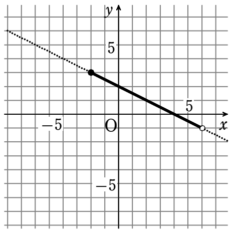
(2)　１次関数 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ について，

$x=-2$ のとき　$y=3$

$x=6$ のとき　$y=-1$

よって，グラフは図の実線部分で，値域は

$-1<y\leqq 3$



5

解説

(1) について

点 $(0,\ 3)$ を通るから，切片は３である。

また，グラフでは，右へ１進むとき，上へ２だけ進むから，傾きは２である。

よって，求める式は　$y=2x+3$

(2) について

点 $(0,\ -2)$ を通るから，切片は -2 である。

また，グラフでは，右へ３進むとき，下へ１だけ進むから，傾きは $-\dfrac{1}{3}$ である。

よって，求める式は　$y=-\dfrac{1}{3}x-2$

6

解説

(1)　傾きが２であるから，求める直線の式は，$y=2x+b$ とおける。

$x=1$ のとき $y=-3$ であるから，これらを $y=2x+b$ に代入すると

$-3=2\times 1+b$

$b=-5$

よって　　$y=2x-5$

(2)　切片が -6 であるから，求める式は，$y=ax-6$ と表すことができる。

$x=2$，$y=4$ を $y=ax-6$ に代入すると

$4=a\times 2-6$

$a=5$

よって，求める直線の式は　$y=5x-6$

(3)　直線 $y=-3x+4$ に平行であるから，求める直線の傾きは -3 である。

したがって，その式は $y=-3x+b$ とおける。

$x=-3$ のとき $y=6$ であるから，これらを $y=-3x+b$ に代入すると

$6=-3\times(-3)+b$

$b=-3$

よって　　$y=-3x-3$

7

解説

[解答１]　求める 直線の式を $y=ax+b$ とおく。

$x=-1$ のとき $y=6$ であるから

$6=-a+b$　……①

$x=3$ のとき $y=-2$ であるから

$-2=3a+b$　……②

①と②を連立方程式として解くと

$a=-2$，$b=4$

よって　　$y=-2x+4$　答

[解答２]　直線の傾きは

$\dfrac{-2-6}{3-(-1)}=-2$

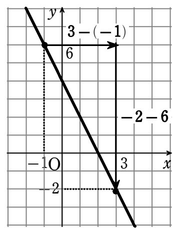
したがって，求める 直線の式は $y=-2x+b$ とおける。

$x=-1$ のとき $y=6$ であるから

$6=-2\times(-1)+b$

$b=4$

よって　　$y=-2x+4$　答



8

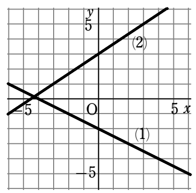
解説

$x+2y=-4$ を y について解くと

$y=-\dfrac{1}{2}x-2$

$2x-3y=-9$ を y について解くと

$y=\dfrac{2}{3}x+3$



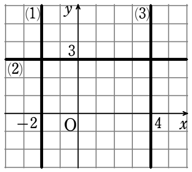
9

解説

(1)　$3x=-6$ を x について解くと

$x=-2$

よって，このグラフは，点 $(-2,\ 0)$ を通り，y 軸に平行な直線で，右の図のようになる。



(2)　$2y=6$ を y について解くと

$y=3$

よって，このグラフは，点 $(0,\ 3)$ を通り，x 軸に平行な直線で，右の図のようになる。

(3)　$-4x+16=0$ を x について解くと

$x=4$

よって，このグラフは，点 $(4,\ 0)$ を通り，y 軸に平行な直線で，上の図のようになる。

10

解説

直線 ℓ の式は　$y=2x+1$　……①

直線 m の式は　$y=-\dfrac{1}{2}x-2$　……②

①，② を連立させて解くと

$$2x+1=-\frac{1}{2}x-2$$
$$4x+2=-x-4$$
$$5x=-6$$
$$x=-\frac{6}{5}$$

$x=-\dfrac{6}{5}$ を ① に代入すると

$$y=2\times\left(-\frac{6}{5}\right)+1$$
$$=-\frac{7}{5}$$

よって，交点の座標は　$\left(-\dfrac{6}{5},\ -\dfrac{7}{5}\right)$

11

解説

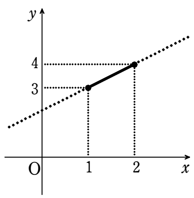
(1)　$a>0$ のとき，この関数は x の値が増加すると y の値も増加するから，そのグラフは 2 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 4)$ を通る直線の一部である。

$(1,\ 3)$，$(2,\ 4)$ を $y=ax+b$ に代入すると

$a+b=3$，　$2a+b=4$

これを解くと　$a=1$，$b=2$

これは，$a>0$ を満たす。



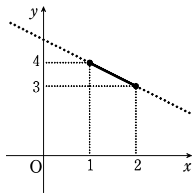
(2)　$a<0$ のとき，この関数は x の値が増加すると y の値は減少するから，そのグラフは 2 点 $(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$ を通る直線の一部である。

$(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$ を $y=ax+b$ に代入すると

$a+b=4$，　$2a+b=3$

これを解くと　$a=-1$，$b=5$

これは，$a<0$ を満たす。



12

解説

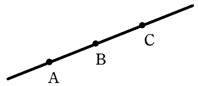
3 点 A，B，C が同じ直線上にあるとき，直線 AB と直線 BC の傾きは等しい。

直線 AB の傾きは　$\dfrac{3-1}{2-(-3)}=\dfrac{2}{5}$

直線 BC の傾きは　$\dfrac{a-3}{7-2}=\dfrac{a-3}{5}$

よって　$\dfrac{2}{5}=\dfrac{a-3}{5}$

したがって　$a=5$　答



3 点 A，B，C が同じ直線上にあるとき，直線 AB と直線 BC の傾きは等しくなる。

13

解説

① と ② を連立方程式として解くと　$x=2$，$y=1$

よって，2 直線 ①，② の交点の座標は　$(2,\ 1)$

$x=2$，$y=1$ を ③ に代入すると　$2a-1=2$

したがって　$a=\dfrac{3}{2}$　答

14

解説

ℓ と m は平行ではないから，3 直線 ℓ，m，n が三角形をつくらないのは，次の 3 つの場合である。

[1]　ℓ と n が平行　　[2]　m と n が平行　　[3]　n が ℓ と m の交点を通る

[1] のとき，ℓ の傾きは -2，n の傾きは a であるから　$a=-2$

[2] のとき，m の傾きは $\dfrac{4}{3}$，n の傾きは a であるから　$a=\dfrac{4}{3}$

[3] のとき，ℓ と m の交点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=-2x+10 \\ y=\dfrac{4}{3}x+5 \end{cases}$ を解くことにより

$\left(\dfrac{3}{2},\ 7\right)$

よって，n が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 7\right)$ を通ればよいから　$7=\dfrac{3}{2}a$

これを解いて　$a=\dfrac{14}{3}$

[1]，[2]，[3] より，求める a の値は　$a=-2,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{14}{3}$　答

15

解説

(1)　$0\leqq x\leqq 6$ のとき，P は辺 BC 上にある。

BP$=x$ cm であるから

$y=\dfrac{1}{2}\times 6\times x=3x$

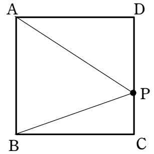
答　$y=3x$，x の変域は $0\leqq x\leqq 6$

(2)　$6\leqq x\leqq 12$ のとき，P は辺 CD 上にある。

△ABP の底辺を AB とすると，高さは 6 cm で一定であるから

$y=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6=18$

答　$y=18$，x の変域は $6\leqq x\leqq 12$



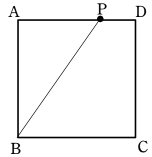
(3)　$12\leqq x\leqq 18$ のとき，P は辺 DA 上にある。

AP の長さは $(18-x)$ cm であるから

$y=\dfrac{1}{2}\times 6\times(18-x)$

$=-3x+54$

答　$y=-3x+54$，x の変域は $12\leqq x\leqq 18$



16

解説

(1)　$y=-\dfrac{1}{2}x+4$ に $x=0$ を代入して $y=-\dfrac{1}{2}\times 0+4$

よって，$y=4$ となるから $(0,\ 4)$

(1)　$y=-\dfrac{1}{2}x+4$ に $y=0$ を代入して $0=-\dfrac{1}{2}x+4$

よって，$x=8$ となるから $(8,\ 0)$

(2)　$y=2x+10$ に $y=0$ を代入して $0=2x+10$

よって，$x=5$ となるから $(-5,\ 0)$

(3)　$y=2x+10$ と $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ を連立して解くと $x=-\dfrac{12}{5}$，$y=\dfrac{26}{5}$ より $\left(-\dfrac{12}{5},\ \dfrac{26}{5}\right)$

