

1

解答 $BP = \frac{5}{2}$, $PC = \frac{3}{2}$, $CQ = 6$

解説

APは∠Aの二等分線であるから

$$BP : PC = AB : AC$$

すなわち $BP : (4 - BP) = 5 : 3$

よって $5(4 - BP) = 3BP$

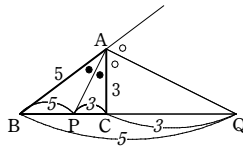
ゆえに $BP = \frac{5}{2}$

また $PC = 4 - BP = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

AQは頂点Aにおける外角の二等分線であるから $BQ : CQ = AB : AC$

すなわち $(4 + CQ) : CQ = 5 : 3$

よって $5CQ = 3(4 + CQ)$ ゆえに $CQ = 6$



2

解答 (1) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 34^\circ$ (2) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$ (3) $\alpha = 130^\circ$

解説

(1) Oは△ABCの外心であるから $OA = OB = OC$

よって、△OCAは $OA = OC$ の二等辺三角形であるから

$$\angle OAC = \angle OCA$$

すなわち $\alpha = 35^\circ$

同様に、△OABは $OA = OB$ の二等辺三角形、△OBCは $OB = OC$ の二等辺三角形であるから、右の図のようになる。

△ABCの内角の和は 180° であるから

$$2 \times 35^\circ + 2 \times 21^\circ + 2 \times \beta = 180^\circ$$

よって $\beta = 34^\circ$

(2) 右の図のように、BHの延長と辺CAの交点をD、

CHの延長と辺ABの交点をEとする。

Hは△ABCの垂心であるから

$$CE \perp AB, BD \perp CA$$

よって $\angle AEC = 90^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ$

△AECの内角の和は 180° であるから

$$60^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$$

ゆえに $\alpha = 30^\circ$

また、△CDHにおいて、頂点Hにおける外角は∠Cと∠Dの和に等しいから

$$\beta = \alpha + 90^\circ \quad \text{よって} \quad \beta = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

(3) $\angle B = 2\angle IBC$, $\angle C = 2\angle ICB$ であるから、

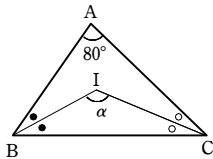
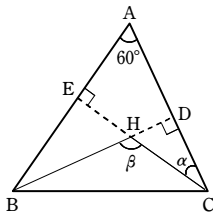
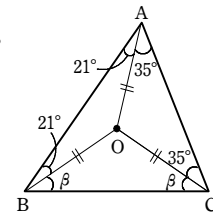
△ABCにおいて

$$80^\circ + 2\angle IBC + 2\angle ICB = 180^\circ$$

よって $\angle IBC + \angle ICB = 50^\circ$

したがって、△IBCにおいて

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB) \\ &= 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \end{aligned}$$



3

解答 $x = 6$, $y = 5$

解説

点Lは、辺BCの中点であるから

$$x = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

AG : GL = 2 : 1 であるから

$$10 : y = 2 : 1$$

$$2y = 10$$

$$y = \frac{10}{2}$$

よって $y = 5$

4

解答 1 : 12

解説

点Gは△ABCの重心であるから

$$AG : GM = 2 : 1$$

よって $\triangle GNM = \frac{1}{3}\triangle ANM$ ……①

また、点Mは辺BCの中点であるから

$$\triangle ANM = \frac{1}{2}\triangle ANC$$
 ……②

更に、点Nは辺ABの中点であるから

$$\triangle ANC = \frac{1}{2}\triangle ABC$$
 ……③

①, ②, ③から

$$\triangle GNM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{1}{12} \triangle ABC$$

よって $\triangle GNM : \triangle ABC = 1 : 12$

5

解答 (1) 2 : 3 (2) 8 : 7

解説

(1) 仮定より

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{3}{4}, \frac{AR}{RB} = \frac{2}{1} = 2$$

チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{3}{4} \times 2 = 1$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{2}{3}$$

よって $BP : PC = 2 : 3$

(2) 仮定より

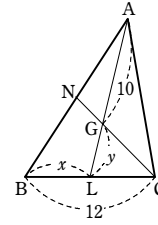
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}, \frac{AR}{RB} = \frac{4+3}{3} = \frac{7}{3}$$

チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{3}{8} \times \frac{7}{3} = 1$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{8}{7}$$

よって $BP : PC = 8 : 7$



6

解答 (1) 2 : 9 (2) 2 : 21

解説

(1) 仮定から $\frac{BP}{PC} = \frac{3}{1}$, $\frac{AR}{RB} = \frac{3}{2}$

メネラウスの定理により $\frac{3}{1} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{3}{2} = 1$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{2}{9}$$

よって $CQ : QA = 2 : 9$

(2) 仮定から $\frac{BP}{PC} = \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1}$, $\frac{AR}{RB} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$

メネラウスの定理により $\frac{3}{1} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{7}{2} = 1$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{2}{21}$$

よって $CQ : QA = 2 : 21$

7

解答 略

解説

証明 DEは∠ADBの二等分線であるから

$$AE : EB = DA : DB$$

よって $\frac{AE}{EB} = \frac{DA}{DB}$

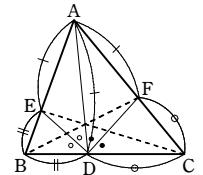
DFは∠ADCの二等分線であるから

$$CF : FA = DC : DA$$

よって $\frac{CF}{FA} = \frac{DC}{DA}$

したがって $\frac{BD}{DC} \times \frac{CF}{FA} \times \frac{AE}{EB} = \frac{BD}{DC} \times \frac{DC}{DA} \times \frac{DA}{DB} = 1$

よって、チェバの定理の逆により、3直線AD, BF, CEは1点で交わる。 図



8

解答 略

解説

三角形の内角、外角の二等分線と比の定理により

$$BP : PC = AB : AC, CQ : QA = BC : AB, AR : RB = AC : BC$$

すなわち $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{AB}$, $\frac{AR}{RB} = \frac{AC}{BC}$

よって $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{AB} \times \frac{AC}{BC} = 1$

したがって、メネラウスの定理の逆により、3点P, Q, Rは一直線上にある。 図

9

解答 $\angle C < \angle B < \angle A$

解説

第1講 例題

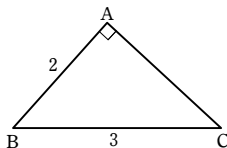
三平方の定理から

$$CA^2 = BC^2 - AB^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

よって $CA = \sqrt{5}$

$2 < \sqrt{5} < 3$ であるから $AB < CA < BC$

したがって $\angle C < \angle B < \angle A$



10

解答 略

解説

$AB > AC$ であるから $\angle C > \angle B$

また $\angle APB = \angle C + \angle PAC > \angle C$

よって $\angle APB > \angle B$

ゆえに、 $\triangle ABP$ において $AB > AP$

11

解答 (1) $3 < x < 15$ (2) $2 < x < 5$

解説

(1) 3辺の長さが $x, 6, 9$ である三角形が存在するための条件は

$$|6-9| < x < 6+9 \quad \text{すなわち} \quad 3 < x < 15$$

(2) 3辺の長さが $x, 6, 9$ である三角形が存在するための条件は

$$|2(x-2)| < 6 < 2(2x-1)$$

すなわち $|x-2| < 3 < 2x-1$

$|x-2| < 3$ から $-3 < x-2 < 3$

よって $-1 < x < 5$

$3 < 2x-1$ から $2 < x$

共通範囲を求めて $2 < x < 5$

第1講 例題演習

1

解答 $DC=2, BE=\frac{27}{2}$

解説

BDは $\angle B$ の二等分線であるから

$$BA : BC = AD : DC \quad \text{すなわち} \quad 9 : 6 = 3 : DC$$

よって $9DC = 6 \cdot 3$ ゆえに $DC = 2$

AEは頂点Aにおける外角の二等分線であるから

$$AB : AC = BE : EC \quad \dots\dots ①$$

ここで $AB=9, AC=AD+DC=3+2=5, EC=BE-BC=BE-6$

これらを①に代入して $9 : 5 = BE : (BE-6)$

よって $9(BE-6) = 5BE$ これを解いて $BE = \frac{27}{2}$

2

- 解答 (1) $\alpha = 50^\circ, \beta = 20^\circ$ (2) $\alpha = 40^\circ, \beta = 100^\circ$
 (3) $\alpha = 30^\circ, \beta = 120^\circ$ (4) $\alpha = 50^\circ, \beta = 40^\circ$
 (5) $\alpha = 20^\circ$ (6) $\alpha = 115^\circ$ (7) $\alpha = 20^\circ, \beta = 120^\circ$

解説

(1) $OA = OB$ であるから

$$\angle OAB = \angle OBA = 20^\circ$$

ゆえに $\angle OAC = 50^\circ$

よって $\alpha = \angle OAC = 50^\circ$

また、 $OB = OC$ であるから

$$\angle OBC = \angle OCB = \beta$$

ゆえに $20^\circ + 70^\circ + 50^\circ + 2\beta = 180^\circ$

よって $\beta = 20^\circ$

(2) $\angle A = 180^\circ - (30^\circ + 20^\circ) = 130^\circ \dots\dots ①$

$OA = OB = OC$ であるから

$$\angle OAB = \angle OBA, \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\angle OBC = \angle OCB = \alpha$$

よって $\angle A = \angle OAB + \angle OAC$

$$= \angle OBA + \angle OCA$$

$$= (\alpha + 30^\circ) + (\alpha + 20^\circ)$$

$$= 2\alpha + 50^\circ \dots\dots ②$$

①, ② から $2\alpha + 50^\circ = 130^\circ$

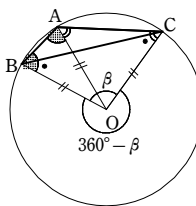
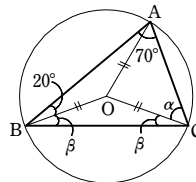
ゆえに $\alpha = 40^\circ$ また $\beta = 180^\circ - 2 \times 40^\circ = 100^\circ$

別解 $\widehat{BA}, \widehat{AC}$ に対する中心角と円周角の関係から

$$\angle BOA = 2\angle BCA = 40^\circ, \angle AOC = 2\angle ABC = 60^\circ$$

ゆえに $\beta = \angle BOA + \angle AOC = 100^\circ$

また $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$



(3) 線分 BH の延長と辺 AC の交点を D, 線分 CH の延長と辺 AB の交点を E とする。

H は $\triangle ABC$ の垂心であるから

$$\angle ADB = 90^\circ, \angle AEC = 90^\circ$$

$\triangle ABD$ の内角の和は 180° であるから

$$\alpha + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

よって $\alpha = 30^\circ$

また、 $\angle BHC = \angle BEH + \angle EBH$ であるから

$$\beta = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

(4) 線分 AH の延長と辺 BC の交点を E とする。

H は $\triangle ABC$ の垂心であるから

$$\angle BDC = 90^\circ, \angle AEB = 90^\circ$$

$\triangle BDC$ の内角の和は 180° であるから

$$\alpha + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

よって $\alpha = 50^\circ$

また、 $\angle AHD = \angle BHE$ であり、 $\triangle BHE$ の内角の和は 180° であるから

$$50^\circ + 90^\circ + \beta = 180^\circ$$

よって $\beta = 40^\circ$

(5) $\angle IAC = \angle IAB = 34^\circ$

$$\angle IBA = \angle IBC = 36^\circ$$

$$\angle ICA = \angle ICB = \alpha$$

$\triangle ABC$ において、内角の和は 180° であるから

$$\alpha = \frac{1}{2} \{180^\circ - (34^\circ \times 2 + 36^\circ \times 2)\} = 20^\circ$$

(6) $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$$\angle IBA = \angle IBC$$

$$\angle ICA = \angle ICB$$

であるから

$$\angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ$$

$\triangle IBC$ において、内角の和は 180° であるから

$$\alpha = 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB) = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

(7) $\angle IBC = \angle IBA = \alpha$

$$\angle ICB = \angle ICA = 40^\circ$$

三角形の内角の和は 180° であるから

$\triangle ABC$ において

$$\alpha = \frac{1}{2} \{180^\circ - (40^\circ \times 2 + 60^\circ)\} = 20^\circ$$