(4)　BC を底辺とみると (底辺)$=8-(-5)=13$，(高さ)$=$(D の y 座標)$=\dfrac{26}{5}$

よって，$13\times\dfrac{26}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{169}{5}$

$\boxed{17}$

解説

(1)　$y=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$ と $y=-2x+15$　を連立方程式として解くと

$x=3,\ y=9$

よって，点Ｃの座標は　(3, 9)

(2)　直線ABの傾きは $\frac{1-4}{7-1}=-\frac{1}{2}$ であるから，直線ABの式を $y=-\frac{1}{2}x+b$ とおく。

直線ABは点(1, 4)を通るから

$4=-\frac{1}{2}\times1+b$　　よって　$b=\frac{9}{2}$

したがって，直線ABの式は　$y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$

(3)　線分BCの中点をＭとすると，直線AMは△ABCの面積を２等分する。

Ｍの座標は　$\left(\frac{3+7}{2},\ \frac{9+1}{2}\right)$　すなわち　(5, 5)

直線AMの傾きは $\frac{5-4}{5-1}=\frac{1}{4}$ であるから，直線AMの式を $y=\frac{1}{4}x+c$ とおく。

直線AMは点(1, 4)を通るから

$4=\frac{1}{4}\times1+c$　　よって　$c=\frac{15}{4}$

したがって，求める直線の式は　$y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}$

$\boxed{18}$

解説

(1)　△AOBの面積は　$\frac{1}{2}\times12\times6=36$

(2)　直線ABの傾きは　$\frac{0-12}{6-0}=-\frac{12}{6}=-2$

y 切片は12である。

よって，直線ABの式は　$y=-2x+12$

(3)　点Ｄの x 座標を a とする。

△ACDの面積は，△AOBの面積の $\frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}\times(12-3)\times a=\frac{1}{2}\times36$$
$$9a=36$$
$$a=4$$

Ｄは直線AB上の点であるから，その y 座標は　$y=-2\times4+12=4$

よって，点Ｄの座標は　(4, 4)

(4)　直線 ℓ の傾きは　$\frac{4-3}{4-0}=\frac{1}{4}$，$y$ 切片は３である。

よって，求める直線 ℓ の式は　$y=\frac{1}{4}x+3$

$\boxed{19}$

解説

Ｂの座標を $(t,\ 0)$ とすると，Ａの座標は $\left(t,\ \frac{3}{2}t\right)$ である。

点Ｄの x 座標は $\frac{3}{2}t=-\frac{4}{3}x+5$ より

$$x=\frac{-9t+30}{8}$$

よって，Ｄの座標は　$\left(\frac{-9t+30}{8},\ \frac{3}{2}t\right)$

AB＝ADとなればよいから

$$\frac{3}{2}t=\frac{-9t+30}{8}-t$$

これを解いて　$t=\frac{30}{29}$

よって，Ｂの座標は　$\left(\frac{30}{29},\ 0\right)$

$\boxed{1}$

解説

(1)　$y=100x+80\times2$　すなわち　$y=100x+160$ と表されるから，y は x の１次関数である。

(2)　$y=x^3$ と表されるから，y は x の１次関数ではない。

(3)　$y=\frac{1500}{x}$ と表されるから，y は x の１次関数ではない。

(4)　$y=\frac{1}{2}\times(10-2x)$　すなわち　$y=-x+5$ と表されるから，y は x の１次関数である。

$\boxed{2}$

解説

(1)　①　x の増加量は　$4-1=3$

y の増加量は　$(2\times4-7)-(2\times1-7)=6$

よって，変化の割合は　$\frac{6}{3}=2$

②　x の増加量は　$3-(-2)=5$

y の増加量は　$(2\times3-7)-\{2\times(-2)-7\}=10$

よって，変化の割合は　$\frac{10}{5}=2$

(2)　①　x の増加量は　$12-4=8$

y の増加量は　$\left(-\frac{3}{4}\times12+2\right)-\left(-\frac{3}{4}\times4+2\right)=-6$

よって，変化の割合は　$\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$

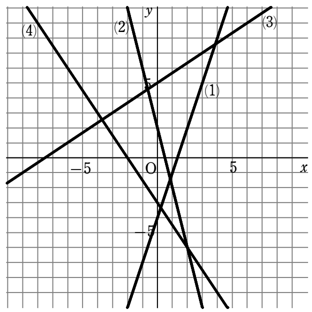
②　x の増加量は　$10-(-6)=16$

y の増加量は　$\left(-\frac{3}{4}\times10+2\right)-\left\{-\frac{3}{4}\times(-6)+2\right\}=-12$

よって，変化の割合は　$\frac{-12}{16}=-\frac{3}{4}$

$\boxed{3}$

解説



4

解説

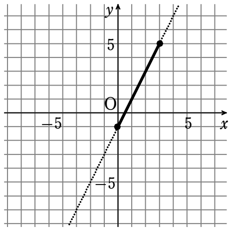
(1)　1 次関数 $y=2x-1$ は，

$x=0$ のとき　$y=-1$

$x=3$ のとき　$y=5$

よって，グラフは右の図の実線部分で，値域は

$-1 \leqq y \leqq 5$



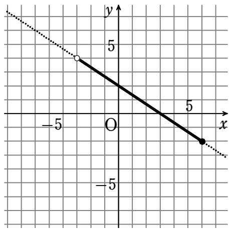
(2)　1 次関数 $y=-\frac{2}{3}x+2$ は，

$x=-3$ のとき　$y=4$

$x=6$　のとき　$y=-2$

よって，グラフは右の図の実線部分で，値域は

$-2 \leqq y < 4$



5

解説

①　グラフの傾きは 3，y 切片は -2 であるから，求める 1 次関数は　　$y=3x-2$

②　グラフの傾きは $-\frac{1}{2}$，y 切片は 2 であるから，求める 1 次関数は　　$y=-\frac{1}{2}x+2$

③　グラフの傾きは $\frac{1}{3}$，y 切片は -6 であるから，求める 1 次関数は　　$y=\frac{1}{3}x-6$

6

解説

(1)　傾きが 3 であるから，求める直線の式は　$y=3x+b$　とおける。

$x=6$ のとき $y=10$ であるから　　$10=3\times6+b$

よって　　$b=-8$

したがって，求める直線の式は　　$y=3x-8$

(2)　傾きが $\frac{2}{3}$ であるから，求める直線の式は　$y=\frac{2}{3}x+b$　とおける。

$x=-3$ のとき $y=1$ であるから　　$1=\frac{2}{3}\times(-3)+b$

よって　　$b=3$

したがって，求める直線の式は　　$y=\frac{2}{3}x+3$

(3)　直線 $y=2x-3$ に平行であるから，求める直線の式は　$y=2x+b$　とおける。

$x=7$ のとき $y=1$ であるから　　$1=2\times7+b$

よって　　$b=-13$

したがって，求める直線の式は　　$y=2x-13$

(4)　直線 $y=-\frac{4}{3}x+6$ に平行であるから，求める直線の式は　$y=-\frac{4}{3}x+b$　とおける。

$x=9$ のとき $y=-7$ であるから　　$-7=-\frac{4}{3}\times9+b$

よって　　$b=5$

したがって，求める直線の式は　　$y=-\frac{4}{3}x+5$

(5)　切片が 3 であるから，求める直線の式は　$y=ax+3$　とおける。

$x=-2$ のとき $y=-1$ であるから　　$-1=-2a+3$

よって　　$a=2$

したがって，求める直線の式は　　$y=2x+3$

(6)　切片が -2 であるから，求める直線の式は　$y=ax-2$　とおける。

$x=-10$ のとき $y=3$ であるから　　$3=-10a-2$

よって　　$a=-\frac{1}{2}$

したがって，求める直線の式は　　$y=-\frac{1}{2}x-2$

7

解説

(1)　求める直線の式を　$y=ax+b$　とおく。

$x=-1$ のとき $y=-11$ であるから　　$-11=-a+b$　……①

$x=2$ のとき $y=1$ であるから　　$1=2a+b$　……②

①，② を連立方程式として解くと　　$a=4$，$b=-7$

よって，求める直線の式は　　$y=4x-7$

(2)　求める直線の式を　$y=ax+b$　とおく。

$x=-2$ のとき $y=13$ であるから　　$13=-2a+b$　……①

$x=3$ のとき $y=-12$ であるから　　$-12=3a+b$　……②

①，② を連立方程式として解くと　　$a=-5$，$b=3$

よって，求める直線の式は　　$y=-5x+3$

(3)　求める直線の式を　$y=ax+b$　とおく。

$x=-9$ のとき $y=-10$ であるから　　$-10=-9a+b$　……①

$x=-3$ のとき $y=-6$ であるから　　$-6=-3a+b$　……②

①，② を連立方程式として解くと　　$a=\frac{2}{3}$，$b=-4$

よって，求める直線の式は　　$y=\frac{2}{3}x-4$

(4)　求める直線の式を　$y=ax+b$　とおく。

$x=-8$ のとき $y=26$ であるから　　$26=-8a+b$　……①

$x=10$ のとき $y=-19$ であるから　　$-19=10a+b$　……②

①，② を連立方程式として解くと　　$a=-\frac{5}{2}$，$b=6$

よって，求める直線の式は　　$y=-\frac{5}{2}x+6$

8

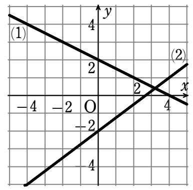
解説

(1)　$x+2y=4$ を y について解くと

$y=-\frac{1}{2}x+2$

このグラフは，傾きが $-\frac{1}{2}$，y 切片が 2 の直線で

あるから，右の図のようになる。



(2)　$3x-4y=8$ を y について解くと

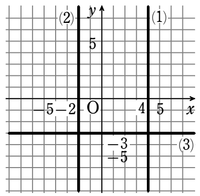
$y=\frac{3}{4}x-2$

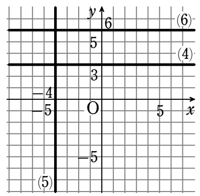
このグラフは，傾きが $\frac{3}{4}$，y 切片が -2 の直線であるから，上の図のようになる。

9

解説

(1)　$x=4$	(2)　$x=-2$	(3)　$y=-3$
(4)　$y=3$	(5)　$x=-4$	(6)　$y=6$





$\boxed{10}$

解説

(1) 直線 ℓ の式は　$y=x-3$　…… ①

　直線 m の式は　$y=-2x+2$　…… ②

①，② を連立方程式として解くと　$x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{4}{3}$

よって，ℓ，m の交点の座標は　$\left(\frac{5}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$

(2) 直線 ℓ の式は　$y=2x-1$　…… ①

　直線 m の式は　$y=-x+3$　…… ②

①，② を連立方程式として解くと　$x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{5}{3}$

よって，ℓ，m の交点の座標は　$\left(\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

(3) 直線 ℓ の式は　$y=\frac{1}{2}x+1$　…… ①

　直線 m の式は　$y=2x-3$　…… ②

①，② を連立方程式として解くと　$x=\frac{8}{3}$，$y=\frac{7}{3}$

よって，ℓ，m の交点の座標は　$\left(\frac{8}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

(4) 直線 ℓ の式は　$y=\frac{5}{3}x+3$　…… ①

　直線 m の式は　$y=-\frac{2}{3}x+1$　…… ②

①，② を連立方程式として解くと　$x=-\frac{6}{7}$，$y=\frac{11}{7}$

よって，ℓ，m の交点の座標は　$\left(-\frac{6}{7},\ \frac{11}{7}\right)$

$\boxed{11}$

解説

$a<0$ であるから，$x=-2$ のとき $y=7$，$x=3$ のとき $y=-3$ である。

よって　$7=-2a+b$　…… ①

　$-3=3a+b$　…… ②

② − ① より　$-10=5a$

　$a=-2$

$a=-2$ を ① に代入すると

　$7=-2\times(-2)+b$

　$b=3$

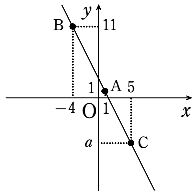
$a=-2$，$b=3$ は問題に適している。

したがって　$a=-2$，$b=3$

$\boxed{12}$

解説

3 点 A，B，C が同じ直線上にあるとき，直線 AB の傾きと，直線 BC の傾きは等しい。



直線 AB の傾きは　$\frac{11-1}{-4-1}=\frac{10}{-5}=-2$

直線 BC の傾きは　$\frac{a-11}{5-(-4)}=\frac{a-11}{9}$

よって　$-2=\frac{a-11}{9}$

したがって　$a=-7$　答

$\boxed{13}$

解説

まず，2 直線 $2x+y=5$ と $x+4y=13$ の交点の座標を求める。

$$\begin{cases} 2x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ x+4y=13 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② の両辺に 2 をかけると　$2x+8y=26$　…… ②′

① − ②′ から　$-7y=-21$　よって　$y=3$

これを ② に代入すると　$x+4\times3=13$　よって　$x=1$

したがって，2 直線 ①，② の交点の座標は　(1，3)

直線 $ax+y=0$ はこの交点を通るから　$a\times1+3=0$　よって　$a=-3$

$\boxed{14}$

解説

$y=3x+9$　…… ①

$y=-\frac{3}{2}x$　…… ②

$y=ax-2$　…… ③

3 直線が三角形を作らないのは次の [1] ～ [3] のときである。

[1]　① と ③ が平行

[2]　② と ③ が平行

[3]　① と ② の交点を ③ が通る

[1] のとき　$a=3$

[2] のとき　$a=-\frac{3}{2}$

[3] のとき　① と ② の交点の x 座標は $3x+9=-\frac{3}{2}x$ の解で表される。

これを解くと　$x=-2$

$y=-\frac{3}{2}\times(-2)=3$ より，交点の座標は　$(-2,\ 3)$

この交点を ③ が通るとき

$3=-2a-2$

$a=-\frac{5}{2}$

以上から　$a=3$，$-\frac{3}{2}$，$-\frac{5}{2}$

$\boxed{15}$

解説

$\mathrm{AP}=2x$ cm である。

(1) 点 P が辺 AB 上にあるとき　$0\leqq x\leqq14$

$y=\frac{1}{2}\times20\times2x$

$y=20x$

(2) 点 P が辺 BC 上にあるとき　$14\leqq x\leqq24$

$y=\frac{1}{2}\times20\times28$

$y=280$

(3) 点 P が辺 CD 上にあるとき　$24\leqq x\leqq38$

$y=\frac{1}{2}\times20\times(76-2x)$

$y=-20x+760$

$\boxed{16}$

解説

(1) $y=-2x+6$ に $y=0$ を代入して $x=3$

よって，A(3，0)

(2) $y=x+2$ に $y=0$ を代入して $x=-2$

よって，B(−2，0)

(3) $y=x+2$，$y=-2x+6$ を連立して解くと $x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{10}{3}$

よって，$\mathrm{C}\left(\frac{4}{3},\ \frac{10}{3}\right)$

(4) $\{3-(-2)\}\times\frac{10}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{25}{3}$

17

解説

(1)　$y=\frac{2}{3}x+1$　…… ①，$y=-2x+9$　…… ②，$y=-\frac{2}{9}x-\frac{5}{3}$　…… ③

① と ② を連立方程式として解くと　$x=3$，$y=3$

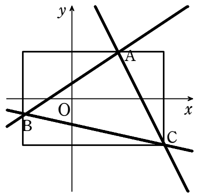
よって　　A$(3,\ 3)$

① と ③ を連立方程式として解くと　$x=-3$，$y=-1$

よって　　B$(-3,\ -1)$

② と ③ を連立方程式として解くと　$x=6$，$y=-3$

よって　　C$(6,\ -3)$



△ABCの面積は右図のA, B, Cを通る横: $6-(-3)=9$，縦: $3-(-3)=6$　の長方形の面積から，まわりの３つの三角形の面積を引いたものである。したがって，求める三角形の面積は

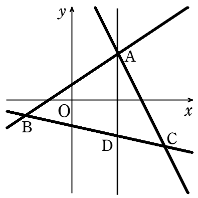
$$9\times6-\left(\frac{1}{2}\times9\times2+\frac{1}{2}\times6\times3+\frac{1}{2}\times6\times4\right)$$

$$=54-9-9-12=24$$

(別解)

Aを通りy軸に平行な直線を引き，直線BCとの交点をDとする。Aとx座標は等しいので　$x=3$

これと③を連立方程式として解くと，　$x=3$，$y=-\frac{7}{3}$



△ABCの面積は△ABDと△ADCの面積の和と等しいので，求める三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times3+\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times6=\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times(3+6)=24$$