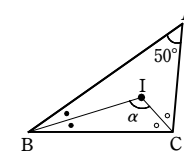
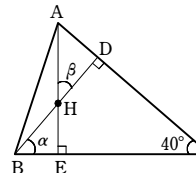
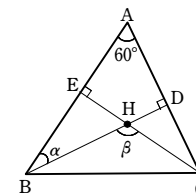
$\triangle IBC$ において

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + 40^\circ) = 180^\circ - (20^\circ + 40^\circ) = 120^\circ$$

3

解答 $x=16, y=8$

解説



第1講 例題演習

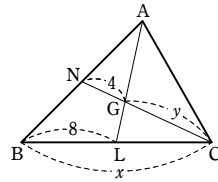
点Lは、辺BCの中点であるから

$$x = 2BL = 2 \times 8 = 16$$

CG : GN = 2 : 1 であるから

$$y : 4 = 2 : 1$$

よって $y = 8$



4

【解答】 (1) $\frac{5}{12}$ 倍 (2) 36 cm^2

【解説】

(1) $AO = CO$, $BM = CM$ より、点Pは $\triangle ABC$ の重心であるから $BP : PO = 2 : 1$

$$PO = \frac{1}{3}BO, OQ = \frac{1}{2}OD \text{ であるから}$$

$$PQ = PO + OQ = \frac{1}{3}BO + \frac{1}{2}OD$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}BD = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)BD$$

$$= \frac{5}{12}BD$$

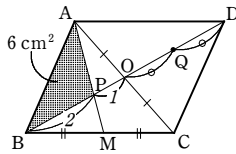
したがって $\frac{5}{12}$ 倍

(2) $PD = PO + OD = PO + 3PO = 4PO$

$$\text{よって } BP : PD = 2PO : 4PO = 1 : 2$$

$$\text{ゆえに } \triangle ABD = 3\triangle ABP = 3 \times 6 = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$

したがって、四角形ABCDの面積は $2 \times \triangle ABD = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$



5

【解答】 (1) 1 : 6 (2) 1 : 3 (3) 4 : 3

【解説】

(1) $\triangle ABC$ において、チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

$AR : RB = 1 : 4$, $BP : PC = 2 : 3$ であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\text{よって } \frac{CQ}{QA} = 6$$

したがって $AQ : QC = 1 : 6$

(2) $\triangle ABC$ において、チェバの定理により

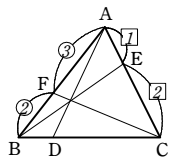
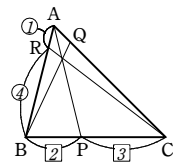
$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$AF : FB = 3 : 2$, $AE : EC = 1 : 2$ であるから

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\text{よって } \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$$

したがって $BD : DC = 1 : 3$



(3) $\triangle ABC$ において、チェバの定理より

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

$$BP : PC = (3+1) : 1 = 4 : 1,$$

$AR : RB = 1 : (1+2) = 1 : 3$ であるから

$$\frac{4}{1} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{よって } \frac{CQ}{QA} = \frac{3}{4}$$

したがって $AQ : QC = 4 : 3$

6

【解答】 (1) 1 : 2 (2) 1 : 4 (3) 1 : 2

【解説】

(1) $\triangle ABC$ と直線QRにおいて、メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

$CQ : QA = 2 : 3$, $AR : RB = (2+1) : 1 = 3 : 1$ であるから

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{1} = 1$$

$$\text{よって } \frac{BP}{PC} = \frac{1}{2}$$

したがって $BP : PC = 1 : 2$

(2) $\triangle ABC$ と直線PQにおいて、メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

$$BP : PC = (1+1) : 1 = 2 : 1,$$

$CQ : QA = (3+2) : 2 = 5 : 2$ であるから

$$\frac{2}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

$$\text{よって } \frac{AR}{RB} = \frac{1}{5}$$

ゆえに $AR : RB = 1 : 5$

したがって $RA : AB = 1 : (5-1) = 1 : 4$

(3) $\triangle BCE$ と直線ADにおいて、メネラウスの定理により

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CA}{AE} \times \frac{EF}{FB} = 1$$

$BD : DC = 4 : 3$, $CA : AE = (1+2) : 2 = 3 : 2$ であるから

$$\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{EF}{FB} = 1$$

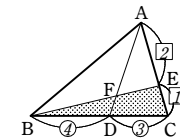
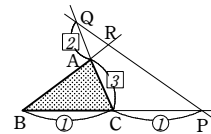
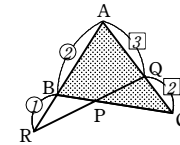
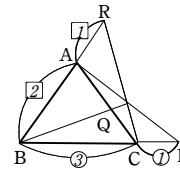
$$\text{よって } \frac{EF}{FB} = \frac{1}{2}$$

したがって $EF : FB = 1 : 2$

7

【解答】 略

【解説】



$\triangle OBC$ において、OPは $\angle BOC$ の二等分線であるから

$$\frac{BP}{PC} = \frac{OB}{OC} \dots\dots ①$$

$\triangle OCA$ において、OQは $\angle COA$ の二等分線であるから

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{OC}{OA} \dots\dots ②$$

$\triangle OAB$ において、ORは $\angle AOB$ の二等分線であるから

$$\frac{AR}{RB} = \frac{OA}{OB} \dots\dots ③$$

よって、①、②、③の辺々を掛けて

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OA}{OB} = 1$$

したがって、チェバの定理の逆により、AP, BQ, CRは1点で交わる。

8

【解答】 略

【解説】

APは $\angle A$ の外角の二等分線であるから

$$BP : PC = AB : AC$$

$$\text{よって } \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} \dots\dots ①$$

BQ, CRはそれぞれ $\angle B$, $\angle C$ の二等分線であるから $CQ : QA = BC : BA$

$$AR : RB = CA : CB$$

$$\text{よって } \frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{BA} \dots\dots ②, \frac{AR}{RB} = \frac{CA}{CB} \dots\dots ③$$

①、②、③の辺々を掛けて

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

したがって、メネラウスの定理の逆により、3点P, Q, Rは1つの直線上にある。

9

【解答】 (1) $\angle C < \angle A < \angle B$ (2) $\angle B < \angle C < \angle A$ (3) $AB < BC < CA$

【解説】

(1) $\sqrt{3} < 2 < 3$ であるから $AB < BC < CA$

よって $\angle C < \angle A < \angle B$

(2) $\angle A$ が鈍角であるから、 $\angle B$ と $\angle C$ は鋭角である。

よって、 $\angle A$ が最大の内角となる。

また、 $CA < AB$ であるから $\angle B < \angle C$

ゆえに $\angle B < \angle C < \angle A$

(3) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ であるから

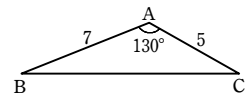
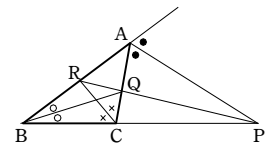
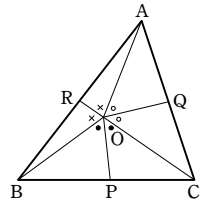
$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ$$

よって $\angle C < \angle A < \angle B$ ゆえに $AB < BC < CA$

10

【解答】 略

【解説】



△ABPにおいて

$$\angle APB < 90^\circ$$

ゆえに $\angle APB < \angle ABP$

よって $AB < AP$ ……①

次に、△ABCにおいて

$$\begin{aligned} \angle ACB + \angle CAB &= 180^\circ - 90^\circ \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

よって、 $\angle ACB < 90^\circ$ であるから

$$\angle ACP < 90^\circ \quad \dots\dots ②$$

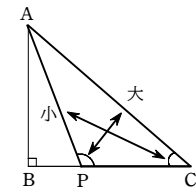
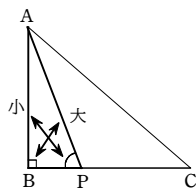
また、 $\angle APC = 90^\circ + \angle BAP$ であるから

$$\angle APC > 90^\circ \quad \dots\dots ③$$

②、③から、△APCにおいて $\angle ACP < \angle APC$

ゆえに $AP < AC$ ……④

①、④から $AB < AP < AC$



11

解答 (1) $4 < x < 8$ (2) $1 < x < 7$

解説

(1) 3辺の長さが $x, 2, 6$ である三角形が存在するための条件は

$$|2-6| < x < 2+6$$

すなわち $4 < x < 8$

(2) 3辺の長さが $x+5, 2x+1, 4x-1$ である三角形が存在するための条件は

$$x+5 < (2x+1) + (4x-1) \quad \dots\dots ①$$

$$2x+1 < (x+5) + (4x-1) \quad \dots\dots ②$$

$$4x-1 < (x+5) + (2x+1) \quad \dots\dots ③$$

を同時に満たすような x の値の範囲を求めればよい。

①から $5 < 5x$ よって $x > 1$ ……①'

②から $-3 < 3x$ よって $x > -1$ ……②'

③から $x < 7$ ……③'

①', ②', ③' の共通範囲を求めて $1 < x < 7$

1

解答 (1) 5 (2) 2:1 (3) 1:3 (4) 5:21

解説

Iは△ABCの内心であるから、3つの内角の二等分線の交点である。

(1) △ABCにおいて、ADは∠Aの二等分線であるから

$$AB : AC = BD : DC$$

すなわち $10 : 4 = BD : (7 - BD)$

$$\text{よって } 10(7 - BD) = 4BD$$

これを解いて $BD = 5$

(2) △ABDにおいて、BIは∠Bの二等分線であるから

$$BA : BD = AI : ID$$

よって $AI : ID = 10 : 5 = 2 : 1$

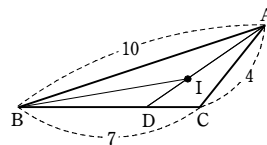
(3) △IBDと△ABDは底辺をそれぞれID, ADとすると、高さが等しいから

$$\triangle IBD : \triangle ABD = ID : AD = 1 : 3$$

(4) △ABDと△ABCは底辺をそれぞれBD, BCとすると、高さが等しいから

$$\triangle ABD : \triangle ABC = BD : BC = 5 : 7$$

このことと(3)から $\triangle IBD : \triangle ABC = 5 : 21$



2

解答 (1) 2 (2) 3

解説

(1) AD, BEは△ABCの中線であるから、その交点Fは△ABCの重心である。

よって $BF : FE = 2 : 1$

$$\text{ゆえに } FE = \frac{1}{2+1} \times BE = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

また、CとFを結び、CG, FEは△AFCの中線であるから、その交点Hは△AFCの重心である。

よって、 $FH : HE = 2 : 1$ から

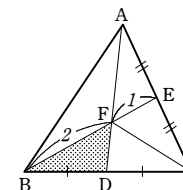
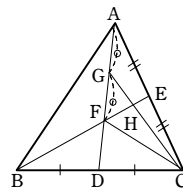
$$FH = \frac{2}{2+1} \times FE = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

(2) △FBC : △FBD = BC : BD = 2 : 1

よって $\triangle FBC = 2\triangle FBD$

また $\triangle EBC : \triangle FBC = EB : FB = 3 : 2$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \triangle EBC &= \frac{3}{2} \triangle FBC = \frac{3}{2} \times 2\triangle FBD \\ &= 3\triangle FBD \end{aligned}$$



3

解答 略

解説

△ABCの重心をGとすると、直線AGは△ABCの中線であるから、直線AGは線分BCを2等分する。 ……①
また、Gは△ABCの垂心でもあるから

$$AG \perp BC \quad \dots\dots ②$$

①、②から、直線AGは線分BCの垂直二等分線である。

ゆえに $AB = AC$ ……③

同様に、Gが△ABCの重心であることから、直線BGは線分CAを2等分する。

また、Gは△ABCの垂心でもあるから

$$BG \perp CA$$

ゆえに、直線BGは線分CAの垂直二等分線であるから

$$BC = BA \quad \dots\dots ④$$

③、④から $AB = BC = CA$

したがって、△ABCは正三角形である。

4

解答 外心

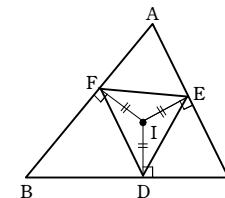
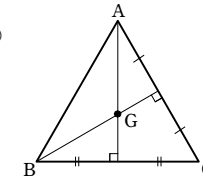
解説