(2)　B を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線は，線分 AC の中点を通る。

線分 AC の中点の座標は　$\left(\frac{3+6}{2},\ \frac{3-3}{2}\right)$

すなわち　$\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$

ここで，求める直線の式を $y=ax+b$ とおくと

$$-1=-3a+b \quad \cdots\cdots ④$$

$$0=\frac{9}{2}a+b \quad \cdots\cdots ⑤$$

④ と ⑤ を連立方程式として解くと　$a=\frac{2}{15}$，$b=-\frac{3}{5}$

よって，求める直線の式は　$y=\frac{2}{15}x-\frac{3}{5}$

18

解説

△ABO$=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

点 D を通り，△ABO の面積を 2 等分する直線と，線分 OA との交点を E とする。

直線 OA の傾きは $\frac{3}{3}=1$ であるから，直線 OA の式は

$$y=x$$

よって，点 E の座標は$(t,\ t)$とおける。

△ODE の面積について

$$\frac{1}{2}\times3\times t=6\times\frac{1}{2}$$

$$t=2$$

したがって，点 E の座標は　$(2,\ 2)$

求める直線の式は $y=ax+3$ とおけるから，この式に $x=2$，$y=2$ を代入すると

$$2=2a+3$$

$$a=-\frac{1}{2}$$

よって，求める式は　$y=-\frac{1}{2}x+3$

19

解説

点 B の x 座標を t とすると，点 A の座標は　$\left(t,\ \frac{5}{2}t\right)$

点 D の y 座標は $\frac{5}{2}t$ であるから，その x 座標について　$\frac{5}{2}t=-\frac{2}{3}x+6$

x について解くと　　$x=-\frac{15}{4}t+9$

したがって，点 D の座標は　$\left(-\frac{15}{4}t+9,\ \frac{5}{2}t\right)$　と表される。

長方形 ABCD が正方形となるためには，AB＝AD となればよいから

$$\frac{5}{2}t=-\frac{15}{4}t+9-t$$

これを解くと　　$t=\frac{36}{29}$

よって，点 B の座標は　$\left(\frac{36}{29},\ 0\right)$ 答

第７章　１次関数　レベルA

1

解説

(1)　x の増加量は　　$2-(-4)=6$

$x=-4$ のとき　$y=-2\times(-4)+3=11$

$x=2$　のとき　$y=-2\times2+3=-1$

よって，y の増加量は　　$-1-11=-12$

したがって，変化の割合は　　$\frac{-12}{6}=-2$

(2)　変化の割合が -2 であるから，y の増加量は　　$(-2)\times3=-6$

(3)　x の増加量を p とすると　　$12=(-2)\times p$

これを解くと　　$p=-6$

よって，x の増加量は　-6

2

解説

(1)　反比例 $y=-\frac{12}{x}$ で，x の値が 1 から 6 まで増加するとき，

x の増加量は　$6-1=5$

y の増加量は　$-\frac{12}{6}-\left(-\frac{12}{1}\right)=-2+12$

$=10$

よって，求める変化の割合は　$\frac{10}{5}=2$

(2)　反比例 $y=-\frac{12}{x}$ で，x の値が -4 から -2 まで増加するとき，

x の増加量は　$-2-(-4)=2$

y の増加量は　$-\frac{12}{-2}-\left(-\frac{12}{-4}\right)=6-3$

$=3$

よって，求める変化の割合は　$\frac{3}{2}$

3

解説

(1)　変化の割合が -2 であるから，求める 1 次関数の式は $y=-2x+b$ とおける。

$x=3$ のとき $y=-1$ であるから

$$-1=-2\times3+b$$
$$b=5$$

よって　　$y=-2x+5$

(2)　y 切片が -7 であるから，求める直線の式は $y=ax-7$ とおける。

$x=1$ のとき $y=-4$ であるから

$$-4=a\times1-7$$
$$a=3$$

よって　　$y=3x-7$

(3)　直線 $y=\frac{1}{2}x+3$ に平行な直線の傾きは $\frac{1}{2}$ であるから，求める直線の式は

$y=\frac{1}{2}x+b$ とおける。

$x=6$ のとき $y=2$ であるから

$$2=\frac{1}{2}\times6+b$$
$$b=-1$$

よって　　$y=\frac{1}{2}x-1$

(4)　求める直線の式を $y=ax+b$ とおく。

$x=9$ のとき $y=-1$ であるから　$-1=9a+b$　…… ①

$x=-3$ のとき $y=3$ であるから　$3=-3a+b$　…… ②

① と ② を連立方程式として解くと

$$a=-\frac{1}{3},\ b=2$$

よって　　$y=-\frac{1}{3}x+2$

4

解説

(1)　2 点 (1, 3), (5, a) が $y=2x+b$ のグラフ上にあるから

$3=2\times1+b$　……①，　$a=2\times5+b$　…… ②

① から　　$b=1$

これを ② に代入すると　　$a=10+1=11$

答　$a=11$，$b=1$

(2)　直線 $y=ax-3$ が点 (1, $-2b$) を通るから

$-2b=a-3$　　　よって　$a+2b=3$　…… ①

直線 $y=x+b$ が点 ($2a$, 9) を通るから

$9=2a+b$　　　よって　$2a+b=9$　…… ②

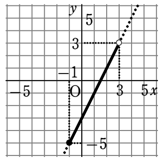
①+② から　　$3a+3b=12$

したがって　　$a+b=4$

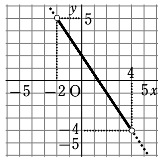
5

解説

(1)　$-5\leqq y<3$



(2)　$-4<y<5$



6

解説

$5x-4y+3=0$ ……①
$x-3y=6$ ……②
$3x+2y=7$ ……③

とする。

①，② を連立方程式として解くと　　$x=-3$，$y=-3$

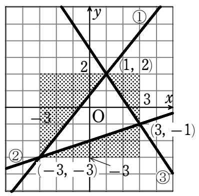
②，③ を連立方程式として解くと　　$x=3$，$y=-1$

①，③ を連立方程式として解くと　　$x=1$，$y=2$

よって，2 直線 ①，② の交点の座標は　$(-3,\ -3)$

2 直線 ②，③ の交点の座標は　$(3,\ -1)$

2 直線 ①，③ の交点の座標は　$(1,\ 2)$



図から，求める面積は

$$6\times5-\left(\frac{1}{2}\times4\times5+\frac{1}{2}\times6\times2+\frac{1}{2}\times2\times3\right)=30-(10+6+3)=11\ (\mathrm{cm}^2)$$

7

解説

(1)　1 次関数 $y=-2x+a$ のグラフは右下がりの直線である。

$x=a$ のとき $y=2$ であるから

$2=-2a+a$

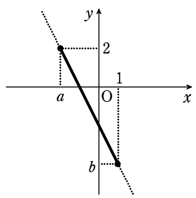
$a=-2$

$x=1$ のとき $y=b$ であるから

$b=-2+a$

よって　$b=-2+(-2)=-4$

答　$a=-2$，$b=-4$



(2)　$a<0$ であるから，1 次関数 $y=ax+5$ のグラフは右下がりの直線である。

$x=-3$ のとき $y=11$ であるから

$11=-3a+5$

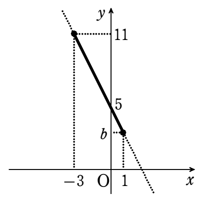
$a=-2$

$x=1$ のとき $y=b$ であるから

$b=a+5$

よって　$b=-2+5=3$

答　$a=-2$，$b=3$



8

解説

[1]　$a>0$ の場合

$x=-2$ のとき $y=-3$，$x=3$ のとき $y=7$ であるから

$$\begin{cases}-3=-2a+b & \cdots\cdots ①\\ 7=3a+b & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①−② から　　$-10=-5a$

よって　　$a=2$　　($a>0$ に適する)

① に代入すると　$-3=-4+b$　　　よって　$b=1$

[2]　$a<0$ の場合

$x=-2$ のとき $y=7$，$x=3$ のとき $y=-3$ であるから

$$\begin{cases}7=-2a+b & \cdots\cdots ③\\ -3=3a+b & \cdots\cdots ④\end{cases}$$

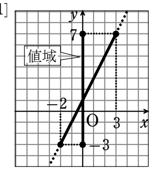
③−④ から　　$10=-5a$

よって　　$a=-2$　　($a<0$ に適する)

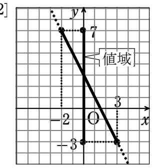
③ に代入すると　$7=4+b$　　　よって　$b=3$

答　(ア)　2　　(イ)　1　　(ウ)　−2　　(エ)　3

[1]



[2]



9

解説

直線 $y=-x+b$ ……① は傾きが -1，y 切片が b である。

直線 ① が点 A (1, 5) を通るとき，b の値は最小で

$5=-1+b$

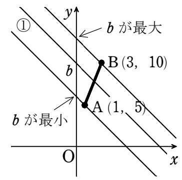
よって　　$b=6$

直線 ① が点 B (3, 10) を通るとき，b の値は最大で

$10=-3+b$

よって　　$b=13$

したがって，b のとりうる値の範囲は　　$6\leqq b\leqq13$



10

解説

(1) ① 直線が A(3, 9) を通るとき，p の値は最大で　$9=\frac{1}{3}\times3+p$

これを解いて　$p=8$

直線が B(9, 5) を通るとき，p の値は最小で　$5=\frac{1}{3}\times9+p$

これを解いて　$p=2$

よって，p の値の範囲は　$2\leqq p\leqq8$

② 直線が A(3, 9) を通るとき，q の値は最大で　$9=3q-4$

これを解いて　$q=\frac{13}{3}$

直線が B(9, 5) を通るとき，q の値は最小で　$5=9q-4$

これを解いて　$q=1$

よって，q の値の範囲は　$1\leqq q\leqq\frac{13}{3}$

(2) グラフが A(2, 6) を通るとき，k の値は最大で　$6=2k$

これを解いて　$k=3$

グラフが B(4, 2) を通るとき，k の値は最小で　$2=4k$

これを解いて　$k=\frac{1}{2}$

したがって，k の値の範囲は　$\frac{1}{2}\leqq k\leqq3$

(3) 直線 ℓ が A(3, 0) を通るとき，傾き a は最小となる。

このとき，直線 ℓ は，2 点 $(-1,\ -2)$，$(3,\ 0)$ を通る。

よって，傾き a は　$a=\frac{0-(-2)}{3-(-1)}=\frac{1}{2}$

直線 ℓ が B(0, 5) を通るとき，傾き a は最大となる。

このとき，直線 ℓ は，2 点 $(-1,\ -2)$，$(0,\ 5)$ を通る。

よって，傾き a は　$a=\frac{5-(-2)}{0-(-1)}=7$

したがって，a の値の範囲は　$\frac{1}{2}\leqq a\leqq7$

11

解説

(1) 直線 BC の傾きは　$\frac{0-(-3)}{2-0}=\frac{3}{2}$，$y$ 切片は　-3

したがって，直線 BC の式は　$y=\frac{3}{2}x-3$

直線 DC の傾きは　$\frac{0-2}{2-0}=-1$，y 切片は　2

したがって，直線 DC の式は　$y=-x+2$

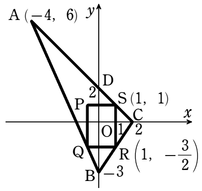
(2) $x=-4$ のとき $y=-(-4)+2=6$ であるから，点 A の座標は　$(-4,\ 6)$

よって，直線 AB の傾きは　$\frac{-3-6}{0-(-4)}=-\frac{9}{4}$，$y$ 切片は　-3

したがって，直線 AB の式は　$y=-\frac{9}{4}x-3$　……①

(3) 点 S は直線 DC 上にあるから，S の y 座標は

$y=-1+2=1$



よって，P の y 座標は　1

点 R は直線 BC 上にあり，その x 座標は 1 であるから，y 座標は

$y=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

よって，点 Q の y 座標は　$-\frac{3}{2}$

点 Q は直線 AB 上にあり，① で $y=-\frac{3}{2}$ とすると

$-\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}x-3$　　これを解いて　$x=-\frac{2}{3}$

よって，Q の x 座標が $-\frac{2}{3}$ であるから，P の x 座標も $-\frac{2}{3}$

したがって，点 P の座標は　$\left(-\frac{2}{3},\ 1\right)$

12

解説

(1) $y=3x-6$ に $y=12$ を代入すると

$12=3x-6$

$x=6$

よって，点 P の座標は　(6, 12)

$y=\frac{3}{4}x+3$ に $y=12$ を代入すると

$12=\frac{3}{4}x+3$

$x=12$

よって，点 Q の座標は　(12, 12)

(2) $12-6=6$

(3) $y=3x-6$　……①

$y=\frac{3}{4}x+3$　……②

①，② を連立させて解くと

$x=4,\ y=6$

よって，点 R の座標は　(4, 6)

(4) R から直線 PQ にひいた垂線と直線 PQ との交点を H とすると

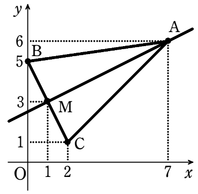
$\mathrm{RH}=12-6=6$

よって，△PQR の面積は

$\frac{1}{2}\times\mathrm{PQ}\times\mathrm{RH}=\frac{1}{2}\times6\times6=18$

13

解説



点 A を通る直線が，辺 BC の中点 M を通るとき，△ABC の面積を 2 等分する。

B の x 座標は 0，C の x 座標は 2 だから，

M の x 座標は　1

B の y 座標は 5，C の y 座標は 1 だから，

M の y 座標は　3

したがって　M(1, 3)

ここで，直線 AM の式を $y=ax+b$ とおくと

2 点(7, 6)，(1, 3) を通るから

$6=7a+b$，$3=a+b$ を解いて $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{5}{2}$

よって，求める直線の式は $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

14［2016 関西大学第一］

解説

(1) $y=0$ を $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$ に代入すると

$0=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

$x=11$

よって，点 B の座標は　(11, 0)

(2) $y=x+1$ を $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$ に代入すると

$x+1=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

$x=2$

$x=2$ を $y=x+1$ に代入すると

$y=2+1=3$

よって，点 C の座標は　(2, 3)

(3) $y=0$ を $y=x+1$ に代入すると

$0=x+1$

$x=-1$

よって，点 A の座標は　$(-1,\ 0)$

点 C を通る直線が線分 AB の中点を通るとき，△ABC の面積を 2 等分する。

線分 AB の中点の座標は

$\left(\frac{11+(-1)}{2},\ 0\right)$　すなわち　(5, 0)

求める直線の式を $y=mx+n$ とすると

$3=2m+n$

$0=5m+n$

これを解くと　$m=-1$，$n=5$

よって，求める式は　$y=-x+5$

15

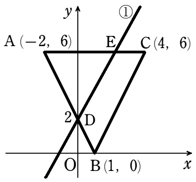
解説

(1)　直線 AB の式は $y=px+q$ とおけて，点 A$(-2,\ 6)$，B$(1,\ 0)$ がこの直線上にあるから　　$6=-2p+q$，　$0=p+q$

これを連立方程式として解くと　　$p=-2$，$q=2$

よって，直線 AB の式は　　$y=-2x+2$　答

(2)　直線 AB と y 軸の交点を D とすると，D の座標は $(0,\ 2)$ である。



直線 ① は，点 D を通り，AD＞BD であるから，

△ABC の面積を２等分するとき辺 AC と交わる。

その交点を E とし，E の x 座標を t とする。

△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\times\{4-(-2)\}\times6=18$

△ADE の面積は　$\dfrac{1}{2}\times\{t-(-2)\}\times(6-2)=2(t+2)$

$2\times$△ADE＝△ABC より　　$2\times2(t+2)=18$

よって　　$t=\dfrac{5}{2}$

したがって，点 E の座標は　$\left(\dfrac{5}{2},\ 6\right)$

点 E は直線 ① 上にあるから　　$6=\dfrac{5}{2}a+2$

よって，求める a の値は　　　$a=\dfrac{8}{5}$　答

16

解説

(1)　頂点 C，D の x 座標について　$-2-11=-13$

ゆえに，B は A を左に 13 だけ移動したものである。

よって，頂点 B の座標は　$(8-13,\ 8)$

すなわち　B$(-5,\ 8)$

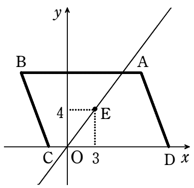
(2)　平行四辺形の対角線の交点は対角線の中点である。

対角線 AC の中点の座標は　$\left(\dfrac{8-2}{2},\ \dfrac{8+0}{2}\right)$

すなわち　E$(3,\ 4)$

(3)　平行四辺形の面積を２等分する直線は，平行四辺形の対角線の交点を通るから，原点 O と点 E$(3,\ 4)$ を通る。

よって，求める直線の式は　$y=\dfrac{4}{3}x$



17

解説

B の x 座標を t とする。

$\left(2\text{ 直線 } y=2x,\ \ y=-\dfrac{1}{3}x+12 \text{ の交点 A の } x \text{ 座標は } \dfrac{36}{7} \text{ であるから，} 0<t<\dfrac{36}{7} \text{ である}\right)$

B は直線 $y=2x$ 上の点であるから，$x=t$ を $y=2x$ に代入すると　　$y=2t$

よって，B の座標は　　$(t,\ 2t)$

C の y 座標も $2t$ であり，C は直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+12$ 上の点であるから，$y=2t$ を

$y=-\dfrac{1}{3}x+12$ に代入すると

$$2t=-\frac{1}{3}x+12$$

したがって　$x=-6t+36$

よって，C の座標は　　$(-6t+36,\ 2t)$

四角形 BDEC が正方形になるとき，BD＝BC であるから

$$2t=(-6t+36)-t$$

$$t=4$$

これは問題に適している。

よって，B の座標は　　$(4,\ 8)$

1

解説

(1)　$x=a$ のとき $y=-2$ であるから　　$-2=-\dfrac{2}{3}a+4$

これを解いて　　$a=9$

(2)　$x=3$ のとき $y=-2$ であるから　　$\begin{cases}-2=3a+b\\-2=3b-a\end{cases}$

これを解いて　　$a=-\dfrac{2}{5}$，$b=-\dfrac{4}{5}$

(3)　２直線の y 切片が等しくなればよい。

直線 $y=2x-3$ の y 切片は -3

直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}a$ の y 切片は $\dfrac{5}{2}a$