Iは△ABCの内心であるから、3辺BC, CA, ABから等距離にある。

$$\text{よって } ID = IE = IF$$

ゆえに、Iは3点D, E, Fから等距離にある。

したがって、Iは△DEFの外心である。



5

解答 (1) 略 (2) 略

解説

辺AB, ACのB, Cを越える延長上に、それぞれ点D, Eをとる。

$$(1) \angle AI_aB = \angle I_aBD - \angle I_aAB$$

$$= \frac{1}{2} \angle CBD - \frac{1}{2} \angle A$$

$$= \frac{1}{2} (\angle CBD - \angle A)$$

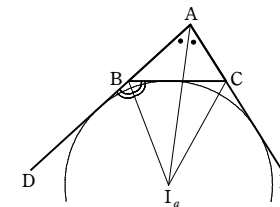
$$= \frac{1}{2} \angle C$$

$$(2) \angle AI_aC = \angle I_aCE - \angle I_aAC = \frac{1}{2} \angle BCE - \frac{1}{2} \angle A$$

$$= \frac{1}{2} (\angle BCE - \angle A) = \frac{1}{2} \angle B$$

$$\text{よって } \angle BI_aC = \angle AI_aB + \angle AI_aC = \frac{1}{2} (\angle B + \angle C)$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$



6

解答 (1) 4:3 (2) 2:1

第1講 レベルA

解説

(1) $\triangle ABP$ と直線 RC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

すなわち $\frac{BC}{CP} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{2} = 1$

よって $\frac{BC}{CP} = \frac{7}{3}$ ゆえに $BC : CP = 7 : 3$

したがって $BP : PC = (7-3) : 3 = 4 : 3$

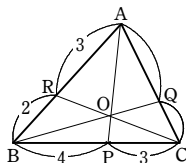
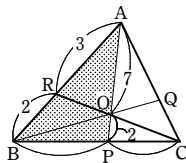
(2) $\triangle ABC$ にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

すなわち $\frac{4}{3} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{3}{2} = 1$

よって $\frac{CQ}{QA} = \frac{1}{2}$

したがって $AQ : QC = 2 : 1$



第1講 レベルB

1

解答 (1) 6 : 1 (2) 7 : 2 (3) 7倍

解説

(1) $\triangle BCF$ と直線 AE について、メネラウスの定理により $\frac{BE}{EC} \times \frac{CA}{AF} \times \frac{FQ}{QB} = 1$

仮定から $\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}$, $\frac{CA}{AF} = \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1}$

よって $\frac{2}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{FQ}{QB} = 1$

$$\frac{FQ}{QB} = \frac{1}{6}$$

したがって $BQ : QF = 6 : 1$

(2) (1)の結果より、 $BQ : QF = 6 : 1$ であるから

$$\triangle BQA : \triangle ABF = 6 : (6+1) = 6 : 7$$

よって $\triangle ABF = \frac{7}{6} \triangle BQA$ ……①

また、 $CF : AF = 2 : 1$ であるから

$$\triangle ABF : \triangle ABC = 1 : (2+1) = 1 : 3$$

したがって $\triangle ABC = 3 \triangle ABF$ ……②

①, ②から $\triangle ABC = 3 \times \frac{7}{6} \triangle BQA = \frac{7}{2} \triangle BQA$

よって $\triangle ABC : \triangle BQA = 7 : 2$

(3) $\triangle CRB$, $\triangle APC$ についても、(2)と同様に考えて

$$\triangle CRB = \triangle APC = \triangle BQA = \frac{2}{7} \triangle ABC$$

このとき $\triangle PQR = \triangle ABC - \triangle CRB - \triangle APC - \triangle BQA$
 $= \triangle ABC - 3 \times \frac{2}{7} \triangle ABC = \frac{1}{7} \triangle ABC$

したがって $\triangle ABC = 7 \triangle PQR$

よって、 $\triangle ABC$ の面積は、 $\triangle PQR$ の面積の7倍である。

2

解答 略

解説

$\triangle PAB$ において

$$AP + BP > AB \quad \dots\dots ①$$

同様に、 $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ において

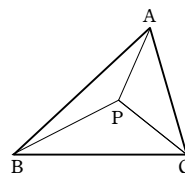
$$BP + CP > BC \quad \dots\dots ②$$

$$CP + AP > CA \quad \dots\dots ③$$

①, ②, ③の辺々を加えると

$$2(AP + BP + CP) > AB + BC + CA$$

よって $AP + BP + CP > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$



第2講 例題

1

解答 (1) $\theta = 20^\circ$ (2) $\theta = 55^\circ$ (3) $\theta = 75^\circ$

解説

(1) 円周角の定理により $\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$

$\triangle OBC$ は $OB = OC$ の二等辺三角形であるから $\angle OBC = \angle OCB$

よって $\theta = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$

(2) 2点C, Dを結ぶ。

BDは円の直径であるから $\angle BCD = 90^\circ$

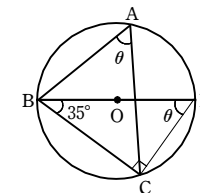
円周角の定理により

$$\angle BDC = \angle BAC = \theta$$

$\triangle BCD$ の内角の和は 180° であるから

$$35^\circ + 90^\circ + \theta = 180^\circ$$

よって $\theta = 55^\circ$



(3) 2点O, Dを結ぶ。

$\widehat{AD} = \widehat{CD}$ であるから

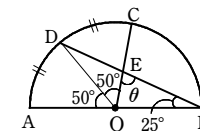
$$\angle AOD = \angle DOC = 100^\circ \div 2 = 50^\circ$$

円周角の定理により

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ$$

$\triangle EOB$ において、 $\angle EOA = \angle BEO + \angle OBE$ であるから

$$100^\circ = \theta + 25^\circ \quad \text{よって} \quad \theta = 75^\circ$$



2

解答 $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 50^\circ$

解説

$\angle ABD = 35^\circ$, $\angle ACD = 35^\circ$ であるから $\angle ABD = \angle ACD$

BとCは直線ADに関して同じ側にあるから、円周角の定理の逆により、4点A, B, C, Dは1つの円周上にある。

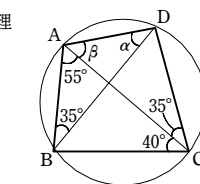
この円において、円周角の定理により

$$\alpha = \angle ACB = 40^\circ$$

また、 $\triangle ABD$ の内角の和は 180° であるから

$$(\beta + 55^\circ) + 35^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

よって $\beta = 50^\circ$



3

解答 (1) $\angle x = 85^\circ$ (2) $\angle x = 46^\circ$

解説

(1) $\triangle ABE$ の内角について $\angle BAE = 180^\circ - (65^\circ + 30^\circ) = 85^\circ$

四角形ABCDは円に内接しているから $\angle x = \angle BAD = 85^\circ$

(2) $\triangle ABF$ の内角と外角の関係から $\angle EAD = \angle x + 56^\circ$

四角形ABCDは円に内接しているから $\angle ADE = \angle x$

$\triangle ADE$ の内角について $32^\circ + (\angle x + 56^\circ) + \angle x = 180^\circ$

よって $\angle x = 46^\circ$

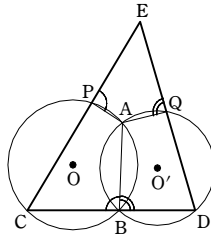
4

解答 略

解説

第2講 例題

四角形 PCBA, ABDQ は、それぞれ円 O, O' に内接するから
 $\angle ABC = \angle APE$
 $\angle ABD = \angle AQE$
 よって $\angle APE + \angle AQE = \angle ABC + \angle ABD = 180^\circ$
 したがって、四角形 EPAQ は円に内接する。

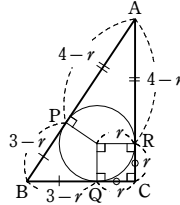


5

【解答】 (1) $AQ=2, BC=9$ (2) $r=1$

【解説】

- (1) $AQ=AR=2$
 $BP=BR=6-2=4, CP=CQ=7-2=5$ から
 $BC=BP+CP=4+5=9$
 (2) 内接円と辺 AB, BC, CA との接点をそれぞれ P, Q, R とする。
 $RC=r, QC=r$ であるから
 $AP=AR=4-r, BP=BQ=3-r$
 $AP+BP=AB$ であるから
 $(4-r)+(3-r)=5$
 よって $r=1$



6

【解答】 (1) $x=80^\circ$ (2) $x=100^\circ$ (3) $x=80^\circ$

【解説】

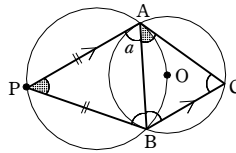
- (1) 接線と弦の作る角により $x = \angle ABC = 80^\circ$
 (2) 接線と弦の作る角により $\angle CAB = 40^\circ$
 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ より $\angle DAC = \angle CAB = 40^\circ$
 よって $\angle BAD = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$
 四角形 ABCD は円に内接するから $x = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$
 (3) 接線と弦の作る角により $\angle PAB = \angle PBA = 50^\circ$
 よって $x = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$

7

【解答】 (1) $180^\circ - 2a$ (2) 略

【解説】

- (1) $PA=PB$ であるから
 $\angle PAB = \angle PBA = a$
 また、 $PA \parallel BC$ であるから
 $\angle ABC = \angle PAB = a$
 更に $\angle ACB = \angle PAB = a$
 よって、 $\triangle ABC$ において
 $\angle BAC = 180^\circ - 2a \dots\dots ①$
 (2) $\triangle APB$ において $\angle APB = 180^\circ - 2a \dots\dots ②$
 ①, ② から $\angle APB = \angle BAC$
 したがって、直線 AC は $\triangle PAB$ の外接円の接線である。



8

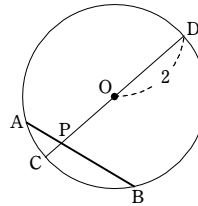
【解答】 (1) (ア) $x=8$ (イ) $x=5$ (ウ) $x=3$ (2) $\sqrt{3}$

【解説】

- (1) (ア) 方べきの定理により $3x=4 \cdot 6$ これを解いて $x=8$
 (イ) 方べきの定理により $x(x+3)=4(4+6)$
 ゆえに $x^2+3x-40=0$ よって $(x-5)(x+8)=0$
 $x>0$ であるから $x=5$
 (ウ) 方べきの定理により $x(x+2)=(\sqrt{15})^2$
 ゆえに $x^2+2x-15=0$ よって $(x-3)(x+5)=0$
 $x>0$ であるから $x=3$
 (2) 点 P を通るこの円の直径を CD とする。
 方べきの定理により

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PC \cdot PD \\ &= (OC - OP)(OD + OP) \\ &= OD^2 - OP^2 \\ &= 4 - OP^2 \end{aligned}$$

- よって、 $PA \cdot PB = 1$ であるとき $4 - OP^2 = 1$
 ゆえに $OP^2 = 3$
 $OP > 0$ であるから $OP = \sqrt{3}$



9

【解答】 (1) 円 O' が円 O の外部にある (2) 2点で交わる (3) 内接する

【解説】

- 円 O の半径を r , 円 O' の半径を r' とすると
 $r+r'=5+4=9, r-r'=5-4=1$
 (1) $d=10$ のとき $d > r+r'$
 よって、円 O' が円 O の外部にある。
 (2) $d=7$ のとき $r-r' < d < r+r'$
 よって、2円 で交わる。
 (3) $d=1$ のとき $d = r-r'$
 よって、2円 は内接する。

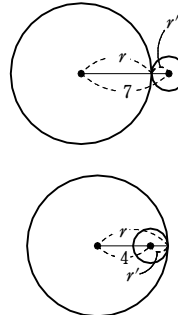
10

【解答】 $\frac{3}{2}, \frac{11}{2}$

【解説】

- 2つの円の半径を r, r' ($r > r'$) とする。
 2つの円の中心間の距離が7のとき外接するから
 $r+r'=7 \dots\dots ①$
 2つの円の中心間の距離が4のとき内接するから
 $r-r'=4 \dots\dots ②$
 ①+② から $2r=11$
 よって $r=\frac{11}{2}$
 ① から $r'=\frac{3}{2}$

ゆえに、2つの円の半径は $\frac{3}{2}, \frac{11}{2}$

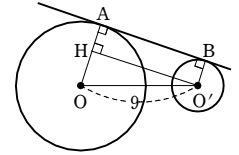


11

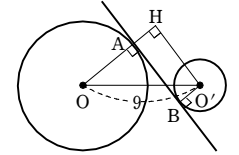
【解答】 (1) $6\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$