よって　　　$\dfrac{5}{2}a=-3$

したがって　　$a=-\dfrac{6}{5}$

(4)　点 $(1,\ 2)$ と x 軸，y 軸に関して対称な点の座標は，それぞれ $(1,\ -2)$，$(-1,\ 2)$ である。

直線 $y=ax+b$ は，この２点を通るから　　$\begin{cases}-2=a+b\\2=-a+b\end{cases}$

これを解いて　　$a=-2$，$b=0$

(5)　直線 $y=ax-3$ が点 $(1,\ -2b)$ を通るから　　$-2b=a-3$　……①

直線 $y=x+b$ が点 $(2a,\ 9)$ を通るから　　　$9=2a+b$　　……②

①，② を連立方程式として解くと　　　　$a=5$，$b=-1$

$\boxed{2}$

（解説）

(1)　2 直線 $y=4x-7$，$y=-3x+14$ の交点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=4x-7 \\ y=-3x+14 \end{cases}$ を解いて　$x=3$，$y=5$　より　$(3,\ 5)$

求める直線の式は　$y=-\dfrac{1}{3}x+b$　とおける。

この直線が，点 $(3,\ 5)$ を通るから　$5=-\dfrac{1}{3}\times 3+b$

これを解いて　$b=6$

よって，求める直線の式は　$y=-\dfrac{1}{3}x+6$

(2)　直線 $y=4x-8$ と x 軸との交点の x 座標は　$0=4x-8$　より　$x=2$

直線 $y=-3x+1$ に平行な直線は　$y=-3x+b$　とおける。

この直線が，点 $(2,\ 0)$ を通るから　$0=-3\times 2+b$

これを解いて　$b=6$

よって，求める直線の式は　$y=-3x+6$

(3)　2 直線 $y=-2x+5$，$y=x-7$ の交点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=x-7 \end{cases}$ を解いて

$x=4$，$y=-3$　より　$(4,\ -3)$

直線 $y=\dfrac{1}{2}x+3$ に平行な直線は　$y=\dfrac{1}{2}x+b$　とおける。

この直線が，点 $(4,\ -3)$ を通るから　$-3=\dfrac{1}{2}\times 4+b$

これを解いて　$b=-5$

よって，求める直線の式は　$y=\dfrac{1}{2}x-5$

(4)　点 C の x 座標は　$3x+0-6=0$　より　$x=2$

よって，点 C の座標は　$(2,\ 0)$

また，直線 AB の傾きは　$\dfrac{-6-4}{-3-2}=2$

したがって，求める直線は，点 $(2,\ 0)$ を通る，傾き 2 の直線である。

求める直線の式は　$y=2x+b$　とおける。

この直線が，点 $(2,\ 0)$ を通るから　$0=2\times 2+b$

これを解いて　$b=-4$

よって，求める直線の式は　$y=2x-4$

$\boxed{3}$

（解説）

(1)　条件より，

$x=p$ のとき $y=5$,

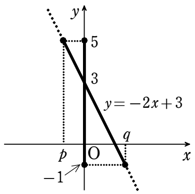
$x=q$ のとき $y=-1$

であるから

$5=-2p+3$

$-1=-2q+3$

よって　$p=-1$，$q=2$



(2)　$a>0$ であるから，$y=ax+2$ のグラフは右上がりの直線になる。

よって，$x=-2$ のとき $y=-4$，$x=3$ のとき $y=b$ であるから

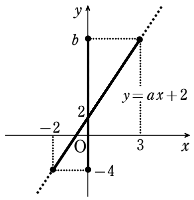
$-4=-2a+2$　……①

$b=3a+2$　……②

① から　$a=3$　　これは $a>0$ を満たす。

$a=3$ を ② に代入すると　$b=3\times 3+2=11$

したがって　$a=3$，$b=11$



(3)　定義域と値域について，両端の値のうち一方は範囲に含まれ，他方は含まれない。

よって，$x=-1$ に $y=3$ が対応し，$x=2$ に $y=-2$ が対応するから　$3=-a+b$　……①

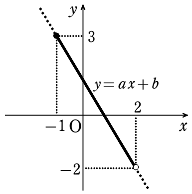
$-2=2a+b$　……②

①−② から　$5=-3a$　　よって　$a=-\dfrac{5}{3}$

$a=-\dfrac{5}{3}$ を ① に代入して　$3=\dfrac{5}{3}+b$

よって　$b=\dfrac{4}{3}$

したがって　$a=-\dfrac{5}{3}$，$b=\dfrac{4}{3}$



$\boxed{4}$

（解説）

(1)　傾き a の値が最大となるのは，直線が 2 点 A，C を通る場合である。

このとき，直線 AC の傾きは　$\dfrac{-2-6}{-2-3}=\dfrac{8}{5}$

傾き a の値が最小となるのは，直線が 2 点 B，D を通る場合である。

このとき，直線 BD の傾きは　$\dfrac{-2-2}{-4-5}=\dfrac{4}{9}$

したがって，a の値の範囲は　$\dfrac{4}{9}\leqq a\leqq\dfrac{8}{5}$

(2)　y 切片 b の値が最大となるのは，直線が 2 点 A，D を通る場合である。

よって　$6=3a+b$　……①

$-2=-4a+b$　……②

①，② を連立方程式として解くと　$a=\dfrac{8}{7}$，$b=\dfrac{18}{7}$

y 切片 b の値が最小となるのは，直線が 2 点 B，C を通る場合である。

よって　$2=5a+b$　……③

$-2=-2a+b$　……④

③，④ を連立方程式として解くと　$a=\dfrac{4}{7}$，$b=-\dfrac{6}{7}$

したがって，b の値の範囲は　$-\dfrac{6}{7}\leqq b\leqq\dfrac{18}{7}$

$\boxed{5}$ [2014　広島県]

（解説）

点 B から x 軸に垂線をひき，x 軸との交点を E とする。

また，点 B を通り，傾きが $-a$ の直線と x 軸との交点を F とすると

OE＝EF

である。

点 F が点 C と一致するとき

OE＝6÷2＝3

したがって　$a=\dfrac{5}{3}$

点 F が点 D と一致するとき

OE＝8÷2＝4

したがって　$a=\dfrac{5}{4}$

よって，求める a の値の範囲は

$\dfrac{5}{4}\leqq a\leqq\dfrac{5}{3}$

$\boxed{6}$

（解説）

(1)　点 A の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=3x-4 \\ y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{12}{5} \end{cases}$ を解いて

$x=2$，$y=2$　より　$(2,\ 2)$

点 B の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{12}{5} \\ y=-x+8 \end{cases}$ を解いて

$x=7$，$y=1$　より　$(7,\ 1)$

点 C の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=-x+8 \\ y=3x-4 \end{cases}$ を解いて

$x=3$，$y=5$　より　$(3,\ 5)$

(2)　直線 $y=\dfrac{1}{3}x+k$ が △ABC の辺または頂点と共有点をもつ場合を考える。

y 切片 k の値が最大となるのは，直線が点 C を通る場合である。

よって　$5=\dfrac{1}{3}\times 3+k$

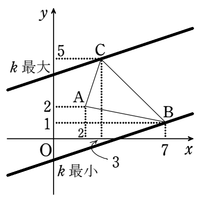
これを解いて　$k=4$

y 切片 k の値が最小となるのは，直線が点 B を通る場合である。

よって　$1=\dfrac{1}{3}\times 7+k$

これを解いて　$k=-\dfrac{4}{3}$

したがって，k の値の範囲は　$-\dfrac{4}{3}\leqq k\leqq 4$



$\boxed{7}$ ［2016 大手前］

解説

(1) 点Aの座標を$(t,\ 2t)$とおくと

$$OB=t$$
$$AB=BC=2t$$

よって $OB+BC=OC$

$$t+2t=5$$
$$t=\frac{5}{3}$$

したがって，点Aの座標は $\left(\frac{5}{3},\ \frac{10}{3}\right)$

(2) 直線ACの傾きは

$$\left(0-\frac{10}{3}\right)\div\left(5-\frac{5}{3}\right)=-\frac{10}{3}\times\frac{3}{10}$$
$$=-1$$

よって，直線ACの式を$y=-x+b$とおくと，点Cを通るから

$$0=-5+b$$
$$b=5$$

したがって，直線ACの式は $y=-x+5$

直線ODの式を$y=ax$とすると，点Dを通るから

$$\frac{10}{3}=5a$$
$$a=\frac{2}{3}$$

よって，直線ODの式は $y=\frac{2}{3}x$

したがって，Eのx座標は

$$-x+5=\frac{2}{3}x$$
$$\frac{5}{3}x=5$$
$$x=3$$

$x=3$を$y=\frac{2}{3}x$に代入すると

$$y=2$$

よって，点Eの座標は $(3,\ 2)$

$\boxed{8}$

解説

$\triangle CDB=\frac{1}{4}\triangle ABC$であるから

$$\triangle ABC:\triangle CDB=4:1$$

よって $AD:DB=(4-1):1=3:1$

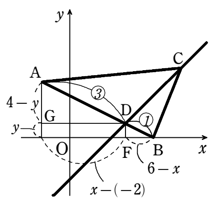
点Aからx軸に垂線AEを引き，点Dから，x軸，線分AEにそれぞれ垂線DF，DGを引く。

点Dの座標を$(x,\ y)$とする。

DF∥AEであるから $BF:FE=BD:DA$

すなわち $(6-x):\{x-(-2)\}=1:3$

よって $x=4$



GD∥EBであるから $AG:GE=AD:DB$

すなわち $(4-y):y=3:1$

よって $y=1$

したがって，点Dの座標は $(4,\ 1)$

求める直線の式を$y=ax+b$とおく。

$x=4$のとき$y=1$であるから $1=4a+b$ ……①

$x=8$のとき$y=5$であるから $5=8a+b$ ……②

①，②を解くと $a=1,\ b=-3$

したがって $y=x-3$

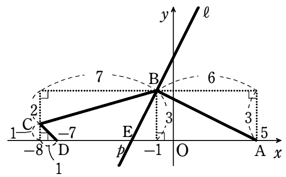
$\boxed{9}$

解説

四角形ABCDの面積をSとする。

Sは，右の図で長方形の面積から3つの直角三角形の面積をひくことで求めることができるから

$$S=3\times(7+6)-\left(\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times3\times6+\frac{1}{2}\times2\times7\right)$$
$$=39-\frac{33}{2}=\frac{45}{2}$$



ℓとx軸との交点を$E(p,\ 0)$とする。

△BEAの面積をTとすると $T=\frac{1}{2}\times(5-p)\times3=\frac{3(5-p)}{2}$

ℓが四角形ABCDの面積を2等分するとき，$T=\frac{1}{2}S$であるから

$$\frac{3(5-p)}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{45}{2}$$ これを解くと $p=-\frac{5}{2}$

よって，点Eの座標は $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$

したがって，ℓの傾きは $\dfrac{3-0}{-1-\left(-\frac{5}{2}\right)}=\dfrac{3}{\frac{3}{2}}=2$

$\boxed{10}$

解説

(1) 点Bのy座標は，直線mのy切片より 4

よって，点Cのy座標は2となる。

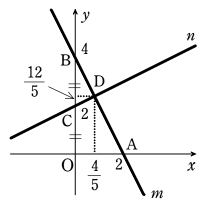
したがって，直線nのy切片は2となる。

よって，直線nは傾きが$\frac{1}{2}$，y切片が2の直線であるから，nを表す式は

$$y=\frac{1}{2}x+2$$

点Dは，2直線m，nの交点であるから，Dの座標は，連立方程式 $\begin{cases}y=-2x+4\\ y=\frac{1}{2}x+2\end{cases}$ を解いて

$x=\frac{4}{5},\ y=\frac{12}{5}$ より $\left(\frac{4}{5},\ \frac{12}{5}\right)$



また，四角形OADCの面積は，△OABの面積から△BCDの面積をひいたものになる。

よって，四角形OADCの面積は

$$\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$$

(2) 点Pの座標を$(p,\ 0)$とすると $PA=2-p$

よって，△PADの面積は $\frac{1}{2}\times(2-p)\times\frac{12}{5}=\frac{6}{5}(2-p)$

直線DPが，四角形OADCの面積を2等分するから $\frac{6}{5}(2-p)=\frac{16}{5}\times\frac{1}{2}$

これを解いて $p=\frac{2}{3}$

したがって，点Pの座標は $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$

$\boxed{11}$［2016 三重県］

解説

(1) 点Aは関数 $y=\frac{a}{x}$ のグラフ上にあるから，$x=3$，$y=4$ を $y=\frac{a}{x}$ に代入すると

$$4=\frac{a}{3}$$

よって　$a=12$

点Bも関数 $y=\frac{12}{x}$ のグラフ上にあるから，$x=-6$，$y=p$ を $y=\frac{12}{x}$ に代入すると

$$p=\frac{12}{-6}$$

よって　$p=-2$

(2) 直線ABの式を $y=mx+n$ とすると

$$4=3m+n$$
$$-2=-6m+n$$

これを解くと　$m=\frac{2}{3}$，$n=2$

よって，求める式は　$y=\frac{2}{3}x+2$

(3) 点Cの y 座標を t とする。

直線ABと y 軸との交点をDとすると

$$OD=2$$

$t>0$ のとき，$\triangle OAC=\triangle OAB$ であるから

$$\frac{1}{2}\times t\times 3=\frac{1}{2}\times 2\times 3+\frac{1}{2}\times 2\times 6$$
$$3t=18$$
$$t=6$$

また，$OC'=OC$ となる点 C' を y 軸上の負の部分にとると，$\triangle OAC'=\triangle OAC$ である。

よって，点 C' の y 座標は -6 であるから，求める y 座標は

6，-6

$\boxed{12}$［2014 関西大倉］

解説

(1) 直線ACの傾きは　$\frac{0-5}{2-(-3)}=-1$

よって，求める式は $y=-x+b$ とおける。

$x=1$，$y=3$ を $y=-x+b$ に代入すると

$$3=-1+b$$
$$b=4$$

したがって，求める式は　$y=-x+4$

(2) $y=0$ を $y=-x+4$ に代入すると

$$0=-x+4$$
$$x=4$$

よって，求める点の座標は　$(4,\ 0)$

(3) (2)で求めた点をEとする。

$AC /\!/ DE$ より，$\triangle ACD=\triangle ACE$ であるから，四角形ABCDの面積と $\triangle ABE$ の面積が等しい。

線分BEの中点の座標は $\left(\frac{-5+4}{2},\ 0\right)$ すなわち $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

求める直線の式を $y=px+q$ とする。

この直線は2点 $(-3,\ 5)$，$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ を通るから

$$5=-3p+q$$
$$0=-\frac{1}{2}p+q$$

これを解いて　$p=-2$，$q=-1$

したがって，求める直線の式は　$y=-2x-1$

$\boxed{13}$［2016 佐賀県］

解説

(1) 直線ABの傾きは　$\frac{5-3}{6-(-2)}=\frac{1}{4}$

よって，その式を $y=\frac{1}{4}x+b$ とすると

$$5=\frac{3}{2}+b$$
$$b=\frac{7}{2}$$

$y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$ に $x=2$ を代入すると

$$y=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$$

この点をDとすると

$$\triangle ABC=\triangle DBC+\triangle DAC$$
$$=\frac{1}{2}\times(4-1)\times\{2-(-2)\}+\frac{1}{2}\times(4-1)\times(6-2)$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 3\times 4$$
$$=12$$

(2) 直線BCの傾きは　$\frac{1-3}{2-(-2)}=-\frac{1}{2}$

点Aを通り，直線BCに平行な直線の式を $y=-\frac{1}{2}x+c$ とすると

$$5=-3+c$$
$$c=8$$

よって　$y=-\frac{1}{2}x+8$

(3) 直線OCの式は $y=\frac{1}{2}x$ である。

点Pは $y=\frac{1}{2}x$ と $y=-\frac{1}{2}x+8$ の交点であるから

$$\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}x+8$$
$$x=8$$

よって，点Pの座標は　$(8,\ 4)$

$\boxed{14}$

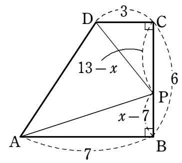
解説

(1) 点Pが辺AB上にあるとき　$0\leqq x\leqq 7$

$AP=x$，(高さ)$=BC=6$ より　$y=\frac{1}{2}\times x\times 6$

よって　$y=3x$

(2) 点Pが辺BC上にあるとき　$7\leqq x\leqq 13$



右の図において $AB+BP=x$ であるから

$$PB=x-7$$

よって　$CP=6-(x-7)=13-x$

$\triangle APD=$(台形ABCDの面積)$-(\triangle ABP+\triangle CDP)$

であるから

$$y=\frac{1}{2}\times(3+7)\times 6-\left\{\frac{1}{2}\times 7\times(x-7)+\frac{1}{2}\times 3\times(13-x)\right\}$$