【解説】

- (1) 点 O' から OA に垂線 O'H を下ろすと、四角形 AHO'B は長方形となり
 $AB=HO' \dots\dots ①$
 $HA=O'B=2$
 よって $OH=OA-HA=5-2=3$
 直角三角形 OO'H において、三平方の定理により
 $HO' = \sqrt{OO'^2 - OH^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
 したがって、① から $AB=6\sqrt{2}$



- (2) 点 O' から OA の延長に垂線 O'H を下ろすと、四角形 ABO'H は長方形となり
 $AB=HO' \dots\dots ①$
 $HA=O'B=2$
 よって $OH=OA+HA=5+2=7$
 直角三角形 OO'H において、三平方の定理により
 $HO' = \sqrt{OO'^2 - OH^2} = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
 したがって、① から $AB=4\sqrt{2}$



第2講 例題演習

1

【解答】 (1) $\theta = 25^\circ$ (2) $\theta = 20^\circ$ (3) $\theta = 25^\circ$

【解説】

(1) 円周角の定理により
 $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\theta$
 $\angle COD = 2\angle CED = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$
 $\angle BOC + \angle COD = \angle BOD$ であるから
 $2\theta + 100^\circ = 150^\circ$ よって $\theta = 25^\circ$

(2) 円周角の定理により
 $\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$
 また $\angle ADB = \angle DBC + \angle DCB$
 $= 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$
 $\angle ADB = \angle OAD + \angle AOB$
 $= \theta + 60^\circ$
 よって $\theta + 60^\circ = 80^\circ$ ゆえに $\theta = 20^\circ$

(3) AB が直径であるから、円周角の定理により $\angle ACB = 90^\circ$
 $\triangle ABC$ の内角の和は 180° であるから
 $\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$
 $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ であるから $\theta = \angle BAD = \angle BAC = 25^\circ$

2

【解答】 (1) 24° (2) 46°

【解説】

(1) 2点 A, D は直線 BC について同じ側にあり、 $\angle BAC = \angle BDC$ であるから、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある。

このとき、 $\angle x$ は \widehat{CD} に対する円周角であるから $\angle x = \angle CBD = 24^\circ$

(2) $\triangle ABD$ において $\angle BDA = 180^\circ - (90^\circ + 32^\circ) = 58^\circ$
 よって、2点 C, D は直線 AB について同じ側にあり、 $\angle BCA = \angle BDA$ であるから、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある。

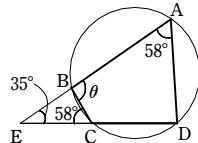
このとき、 $\angle ACD$ は \widehat{DA} に対する円周角であるから $\angle ACD = \angle ABD = 32^\circ$
 よって、 $\triangle ECD$ の内角と外角について $\angle x = 78^\circ - 32^\circ = 46^\circ$

3

【解答】 (1) $\theta = 93^\circ$ (2) $\theta = 50^\circ$ (3) $\theta = 100^\circ$

【解説】

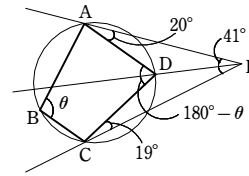
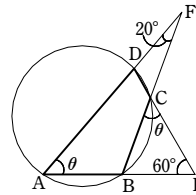
(1) $\angle BCE = \angle A = 58^\circ$
 よって $\theta = \angle E + \angle BCE$
 $= 35^\circ + 58^\circ$
 $= 93^\circ$



(2) 四角形 ABCD は円に内接するから
 $\angle BCE = \angle DAB = \theta$
 よって $\angle ABF = \angle BCE + \angle BEC$
 $= \theta + 60^\circ$

$\triangle ABF$ において
 $\theta + 20^\circ + (\theta + 60^\circ) = 180^\circ$
 整理して $2\theta = 100^\circ$
 したがって $\theta = 50^\circ$

(3) D と E を通る直線を引く。
 $\angle ADC = \angle DAE + \angle AED + \angle CED + \angle DCE$
 $= 20^\circ + \angle AEC + 19^\circ$
 $= 20^\circ + 41^\circ + 19^\circ$
 $= 80^\circ$
 四角形 ABCD は円に内接しているから、
 $\theta + \angle ADC = 180^\circ$ より
 $\theta = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$



4

【解答】 略

【解説】

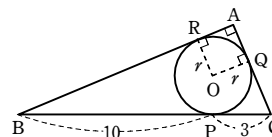
四角形 ABCD は円に内接しているから
 $\angle BCD = \angle EAD$
 $\triangle ADE$ の外接円において、 \widehat{DE} に対する円周角より
 $\angle EAD = \angle EGD$
 したがって $\angle EGD = \angle FCD$
 よって、四角形 DGFC は、頂点 G の外角がそれと隣り合う内角の対角に等しいから、円に内接する。

5

【解答】 (1) $AB = r + 10$, $CA = r + 3$ (2) $r = 2$

【解説】

(1) 2辺 CA, AB と円 O の接点を、それぞれ Q, R とおく。
 $OQ \perp CA$, $OR \perp AB$, $OQ = OR = r$ であるから、四角形 AROQ は正方形である。
 よって $AR = AQ = r$
 また、 $BR = BP$ であるから $BR = 10$
 ゆえに $AB = AR + BR = r + 10$
 $CQ = CP$ であるから $CQ = 3$
 ゆえに $CA = AQ + CQ = r + 3$



(2) $\triangle ABC$ において、三平方の定理により
 $AB^2 + CA^2 = BC^2$ すなわち $(r + 10)^2 + (r + 3)^2 = 13^2$
 整理すると $r^2 + 13r - 30 = 0$ よって $(r + 15)(r - 2) = 0$
 $r > 0$ であるから $r = 2$

6

【解答】 (1) $\angle x = 74^\circ$, $\angle y = 56^\circ$ (2) $\angle x = 70^\circ$, $\angle y = 40^\circ$
 (3) $\angle x = 108^\circ$, $\angle y = 34^\circ$

【解説】

(1) $\angle x = \angle ACB = 74^\circ$
 $\angle y = \angle ABC = 56^\circ$

(2) $\angle x = 70^\circ$
 $\triangle ABC$ は、 $BA = BC$ の二等辺三角形であるから $\angle BAC = \angle BCA = 70^\circ$
 よって、 $\triangle ABC$ の内角について $\angle y = 180^\circ - 70^\circ \times 2 = 40^\circ$

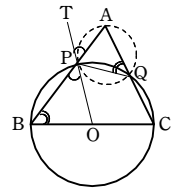
(3) $\angle x = 108^\circ$
 $\triangle ABD$ の内角と外角について $\angle BAD = 108^\circ - 70^\circ = 38^\circ$
 よって $\angle y = 180^\circ - (108^\circ + 38^\circ) = 34^\circ$

7

【解答】 略

【解説】

対頂角は等しいから
 $\angle APT = \angle BPO$
 $\triangle OPB$ は $OP = OB$ の二等辺三角形であるから
 $\angle BPO = \angle PBO$
 四角形 PBCQ は円 O に内接しているから
 $\angle PBO = \angle PQA$
 よって $\angle APT = \angle PQA$
 したがって、PT は $\triangle APQ$ の外接円に接する。



8

【解答】 (1) (ア) $x = \frac{11}{2}$ (イ) $x = \sqrt{21}$ (ウ) $x = 15$ (2) 5

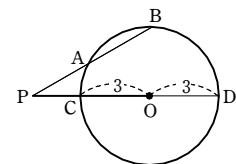
【解説】

(1) (ア) 方べきの定理から $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ すなわち $(x - 4) \cdot 4 = 2 \cdot 3$
 整理して $4x = 22$ よって $x = \frac{11}{2}$

(イ) CO は円 O の半径であるから $CO = 3$ よって $PC = x - 3$
 方べきの定理から $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ すなわち $2 \cdot (2 + 4) = (x - 3)(x + 3)$
 整理して $x^2 = 21$ $x > 0$ であるから $x = \sqrt{21}$

(ウ) 方べきの定理から $PA \cdot PB = PT^2$ すなわち $5(5 + x) = 10^2$
 整理して $5x = 75$ よって $x = 15$

(2) 直線 PO と円 O の2つの交点を、P に近い方から順に C, D とする。
 方べきの定理から $PC \cdot PD = PA \cdot PB$
 $PA \cdot PB = 16$ から $PC \cdot PD = 16$
 よって $(OP - OC)(OP + OD) = 16$
 すなわち $(OP - 3)(OP + 3) = 16$
 ゆえに $OP^2 - 9 = 16$ よって $OP^2 = 25$
 $OP > 0$ であるから $OP = 5$



9

【解答】 (1) 内接する、1本 (2) 2点で交わる、2本 (3) 外接する、3本
 (4) 一方が他方の外部にある、4本

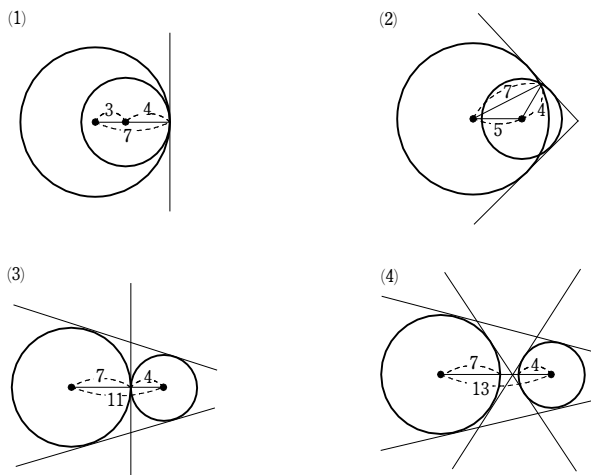
【解説】

(1) $3 = 7 - 4$ であるから、2つの円は内接する。

また、共通接線の本数は1本である。

(2) $7 - 4 < 5 < 7 + 4$ であるから、2つの円は2点で交わる。

- また、共通接線の本数は2本である。
 (3) $11=7+4$ であるから、2つの円は外接する。
 また、共通接線の本数は3本である。
 (4) $13>7+4$ であるから、2つの円は一方が他方の外部にある。
 また、共通接線の本数は4本である。



10

解答 $r=8, r'=3$

解説

中心間の距離が11のとき2円は外接するから

$$r+r'=11 \quad \dots\dots ①$$

中心間の距離が5のとき2円は内接し、 $r>r'$ であるから

$$r-r'=5 \quad \dots\dots ②$$

①+②から $2r=16$ よって $r=8$

$r=8$ を①に代入して $8+r'=11$ よって $r'=3$

11

解答 (1) 12 (2) $2\sqrt{7}$

解説

- (1) 点 O' から OA に垂線 $O'H$ を下ろすと、四角形 $AHO'B$ は長方形となり

$$AB=HO' \quad \dots\dots ①$$

$$HA=O'B=4$$

よって $OH=OA-HA=9-4=5$

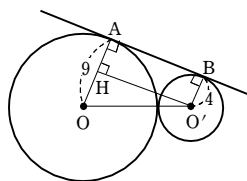
また、2円 O, O' は外接しているから

$$OO'=9+4=13$$

直角三角形 $OO'H$ において、三平方の定理により

$$HO'=\sqrt{OO'^2-OH^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$$

ゆえに、①から $AB=12$



- (2) 直線 AB は2つの円 O, O' の共通接線であるから
 $OA \perp AB, O'B \perp AB$
 ゆえに、点 O' から直線 OA に垂線 $O'H$ を下ろすと、
 四角形 $ABO'H$ は長方形となる。

よって $AB=HO', AH=BO'=2$

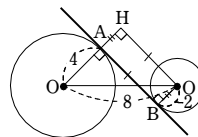
ゆえに $OH=OA+AH=4+2=6$

$\triangle OO'H$ に三平方の定理を適用すると

$$O'H=\sqrt{8^2-6^2}$$

$$=2\sqrt{7}$$

よって $AB=2\sqrt{7}$



1

解答 (1) $\angle x=64^\circ$ (2) $\angle x=112^\circ$ (3) $\angle x=114^\circ$

解説

- (1) 四角形 $ABCD$ は円に内接しているから

$$\angle ABC=180^\circ-121^\circ=59^\circ$$

よって $\angle OBC=59^\circ-33^\circ=26^\circ$

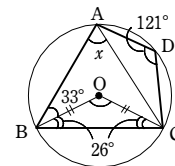
$\triangle OBC$ において、 $OB=OC$ であるから

$$\angle OCB=\angle OBC=26^\circ$$

よって $\angle BOC=180^\circ-2 \times 26^\circ=128^\circ$

$\angle x$ は \widehat{BC} に対する円周角であるから

$$\angle x=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2} \times 128^\circ=64^\circ$$