よって　$y=35-2x$

(3) 点Pが辺CD上にあるとき　$13\leqq x\leqq 16$

$AB+BC+CP=x$ であるから　$CP=x-13$

よって　$PD=3-(x-13)=16-x$

したがって　$y=\frac{1}{2}\times(16-x)\times 6$

よって　$y=48-3x$

(4) 台形ABCDの面積の半分は，

$$\frac{1}{2}\times(3+7)\times 6\times\frac{1}{2}=15$$

であるから，これを(1)～(3)の式の y にそれぞれ代入すると

(1)　$15=3x$ より　$x=5$

(2)　$15=35-2x$ より　$x=10$

(3)　$15=48-3x$ より　$x=11$

(3)の場合は，$13\leqq x\leqq 16$ を満たさないから，問題に適さない。

よって　$x=5$，10

1

(解説)

直線 $y=mx+2m+3$ は m の値に関係なく，つねにある定点を通ることから，m の値を具体的に２つ決めて，それらの値で定まる２直線の交点を求めればよい。

$m=1$ のとき $y=x+5$,　 $m=-1$ のとき $y=-x+1$　である。

よって，連立方程式 $\begin{cases} y=x+5 \\ y=-x+1 \end{cases}$ を解くと　$x=-2$，$y=3$

したがって，求める点の座標は　$(-2,\ 3)$

(参考)　与えられた直線の式は

$$y=m(x+2)+3$$

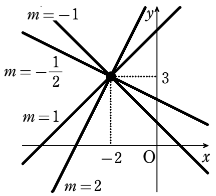
と変形できる。

この等式の右辺に $x=-2$ を代入すると

$$m(-2+2)+3=m\times0+3=3$$

となり，m の値に関係なく，つねに $y=3$ となることがわかる。

このことからも，この問題で求める点の座標が $(-2,\ 3)$ であることがわかる。



2 ［立教大］

(解説)

点Qの座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 ℓ の傾きは　2

直線 PQ の傾きは　$\dfrac{b-1}{a-3}$

直線 PQ が ℓ に垂直であるから

$$2\cdot\frac{b-1}{a-3}=-1$$

よって　$a+2b-5=0$　……①

また，線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{3+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$ が

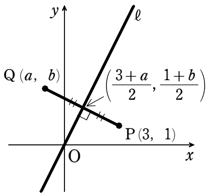
直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{1+b}{2}=2\cdot\frac{3+a}{2}$$

よって　$2a-b+5=0$　……②

①，② を連立させて解くと　$a=-1$，$b=3$

したがって，点Qの座標は　$(-1,\ 3)$



3

(解説)

①，② を連立方程式として解くと　$x=-3$，$y=3$

よって，点Bの座標は　$(-3,\ 3)$

直線 ② の y 切片は -3 であるから，点Cの座標は　$(0,\ -3)$

①，② において，$y=0$ とすると　$x=6$，$x=-\dfrac{3}{2}$

よって，点Dの座標は　$(6,\ 0)$，点Eの座標は　$\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$

直線 ① と y 軸との交点をFとすると，点Fの座標は　$(0,\ 2)$

$\triangle DEC=\dfrac{1}{3}\triangle ABC=\dfrac{1}{3}(\triangle AFC+\triangle BFC)$ であるから，点Aの座標を $(a,\ b)$ とすると

$$\frac{1}{2}\times\left\{6-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times3=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\times\{2-(-3)\}\times a+\frac{1}{2}\times\{2-(-3)\}\times3\right]$$

これを解くと　$a=\dfrac{21}{2}$

点Aは直線 ① 上の点であるから，

$b=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{21}{2}+2=-\dfrac{3}{2}$ より，点Aの座標は　$\left(\dfrac{21}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

点Cの座標は $(0,\ -3)$ であるから，直線 CA の式は $y=cx-3$ とおける。

直線 $y=cx-3$ が点Aを通るから

$-\dfrac{3}{2}=\dfrac{21}{2}c-3$　　よって　$c=\dfrac{1}{7}$

したがって，直線 CA の式は　$y=\dfrac{1}{7}x-3$

4 ［2016 愛知］

(解説)

(1)　$n=4$ のとき，点Pの y 座標は 2，点Qの y 座標は 12 であるから，求める点の個数は

$$12-2+1=11\ (個)$$

(2)　点Pの y 座標は $\dfrac{1}{2}n$，点Qの y 座標は $2n+4$ である。

n が偶数のとき

$$2n+4-\frac{1}{2}n+1=63$$

$$n=\frac{116}{3}$$

これは問題に適さない。

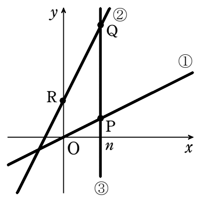
n が奇数のとき

$$2n+4-\frac{1}{2}(n+1)+1=63$$

$$n=39$$

これは問題に適する。

よって　$n=39$



(3)　x 座標，y 座標の値がともに整数である点の個数は

$x=0$ のとき　5 個
$x=1$ のとき　6 個
$x=2$ のとき　8 個
$x=3$ のとき　9 個
$x=4$ のとき　11 個
⋮

x 座標が奇数のときと偶数のときの個数の増え方に注意すると，求める個数は

$$5+6+8+9+11+12+14+15+17+18+20=135\ (個)$$

5 ［2016 富山県］

(解説)

(1)　$x=7$ のとき，２つの図形が重なってできる図形は，長方形 ABCD と縦 6 cm，横 3 cm の長方形を組み合わせたものである。

よって　$y=3\times4+6\times3=30$

(2)　$x=18$ のとき，点Dと点Pが重なっている。

また，$x=24$ のとき，点Gと点Pが重なっている。

よって，$18<x<24$ のとき，２つの図形の位置関係を表す図は

オ

(3)　$0\leqq x\leqq4$ のとき，２つの図形が重なってできる図形は，縦 3 cm，横 x cm の長方形である。

よって　$y=3x$

(4)　$4\leqq x\leqq10$ のとき，２つの図形が重なってできる図形は，長方形 ABCD と縦 6 cm，横 $(x-4)$ cm の長方形を組み合わせたものである。

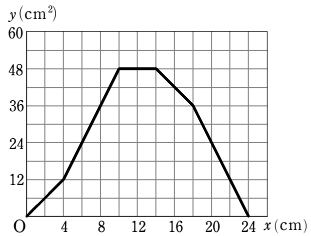
よって　$y=12+6(x-4)$

すなわち　$y=6x-12$

$10\leqq x\leqq14$ のとき，２つの図形が重なってできる図形は，L字型の図形 ABCEFG である。

よって　$y=12+6\times6=48$

したがって，グラフは右の図のようになる。



(5)　L字型の図形 ABCEFG の面積の半分は

$$48\div2=24\ (cm^2)$$

グラフより，$y=24$ となるのは，$4\leqq x\leqq10$ のときと $18\leqq x\leqq24$ のときである。

$4\leqq x\leqq10$ のとき，$y=24$ を $y=6x-12$ に代入すると

$$24=6x-12$$

$$x=6$$

これは問題に適している。

$18\leqq x\leqq24$ のとき，２つの図形が重なってできる図形は，縦 6 cm，横 $10-(x-14)=24-x$ (cm) の長方形である。

よって　$6\times(24-x)=24$

$$24-x=4$$

$$x=20$$

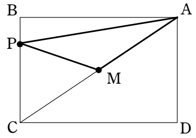
これは問題に適している。

したがって，求める x の値は　6，20

$\boxed{6}$［2014 大阪教育大学附属天王寺］

解説

(1)　7 秒後は右の図のようになる。



まず，M から PC に下ろした垂線の長さは中点連結定理により 3 cm である。

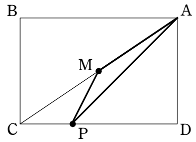
$\triangle APM = \triangle ABC - \triangle ABP - \triangle MPC$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times 1 \times 6 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3$

$= 12 - 3 - \frac{9}{2}$

$= \frac{9}{2}\,(\mathrm{cm}^2)$

12 秒後は右の図のようになる.



M から AB に下ろした垂線の長さは中点連結定理により 2 cm である。

$\triangle APM = \triangle ACD - \triangle APD - \triangle MPC$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3$

$= 12 - 8 - 3$

$= 1\,(\mathrm{cm}^2)$

(2)　$0 \leqq x \leqq 6$ のとき

$y = \frac{1}{2} \times x \times 2$

$y = x$

$6 \leqq x \leqq 10$ のとき

$y = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times (x-6) \times 6 - \frac{1}{2} \times (10-x) \times 3$

$y = -\frac{3}{2}x + 15$

$10 \leqq x \leqq 16$ のとき

$y = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 - \frac{1}{2} \times (16-x) \times 4 - \frac{1}{2} \times (x-10) \times 2$

$y = x - 10$

$16 \leqq x \leqq 20$ のとき

$y = \frac{1}{2} \times (20-x) \times 3$

$y = -\frac{3}{2}x + 30$

(3)　(2) で求めた関数をグラフにかくと右のようになる。