- (2) 2点 C, E を結ぶ。

$BA=CD$ より、 $\widehat{BA}=\widehat{CD}$ であるから

$$\angle CED=\angle ACB=36^\circ$$

$\triangle ABC$ において

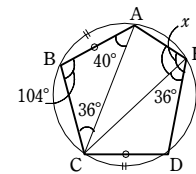
$$\angle ABC=180^\circ-(40^\circ+36^\circ)$$

$$=104^\circ$$

四角形 $ABCE$ は円に内接しているから

$$\angle AEC=180^\circ-104^\circ=76^\circ$$

よって $\angle x=76^\circ+36^\circ=112^\circ$



- (3) 対角線 AD を引く。

四角形 $ABCD$ は円に内接しているから

$$\angle BAD=180^\circ-\angle BCD$$

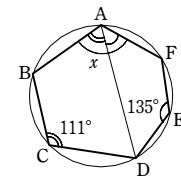
$$=180^\circ-111^\circ=69^\circ$$

四角形 $ADEF$ は円に内接しているから

$$\angle DAF=180^\circ-\angle DEF$$

$$=180^\circ-135^\circ=45^\circ$$

よって $\angle x=69^\circ+45^\circ=114^\circ$



2

解答 116°

解説

円 O の半径 OB を引く。

$\angle AOB$ は、円 O の \widehat{AB} に対する中心角であるから

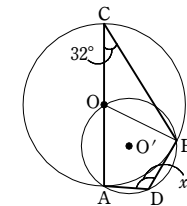
$$\angle AOB=2\angle ACB=2 \times 32^\circ=64^\circ$$

$\angle x$ の頂点を D とすると、四角形 $OADB$ は円 O' に内接しているから

$$\angle AOB+\angle ADB=180^\circ$$

$$64^\circ+\angle x=180^\circ$$

よって $\angle x=116^\circ$



3

解答 (1) 略 (2) 略

解説

- (1) $\angle AED+\angle AFD=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ により、1組の対角の和が 180° であるから、
 四角形 $AEDF$ は円に内接する。

第2講 レベルA

(2) (1)より、 $\angle AFE = \angle ADE$ ……①

$\triangle AED$ と $\triangle ADB$ において、

$$\angle AED = \angle ADB (=90^\circ), \angle EAD = \angle DAB$$

よって $\triangle AED \sim \triangle ADB$

したがって $\angle ADE = \angle DBE$ ……②

①, ②から $\angle DBE = \angle AFE$

1つの外角が、それと隣り合う内角の対角に等しいから、四角形BCFEは円に内接する。

4

解答 36°

解説

$\angle BDC$ は直角であるから、3点B, D, CはBCを直径とする円周上にある。

また、 $\angle BEC$ は直角であるから、3点B, E, CはBCを直径とする円周上にある。

よって、4点B, C, D, EはBCを直径とする円周上にある。

その円において、 $\angle EMD$ は \widehat{DE} の中心角であるから

$$\angle EMD = 2\angle ECA \quad \dots\dots ①$$

ここで、 $\triangle ACE$ において

$$\angle ECA = 180^\circ - (90^\circ + 72^\circ) = 18^\circ$$

①に代入して $\angle EMD = 2 \times 18^\circ = 36^\circ$

5

解答 略

解説

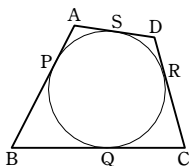
各辺と円の接点を、右の図のように定める。

円の外部の点から引いた2本の接線の長さは等しいから

$$AP = AS, \quad BP = BQ,$$

$$CR = CQ, \quad DR = DS$$

$$\begin{aligned} \text{よって } AB + CD &= (AP + BP) + (CR + DR) \\ &= (AS + BQ) + (CQ + DS) \\ &= (AS + DS) + (BQ + CQ) \\ &= AD + BC \quad \text{終} \end{aligned}$$



6

解答 36°

解説

$\angle ADB = x$ とおく。

$AB = BD$ であるから $\angle DAB = \angle ADB = x$

接線と弦のつくる角の定理により $\angle ACB = x$

また、 $\triangle ADB$ において $\angle CBA = x + x = 2x$

$\triangle CAB$ において、 $CA = CB$ から $\angle CAB = \angle CBA = 2x$

よって、 $\triangle CAD$ において $x + 2x + x + x = 180^\circ$

$$x = 36^\circ$$

したがって $\angle ADB = 36^\circ$

7

解答 (1) $\frac{10}{7}$ (2) 2 (3) $3\sqrt{5}$ (4) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ (5) $\frac{2\sqrt{30}}{5}$

解説

ACは直径であるから $\angle ADC = \angle AEC = 90^\circ$

(1) $BD = x$ とする。

$\triangle ACD$ において、三平方の定理から

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2 - AD^2 = (3\sqrt{6})^2 - (7-x)^2 \\ &= 5 + 14x - x^2 \end{aligned}$$

$\triangle BCD$ において、三平方の定理から

$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$$

よって $5 + 14x - x^2 = 25 - x^2$

$$\text{ゆえに } x = \frac{10}{7} \quad \text{すなわち } BD = \frac{10}{7}$$

(2) 方べきの定理から $BD \cdot BA = BE \cdot BC$

$$\text{よって } BE = \frac{BD \cdot BA}{BC} = \frac{\frac{10}{7} \cdot 7}{5} = 2$$

(3) $\triangle ABE$ において、三平方の定理により

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$$

(4) $\angle BDF = \angle BEF = 90^\circ$ であるから、4点B, D, E, Fは1つの円周上にある。

この円について、方べきの定理から

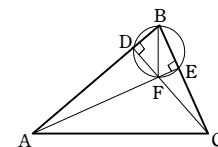
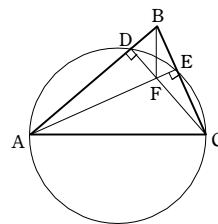
$$AF \cdot AE = AD \cdot AB$$

$$\begin{aligned} \text{よって } AF &= \frac{AD \cdot AB}{AE} = \frac{(7 - \frac{10}{7}) \cdot 7}{3\sqrt{5}} \\ &= \frac{13}{\sqrt{5}} = \frac{13\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$(5) FE = AE - AF = 3\sqrt{5} - \frac{13\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\triangle BEF$ において、三平方の定理から

$$BF = \sqrt{BE^2 + FE^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{24}{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$$



8

解答 (ア) 4 (イ) 3 (ウ) 6 (エ) $\frac{3}{2}$ (オ) $\frac{3}{2}$

解説

円Oについて、方べきの定理から $EP \cdot EQ = EA \cdot EB$

$EA = x + 1$, $EB = x + 3$ であるから $EP \cdot EQ = (x + 1)(x + 3)$

よって $EP \cdot EQ = x^2 + 4x + 3$

円Bについて、方べきの定理から $EP \cdot EQ = EC \cdot ED$

$ED = x + 6$ であるから $EP \cdot EQ = x(x + 6)$

よって $EP \cdot EQ = x^2 + 6x$

$$\text{以上から } x^2 + 4x + 3 = x^2 + 6x \quad \text{これを解くと } x = \frac{3}{2}$$

9

解答 略

解説

直角三角形EBCの外接円とABの交点をFと

すると、BEが直径であるから $\angle BFE = 90^\circ$

方べきの定理から $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ ……①

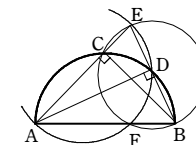
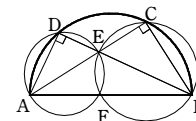
直角三角形EADの外接円とABの交点は、

$\angle AFE = 90^\circ$ から、点Fである。

方べきの定理から $BE \cdot BD = BF \cdot AB$ ……②

①, ②から

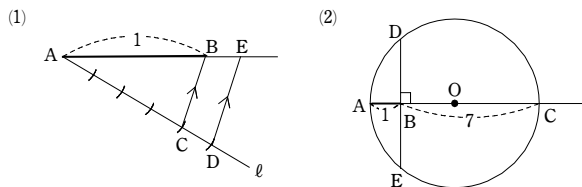
$$\begin{aligned} AE \cdot AC + BE \cdot BD &= AF \cdot AB + BF \cdot AB \\ &= (AF + BF)AB = AB^2 \end{aligned}$$



第3講 例題

1

【解答】 (1) 図の線分AE (2) 図の線分BD



【解説】

- (1) ① 点Aを通り、直線ABと異なる直線 l を引く。
 ② l 上に $AC:CD=4:1$ となるような点C, Dをとる。ただし、Cは線分AD上にとる。
 ③ 点Dを通り、BCに平行な直線を引き、直線ABとの交点をEとする。線分AEが求める線分である。

このとき、 $AE=x$ とすると、 $BC \parallel ED$ から

$$1:x=4:5 \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{5}{4}$$

よって、線分AEは長さ $\frac{5}{4}$ の線分である。

- (2) ① 線分ABのBを越える延長上に、 $BC=7$ となるような点Cをとる。
 ② 線分ACを直径とする円Oをかく。
 ③ 点Bを通り、ABに垂直な直線を引き、円Oとの交点をD, Eとする。線分BDが求める線分である。

このとき、方べきの定理により

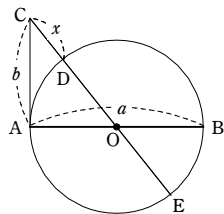
$$BA \cdot BC = BD \cdot BE$$

$AB=1, BC=7, BD=BE$ であるから $BD^2=7$

よって、線分BDは長さが $\sqrt{7}$ の線分である。

2

【解答】 図の線分CD



【解説】

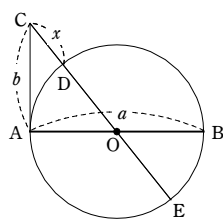
- ① 長さ a の線分ABを直径とする円Oをかく。
 ② 点Aを通り、ABに垂直な直線を引き、その上に $AC=b$ となるような点Cをとる。
 ③ 直線COと円Oの2つの交点のうち、Cに近い方からD, Eとすると、線分CDが求める線分である。

このとき、方べきの定理により $CD \cdot CE = CA^2$

$$CD = x \text{ とおくと } x(x+a) = b^2$$

$$\text{すなわち } x^2 + ax - b^2 = 0$$

よって、線分CDの長さが2次方程式 $x^2 + ax - b^2 = 0$ の正の解となる。



3

【解答】 (1) 辺GH, ED, KJ (2) 辺CI, DJ, EK, FL, HI, IJ, KL, LG
 (3) 辺AG, DJ, EK, FL, FE, LK (4) 面ABCDEF, GHIJKL

【解説】

- (1) 面AGHBは長方形であるから $AB \parallel GH$
 面ABCDEFは正六角形であるから $AB \parallel ED$
 面EKJDは長方形であるから $ED \parallel KJ$

これと $AB \parallel ED$ から $AB \parallel KJ$

図 辺GH, ED, KJ

- (2) 辺ABとねじれの位置にある辺は、辺ABと同じ平面上にない辺であるから
 辺CI, DJ, EK, FL, HI, IJ, KL, LG

- (3) 各辺を延ばしてできる直線のうち、平面BHICと共有点をもたない直線は
 直線AG, DJ, EK, FL, FE, LK

よって、面BHICと平行な辺は 辺AG, DJ, EK, FL, FE, LK

- (4) 面ABCDEF, GHIJKLは直線BHと垂直であるから、面ABCDEF, GHIJKLは面BHICと垂直である。

図 面ABCDEF, GHIJKL

4

【解答】 (1) $72\sqrt{2}$ (2) 正六角形, $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

【解説】

- (1) この正八面体を平面BCDEで切ると、2つの合同な正四角錐A-BCDE, F-BCDEに分割される。
 正方形BCDEの対角線の交点をOとすると、 $\triangle ABO$ は $\angle AOB=90^\circ$ の直角二等辺三角形である

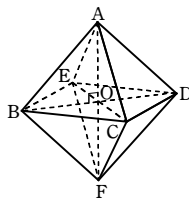
$$\text{から } AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

よって、正四角錐A-BCDEの体積は

$$\frac{1}{3} \times (\text{正方形BCDE}) \times AO = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$$

求める正八面体の体積は、正四角錐A-BCDEの体積の2倍であるから

$$36\sqrt{2} \times 2 = 72\sqrt{2}$$



- (2) 面BCFに平行で、正八面体の体積を2等分する平面は、6つの辺AB, BE, EF, DF, CD, ACの中点を通る。

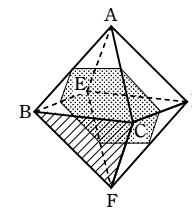
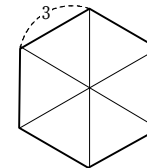
よって、切り口は1辺の長さが $\frac{6}{2}=3$ の正六角形となる。

1辺の長さが3の正三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \right) = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

であるから、切り口の正六角形の面積は

$$\frac{9\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



5

【解答】 (1) $\frac{512}{3}$ (2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解説】

- (1) 正四面体BDEGは、立方体ABCD-EFGHから合同な4つの四面体ABDE, FBEG, CBDG, HDEGを除いたものである。

よって、求める体積 V は $V = 8^3 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot 8 \right) \times 4 = \frac{512}{3}$

- (2) 正四面体BDEGに内接する球の中心をOとすると、正四面体は合同な4つの四面体OBDE, OBEG, OBGD, ODEGに分割できる。

四面体OBDEの体積を V_1 とすると

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \triangle BDE \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8\sqrt{2} \right) \right] \cdot r = \frac{32\sqrt{3}}{3} r$$

$$V = 4V_1 \text{ であるから } \frac{512}{3} = 4 \cdot \frac{32\sqrt{3}}{3} r \quad \text{よって} \quad r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

6

【解答】 略

【解説】

HとBが一致するとき、2つの垂線は点Bで交わり、KがAに一致するとき、2つの垂線は点Aで交わる。以下、HとB, KとAが一致しない場合について示す。

$AH \perp CD, AB \perp CD$ であるから

$$CD \perp \text{平面ABH}$$

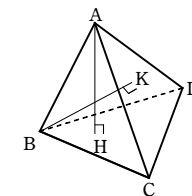
$BK \perp CD, AB \perp CD$ であるから

$$CD \perp \text{平面ABK}$$

平面ABH, ABKは辺ABを含み、辺CDに垂直であるから、同じ平面である。

AH, BKは同じ平面上にあり、平面BCD, CDAは平行でないから、AH, BKは平行でない。

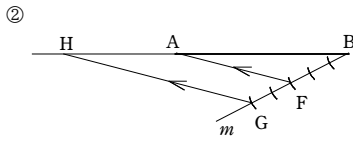
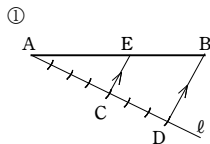
よって、AHとBKは交わる。



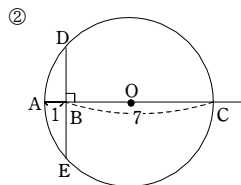
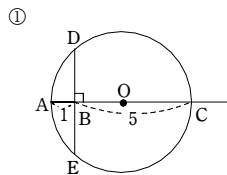
第3講 例題演習

1

【解答】 (1) ① 図の点E ② 図の点H



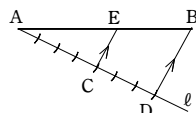
(2) 図の線分BD



【解説】

(1) ①

- (i) Aを通り、直線ABと異なる半直線 l を引く。
- (ii) l 上に、 $AC:CD=4:3$ となるように点C, Dをとる。
ただし、Cは線分AD上にとる。
- (iii) Cを通り、直線BDに平行な直線を引き、線分ABとの交点をEとする。点Eが求める点である。
このとき、 $EC \parallel BD$ から



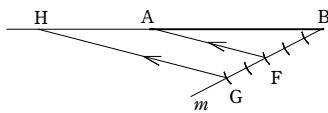
$$AE:EB=AC:CD=4:3$$

よって、点Eは線分ABを4:3に内分する点である。

② (i) Bを通り、直線BAと異なる半直線 m を引く。

- (ii) m 上に、 $BF:FG=3:2$ となるように点F, Gをとる。
ただし、Fは線分BG上にとる。

- (iii) Gを通り、直線AFに平行な直線を引き、直線BAとの交点をHとする。点Hが求める点である。

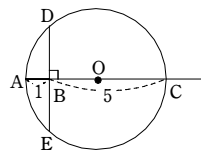


$$AH:HB=FG:GB=2:5$$

よって、点Hは線分ABを2:5に外分する点である。

(2) ①

- (i) 半直線ABのBを越える延長上に、 $BC=5$ となる点Cをとる。
- (ii) 線分ACの垂直二等分線とACとの交点をOとし、Oを中心として、半径OAの円をかく。
- (iii) Bを通り、直線ABに垂直な直線を引き、円Oとの交点をD, Eとする。



線分BDが求める線分である。

このとき、方べきの定理により

$$BA \cdot BC = BD \cdot BE$$

$AB=1, BC=5, BD=BE$ であるから $BD^2=5$

よって、線分BDは長さ $\sqrt{5}$ の線分である。

【別解】 (i) Bを通り、線分ABに垂直な直線を引き、その上に $BC=2$ となる点Cをとる。

- (ii) AとCを線で結ぶ。
線分ACが求める線分である。

このとき、三平方の定理により
 $AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

よって、線分ACは長さ $\sqrt{5}$ の線分である。

② (i) 半直線ABのBを越える延長上に、 $BC=7$ となる点Cをとる。

- (ii) 線分ACの垂直二等分線とACとの交点をOとし、Oを中心として、半径OAの円をかく。

- (iii) Bを通り、直線ABに垂直な直線を引き、円Oとの交点をD, Eとする。
線分BDが求める線分である。

このとき、方べきの定理により
 $BA \cdot BC = BD \cdot BE$

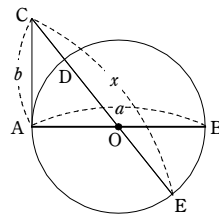
$AB=1, BC=7, BD=BE$ であるから

$$BD^2=7$$

よって、線分BDは長さ $\sqrt{7}$ の線分である。

2

【解答】 図の線分CE



【解説】

- ① 長さ a の線分ABを直径とする円Oをかく。
- ② 点Aを通りABに垂直な直線を引き、その上に $AC=b$ となるような点Cをとる。
- ③ 直線COと円Oの2つの交点のうち、Cに近い方からD, Eとすると、線分CEが求める線分である。

このとき、方べきの定理により $CD \cdot CE = CA^2$

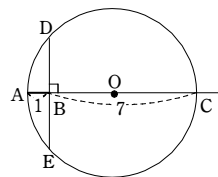
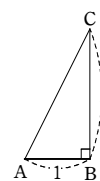
$$CE = x \text{ とおくと } (x-a)x = b^2$$

$$\text{すなわち } x^2 - ax - b^2 = 0$$

よって、線分CEの長さが2次方程式 $x^2 - ax - b^2 = 0$ の正の解となる。

3

- 【解答】 (1) 辺DC, EF, HG (2) 辺BC, EH, DC, CG, HG, DH
(3) 面ABFE, DCGH (4) 辺EF, FG, HG, EH
(5) 面ADHE, BCGF



【解説】

(1) 面ABCD, ABFEは正方形であるから $AB \parallel DC, AB \parallel EF$

面DCGHは正方形であるから $DC \parallel HG$

これと $AB \parallel DC$ から $AB \parallel HG$

☞ 辺DC, EF, HG

(2) 線分AFとねじれの位置にある辺は、線分AFと同じ平面にない辺であるから
辺BC, EH, DC, CG, HG, DH

(3) $BC \perp AB, BC \perp BF$ であるから、辺BCは面ABFEに垂直である。
 $BC \perp CD, BC \perp CG$ であるから、辺BCは面DCGHに垂直である。

☞ 面ABFE, DCGH

(4) 各辺を伸ばしてできる直線のうち、平面ABCDと共有点をもたない直線は
直線EF, FG, HG, EH

よって、面ABCDと平行な辺は 辺EF, FG, HG, EH

(5) 面ADHE, BCGFは直線ABと垂直であるから、面ADHE, BCGFは平面ABGHと垂直である。

☞ 面ADHE, BCGF

4

【解答】 (1) 面の数8, 辺の数18, 頂点の数12 (2) 略 (3) $\frac{23}{27}V$

【解説】

(1) 面の数は、正四面体の面の数と切り口の面の数の和に等しいから
 $4+4=8$

辺の数は、正四面体の辺の数と切り口の辺の数の和に等しいから
 $6+3 \times 4=18$

頂点の数は、切り口の頂点の数に等しいから $3 \times 4=12$

(2) (1)から (頂点の数)-(辺の数)+(面の数) $=12-18+8=2$
よって、成り立つ。

(3) 切り取られる4つのかどの立体は、どれも正四面体であり、もとの正四面体との相似比は $1:3$

よって、体積比は $1^3:3^3=1:27$

したがって、求める多面体の体積は $V - \frac{1}{27}V \times 4 = \frac{23}{27}V$

5

【解答】 (1) $V = \frac{343\sqrt{2}}{3}$ (2) $r = \frac{7\sqrt{6}}{6}$

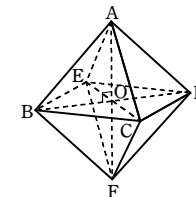
【解説】

(1) この正八面体を平面BCDEで切ると、2つの合同な正四角錐A-BCDE, F-BCDEに分割される。
正方形BCDEの対角線の交点をOとすると、 $\triangle ABO$ は $\angle AOB=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

よって、正四角錐A-BCDEの体積は

$$\frac{1}{3} \times (\text{正方形BCDE}) \times AO \\ = \frac{1}{3} \cdot 7^2 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{343\sqrt{2}}{6}$$



求める正八面体の体積 V は、正四角錐 $A-BCDE$ の体積の2倍であるから

$$V = \frac{343\sqrt{2}}{6} \times 2 = \frac{343\sqrt{2}}{3}$$

(2) 正八面体に内接する球の中心を O とすると、正八面体は合同な8つの四面体 $OABC, OACD, OADE, OAEB, OFBC, OFCD, OFDE, OFEB$ に分割できる。四面体 $OABC$ の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \right) \right\} \cdot r = \frac{49\sqrt{3}}{12} r$$

$$V = 8V_1 \text{ であるから } \frac{343\sqrt{2}}{3} = 8 \cdot \frac{49\sqrt{3}}{12} r \quad \text{よって} \quad r = \frac{7\sqrt{6}}{6}$$

6

【解答】 略

【解説】

AO と平面 BCD は垂直であるから

$$AO \perp CD \quad \dots\dots ①$$

$\triangle BCD$ において、 $BC=BD$ であるから

$$BE \perp CD \quad \dots\dots ②$$

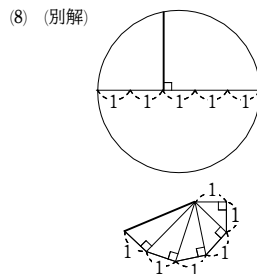
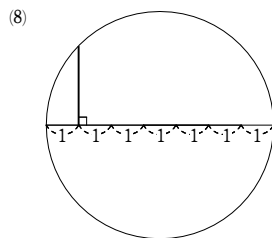
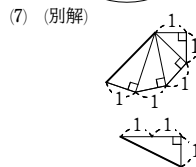
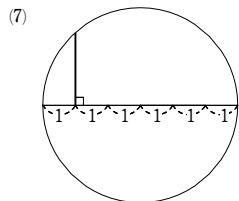
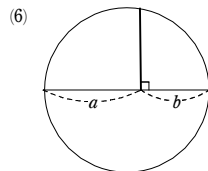
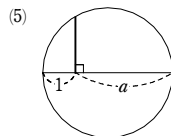
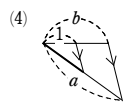
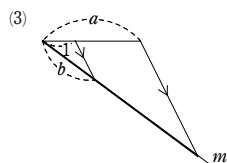
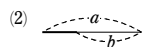
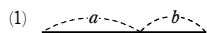
①, ② から、辺 CD は、2直線 AO, BE の定める平面 ABE に垂直である。

したがって、 $AE \perp CD$ である。

1

【解答】 (1) [図] (2) [図] (3) [図] (4) [図] (5) [図] (6) [図] (7) [図]

(8) [図]

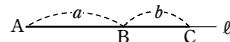


【解説】

(1) 直線 l 上に点 A をとり、 $AB=a$ となるように点 B をとる。

更に、 $BC=b$ となる点 C を、 A と反対側にとる。

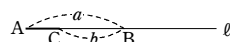
線分 AC が求める線分である。



(2) 直線 l 上に点 A をとり、 $AB=a$ となるように点 B をとる。

更に、 $BC=b$ となる点 C を、線分 AB 上にとる。

線分 AC が求める線分である。



(3) 直線 l 上に点 A をとり、 $AB=a$ となるように点 B をとる。
更に、 A から、 l と異なる直線 m を引き、 $AC=b$ となる点 C を m 上にとる。

l 上に、 $AD=1$ となる点 D をとる。

B を通り、 DC に平行な直線を引き、直線 m との交点を E とする。

このとき、 $ab=AE$ である。

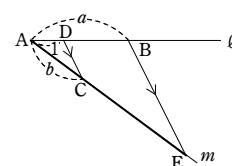
(理由)

$\triangle ADC \sim \triangle ABE$ であるから、 $AD:AC=AB:AE$

すなわち $1:b=a:AE$

よって $ab=AE$

したがって、線分 AE が求める線分である。



(4) 直線 l 上に点 A をとり、 $AB=b$ となるように点 B をとる。

更に、 A から、 l と異なる直線 m を引き、 $AC=a$ となる点 C を、 m 上にとる。

l 上に、 $AD=1$ となる点 D をとる。

D を通り、 BC に平行な直線を引き、直線 m との交点を E とする。

このとき、 $a+b=AE$ である。

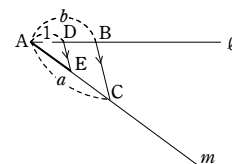
(理由)

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ であるから、 $AD:AE=AB:AC$

すなわち $1:AE=b:a$

よって $AE=a+b$

したがって、線分 AE が求める線分である。



(5) 直線 l 上に点 A をとり、 $AB=1$ となるように点 B をとる。

更に、 l 上に、 $BC=a$ となるように点 C を、 A と反対側にとる。

AC の垂直二等分線を引き、 l との交点を O とし、半径 OA の円をかく。

B を通り、 AB に垂直な直線を引き、円 O との交点を D, E とする。

このとき、 $\sqrt{a}=BD$ である。

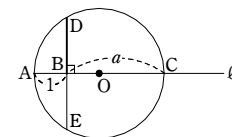
(理由)

方べきの定理により $BA \cdot BC=BD \cdot BE$

$AB=1, BC=a, BD=BE$ であるから $BD^2=a$

よって $BD=\sqrt{a}$

したがって、線分 BD が求める線分である。



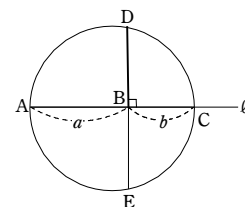
(6) 直線 l 上に点 A をとり、 $AB=a$ となる点 B をとる。

更に、 l 上に、 $BC=b$ となる点 C を、 A と反対側にとる。

線分 AC を直径とする円をかく。

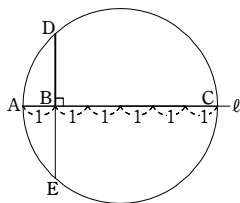
B を通り、 AB に垂直な直線を引き、円との交点を D, E とする。

このとき、 $\sqrt{ab}=BD$ である。



第3講 レベルA

(理由)
 方べきの定理より $BA \cdot BC = BD \cdot BE$
 $AB = a, BC = b, BD = BE$ であるから $ab = BD^2$
 よって $BD = \sqrt{ab}$
 したがって、線分 BD が求める線分である。



(7) 直線 ℓ 上に点 A をとり、 $AB=1$ となる点 B をとる。
 更に、 ℓ 上に、 $AC=6$ となる点 C を、 B と同じ側にとる。

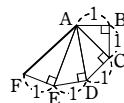
線分 AC を直径とする円 O をかく。
 B を通り、 AB に垂直な直線を引き、円 O との交点を D, E とする。

このとき、 $\sqrt{5} = BD$ である。

(理由)
 方べきの定理より、 $BA \cdot BC = BD \cdot BE$
 $AB=1, BC=5, BD=BE$ であるから $5 = BD^2$
 よって $BD = \sqrt{5}$

したがって、線分 BD が求める線分である。

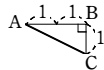
別解1. 長さ1の線分 AB を引き、 B を通り、線分 AB に垂直で長さが1の線分 BC を引く。
 線分 AC に垂直で長さが1の線分 CD を引く。
 同様に、繰り返して、 DE, EF を引く。



このとき、 $\sqrt{5} = AF$ である。

(理由)
 三平方の定理により、 $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2, AD^2 = AC^2 + 1^2 = 3$
 $AE^2 = AD^2 + 1^2 = 4, AF^2 = AE^2 + 1^2 = 5$
 よって $AF = \sqrt{5}$

別解2. 長さ2の線分 AB を引き、線分 AB に垂直で、長さが1の線分 BC を引く。
 このとき、 $\sqrt{5} = AC$ である。



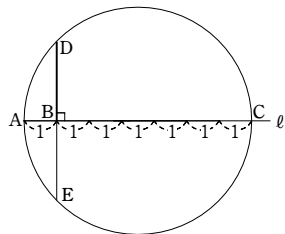
(8) 直線 ℓ 上に点 A をとり、 $AB=1$ となる点 B をとる。
 更に、 ℓ 上に、 $AC=7$ となる点 C を、 B と同じ側にとる。

線分 AC を直径とする円をかく。
 B を通り、 AB に垂直な直線を引き、円との交点を D, E とする。

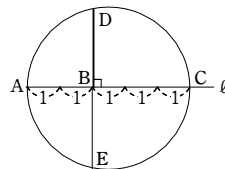
このとき、 $\sqrt{6} = BD$ である。

(理由)
 方べきの定理より $BA \cdot BC = BD \cdot BE$
 $AB=1, BC=6, BD=BE$ であるから $6 = BD^2$
 よって $BD = \sqrt{6}$

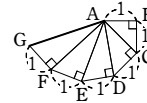
したがって、線分 BD が求める線分である。



別解1. 上の解答で $AB=2, BC=3$ としてもよい。
 そのときは、右の図のようになる。
 このとき、 $\sqrt{6} = BD$ である。



別解2. ((7)の別解1と同様)
 長さ1の線分 AB を引き、 B を通り、線分 AB に垂直で長さが1の線分 BC を引く。
 線分 AC に垂直で長さが1の線分 CD を引く。
 同様に、繰り返して、 DE, EF, FG を引く。
 このとき、 $\sqrt{6} = AG$ である。



(理由)
 三平方の定理により、 $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2, AD^2 = AC^2 + 1^2 = 3$
 $AE^2 = AD^2 + 1^2 = 4, AF^2 = AE^2 + 1^2 = 5, AG^2 = AF^2 + 1^2 = 6$
 よって $AG = \sqrt{6}$
 したがって、線分 AG が求める線分である。

2

解答 (1) $\theta = 60^\circ$ (2) $\theta = 90^\circ$ (3) $\theta = 30^\circ$

解説

- 2直線 AB, KL のなす角は、2直線 AB, AD のなす角と等しい。
 よって $\theta = 60^\circ$
- 2直線 AD, IK のなす角は、2直線 AD, CE のなす角と等しい。
 よって $\theta = 90^\circ$
- 2直線 AB, GI のなす角は、2直線 AB, AC のなす角と等しい。
 よって $\theta = 30^\circ$

3

- 解答 (1) 辺 BC, FG, EH (2) 辺 BC, EH, DC, CG, GH, HD
 (3) 面 $ABCD, EFGH$ (4) 辺 AE, CG (5) 3組
 (6) 面 $BCGF, ADHE$

解説

- 面 $ABCD, BCGF, ADHE$ は正方形であるから、辺 AD と平行な辺は 辺 BC, FG, EH
- 線分 AF とねじれの位置にある辺は、 AF と同じ平面上にない辺であるから 辺 BC, EH, DC, CG, GH, HD
- $BF \perp AB, BF \perp BC$ であるから、辺 BF と面 $ABCD$ は垂直である。
 $BF \perp EF, BF \perp FG$ であるから、辺 BF と面 $EFGH$ は垂直である。
 よって、辺 BF と垂直な面は 面 $ABCD, EFGH$
- 平面 $BFHD$ と平行な辺は、平面 $BFHD$ と交わらない辺であるから 辺 AE, CG
- 平行な位置関係にある面は 面 $ABCD$ と $EFGH$, 面 $ABFE$ と $DCGH$, 面 $ADHE$ と $BCGF$
 よって 3組
- 直線 AB は、面 $BCGF, ADHE$ のそれぞれと垂直であるから、平面 $ABGH$ と垂直な面は 面 $BCGF, ADHE$

4

解答 (1) 順に 14, 24, 12 (2) 順に 26, 48, 24

解説

(1) 面は正六面体の各面に残った面が6面あり、切り取ることによって、できた面が正六面体の各頂点に1つずつできるから、面の数は $6+8=14$
 辺は切り取った三角錐によってできる辺だけがあるから、
 辺の数は $3 \times 8 = 24$

1つの頂点を2つの正方形が共有して、正方形は6個あるから、
 頂点の数は $4 \times 6 \div 2 = 12$

(2) 多面体 Y には、1辺の長さがもとの正六面体の半分の正方形が正六面体の側面に8面あり、その上側には、正方形の面が5つ、正三角形の面が4つある。下側も同様。

よって、面の数は $8 + (5+4) \times 2 = 26$,
 辺の数は $8 \times 3 + (4+8) \times 2 = 48$,
 頂点の数は $8 \times 2 + 4 \times 2 = 24$

5

解答 (1) $\frac{500}{3}$ (2) $72\sqrt{2}$

解説

右の図のように頂点を定める。
 求める体積は、正四角錐 $A-BCDE$ の体積の2倍である。

(1) 正方形 $BCDE$ の面積は、1辺の長さが10の正方形の面積の半分である

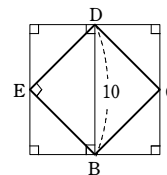
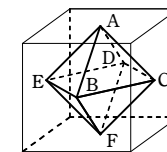
$$10 \times 10 \div 2 = 50$$

正四角錐 $A-BCDE$ の高さは

$$10 \div 2 = 5$$

よって、求める体積は

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 5\right) \times 2 = \frac{500}{3}$$



(2) 平面 $BCDE$ で立方体を切ったときの断面は

右の図のようになる。

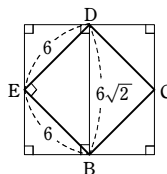
四角形 $BCDE$ は1辺の長さが6の正方形であるから、立方体の1辺の長さは $6\sqrt{2}$ である。

正四角錐 $A-BCDE$ の高さは

$$6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2}$$

よって、求める体積は

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2}\right) \times 2 = 72\sqrt{2}$$



章末問題A

1

【解答】 24

【解説】

MD は $\angle AMB$ の二等分線であるから

$$AD : DB = MA : MB$$

$$= 20 : \frac{60}{2}$$

$$= 2 : 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

同様に, ME は $\angle AMC$ の二等分線であるから

$$AE : EC = MA : MC$$

$$= 2 : 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② から $DE \parallel BC$

ゆえに $DE : BC = AD : AB = 2 : (2+3) = 2 : 5$

$$\text{よって } DE = \frac{2}{5} BC = \frac{2}{5} \cdot 60 = 24$$

2

【解答】 (1) 垂心は頂点 A と一致する。外心は斜辺 BC の中点と一致する

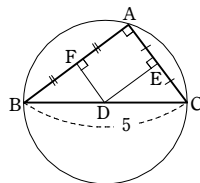
(2) 線分 BG の長さの方が大きい

(3) 外接円の半径 $\frac{5}{2}$, 内接円の半径 1

【解説】

(1) $\angle A = 90^\circ$ であるから, $\triangle ABC$ の垂心は頂点 A と一致する。

また, 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とすると, D は $\triangle ABC$ の外接円の中心であるから, DE, DF はそれぞれ辺 AC, AB の垂直二等分線である。よって, $\triangle ABC$ の外心は斜辺 BC の中点 (D) と一致する。



(2) $\angle A = 90^\circ$ であるから, 三平方の定理により

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

点 G は重心であるので

$$AG = \frac{2}{3} AD, \quad BG = \frac{2}{3} BE \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

点 D は $\triangle ABC$ の外心であるので

$$DB = DA = DC = \frac{5}{2} \quad \text{より} \quad AD^2 = \frac{25}{4}$$

$$\triangle ABE \text{ において, 三平方の定理より } BE^2 = \frac{73}{4}$$

ゆえに $AD^2 < BE^2$

$AD > 0, BE > 0$ であるから $AD < BE$

よって, ① から $AG < BG$

すなわち, 線分 BG の長さの方が大きい。

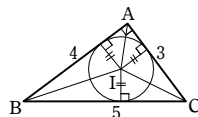
(3) $\triangle ABC$ の外接円の半径は $BD = \frac{1}{2} BC = \frac{5}{2}$

次に, 内心を I, 内接円の半径を r とすると,

$\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot r$$

$$\text{ゆえに } 6 = 2r + \frac{5}{2}r + \frac{3}{2}r \quad \text{よって } r = 1$$



3

【解答】 略

【解説】

中線 AD と FE との交点を P とする。

AE = EC, BD = DC から $AF \parallel ED \quad \dots\dots \textcircled{1}$

AF = FB, CD = DB から $AE \parallel FD \quad \dots\dots \textcircled{2}$

①, ② より, 四角形 AFDE は平行四辺形となる。

よって $FP = PE$

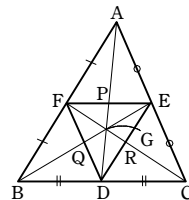
同様に, 中線 BE と FD, 中線 CF と DE の交点をそれぞれ

Q, R とすると $DQ = QF, DR = RE$

したがって, $\triangle ABC$ の重心を G とすると, G は $\triangle DEF$ の

3 つの中線 DP, EQ, FR の交点となり, G は $\triangle DEF$ の重心でもある。

すなわち, $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の重心は一致する。



4

【解答】 略

【解説】

右の図において, 直線 OH と $\triangle ABC$ の中線 AM との交点を G' とする。

AH \perp BC, OM \perp BC より, AH \parallel OM であるから

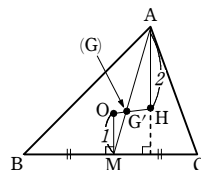
$$AG' : G'M = AH : OM = 2OM : OM = 2 : 1$$

AM は中線であるから, G' は $\triangle ABC$ の重心 G と一致する。

よって, 外心 O, 垂心 H, 重心 G は一直線上にあり

$$HG : OG = AG : GM = 2 : 1$$

すなわち $OG : GH = 1 : 2$



5

【解答】 (1) 3 : 1 (2) 4 : 1 (3) 5 : 2 (4) 35 : 8

【解説】

(1) メネラウスの定理により $\frac{PA}{BP} \cdot \frac{QC}{AQ} \cdot \frac{RB}{CR} = 1$

$$\text{すなわち } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{RB}{CR} = 1$$

$$\text{よって, } \frac{RB}{CR} = \frac{4}{1} \text{ であるから } RB : CR = 4 : 1$$

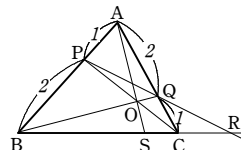
$$\text{ゆえに } BC : CR = 3 : 1$$

(2) チェバの定理により $\frac{PB}{AP} \cdot \frac{SC}{BS} \cdot \frac{QA}{CQ} = 1$

$$\text{すなわち } \frac{2}{1} \cdot \frac{SC}{BS} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{よって, } \frac{SC}{BS} = \frac{1}{4} \text{ であるから } BS : SC = 4 : 1$$

(3) メネラウスの定理により $\frac{PA}{BP} \cdot \frac{OS}{AO} \cdot \frac{CB}{SC} = 1$



(2) より, $\frac{CB}{SC} = \frac{4+1}{1} = 5$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{OS}{AO} \cdot 5 = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{OS}{AO} = \frac{2}{5}$$

したがって $AO : OS = 5 : 2$

(4) (2) の結果から $\triangle OBS : \triangle OBC = BS : BC = 4 : 5$

$$\text{よって } \triangle OBS = \frac{4}{5} \triangle OBC \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また, (3) の結果から $\triangle OBC : \triangle ABC = OS : AS = 2 : 7$

$$\text{よって } \triangle OBC = \frac{2}{7} \triangle ABC$$

$$\text{ゆえに, ① から } \triangle OBS = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{7} \triangle ABC = \frac{8}{35} \triangle ABC$$

$$\text{したがって } \triangle ABC : \triangle OBS = 35 : 8$$

6

【解答】 略

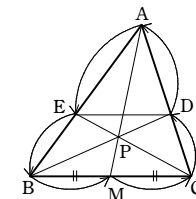
【解説】

チェバの定理により

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1$$

BM = MC であるから $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$

よって $DE \parallel BC$



7

【解答】 (1) BR = 5, AB = 6 (2) $\alpha = 51^\circ, \beta = 78^\circ$ (3) $x = 6$

【解説】

(1) BP, BR は円の接線であるから

$$BR = BP = 5$$

AR, AQ と, CP, CQ も円の接線

であるから $AR = AQ,$

$$CP = CQ$$

よって, $CP = BC - BP = 8 - 5 = 3$ から

$$CQ = CP = 3$$

$$AQ = AC - CQ = 4 - 3 = 1 \text{ から } AR = AQ = 1$$

$$\text{したがって } AB = AR + BR = 1 + 5 = 6$$

(2) 右の図の位置に点 D をとると, 接線と弦の作る角により

$$\alpha = \angle CAD = 51^\circ$$

また, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ であるから

$$\angle BAC = \angle ABC = 51^\circ$$

よって, $\triangle ABC$ の内角について

$$\beta = 180^\circ - (51^\circ + 51^\circ) = 78^\circ$$

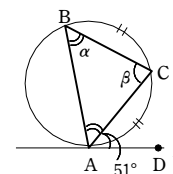
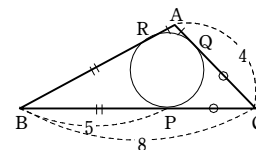
(3) 方べきの定理により $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$$\text{すなわち } (x+4)x = 12 \cdot 5$$

$$\text{よって } x^2 + 4x - 60 = 0$$

$$\text{ゆえに } (x+10)(x-6) = 0$$

$x > 0$ であるから $x = 6$



8

解答 $\frac{\sqrt{2}}{24}$

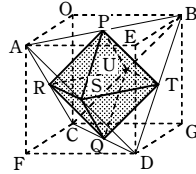
解説

求める立体の体積は、右の図のような、正八面体 PRSTUQ の体積である。

四角形 RSTU は、1 辺の長さが $\frac{1}{2}$ の正方形であり、

正四角錐 P-RSTU, Q-RSTU の高さは、4 点 A, B, C, D を頂点として含む立方体 OAEB-CFDG の 1 辺の長さの半分である。

よって、求める立体の体積は $2 \times \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{24}$



9

解答 [図]の線分 EG

解説

- ① A を通り、直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。
- ② ℓ 上に、 $AC=a$, $CD=1$ となる点 C, D をとる。
ただし、C は線分 AD 上にとる。
- ③ D を通り、線分 BC に平行な直線を引き、直線 AB との交点を E とする。
- ④ 半直線 BE の E を越える延長上に、 $EF=1$ となる点 F をとる。
- ⑤ 線分 BF を直径とする円 O をかく。
- ⑥ E を通り、直線 BF に垂直な直線を引き、円 O との交点を G, H とする。

線分 EG が求める線分である。

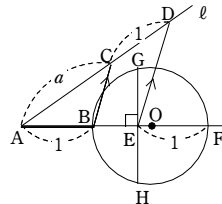
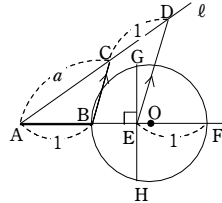
CB//DE であるから $AB:BE=AC:CD$

すなわち $1:BE=a:1$ よって $BE=\frac{1}{a}$

また、方べきの定理により $EB \cdot EF = EG \cdot EH$

$BE=\frac{1}{a}$, $EF=1$, $EG=EH$ であるから $EG^2=\frac{1}{a}$

したがって、線分 EG は長さ $\sqrt{\frac{1}{a}}$ の線分である。



1

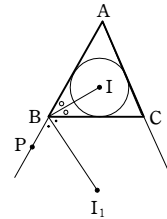
解答 (1) 90° (2) 略

解説

(1) 右の図のように、辺 AB の延長上に点 P をとる。

$\angle ABI = \angle IBC$, $\angle CBI_1 = \angle I_1BP$,
 $\angle ABP = 180^\circ$ から

$\angle IBI_1 = \angle IBC + \angle CBI_1 = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$



(2) $\triangle ABC$ の外接円と線分 II_1 の交点を D とする。

$\angle DBI = \angle IBC + \angle DBC$
ここで、円周角の定理により $\angle DBC = \angle DAC$
また、I は内心であるから $\angle IBC = \angle IBA$
 $\angle DAC = \angle IAB$

よって $\angle DBI = \angle IBA + \angle IAB = \angle DIB$

したがって $DB = DI$ ……①

また、 $\angle IBI_1 = 90^\circ$ であるから

$\angle DBI_1 = 90^\circ - \angle DBI$

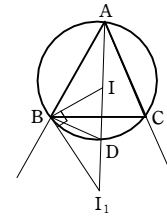
$\angle DI_1B = 90^\circ - \angle DIB$

よって $\angle DBI_1 = \angle DI_1B$

したがって $DB = DI_1$ ……②

①, ② から $DI = DI_1$

よって、 $\triangle ABC$ の外接円は線分 II_1 を 2 等分する。



2

解答 略

解説

$\triangle BCG$ と直線 DQF にメネラウスの定理を用いると

$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CD}{DG} \cdot \frac{GQ}{QB} = 1$ ……①

ここで、四角形 ABCD, EBFQ, PFCG, AEGD はいずれも平行四辺形であるから

$CD = BA$, $BF = EQ$,

$FC = PG$, $DG = AE$

よって、①は $\frac{EP}{PG} \cdot \frac{BA}{AE} \cdot \frac{GQ}{QB} = 1$ すなわち $\frac{BA}{AE} \cdot \frac{EP}{PG} \cdot \frac{GQ}{QB} = 1$

したがって、 $\triangle EBG$ と 3 点 A, P, Q において、メネラウスの定理の逆により、3 点 A, P, Q は 1 つの直線上にある。

3 [名古屋学芸大]

解答 $BD = \frac{14}{3}$, $BF = \frac{8}{3}$, 面積比は 2:9

解説

(1) $\triangle ABC$ の外接円と線分 II_1 の交点を D とする。
 $\angle DBI = \angle IBC + \angle DBC$
ここで、円周角の定理により $\angle DBC = \angle DAC$
また、I は内心であるから $\angle IBC = \angle IBA$
 $\angle DAC = \angle IAB$
よって $\angle DBI = \angle IBA + \angle IAB = \angle DIB$
したがって $DB = DI$ ……①
また、 $\angle IBI_1 = 90^\circ$ であるから
 $\angle DBI_1 = 90^\circ - \angle DBI$
 $\angle DI_1B = 90^\circ - \angle DIB$
よって $\angle DBI_1 = \angle DI_1B$
したがって $DB = DI_1$ ……②
①, ② から $DI = DI_1$
よって、 $\triangle ABC$ の外接円は線分 II_1 を 2 等分する。

AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$BD:DC = AB:AC = 7:5$

よって

$BD = \frac{7}{7+5} BC = \frac{7}{12} \cdot 8 = \frac{14}{3}$

ここで、方べきの定理により

$BF \cdot BA = BE \cdot BD$

すなわち $BF \cdot 7 = \frac{8}{2} \cdot \frac{14}{3}$ よって $BF = \frac{8}{3}$

高さが等しい 2 つの三角形の面積比は、底辺の比に等しいから

$\triangle BDF = \frac{BF}{BA} \triangle ABD = \frac{BF}{BA} \cdot \frac{BD}{BC} \triangle ABC$

$= \frac{8}{7} \cdot \frac{14}{3} \triangle ABC = \frac{2}{9} \triangle ABC$

ゆえに $\triangle BDF : \triangle ABC = 2:9$

4

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略

解説

(1) M は辺 BC の中点、O は線分 DC の中点であるから、中点連結定理により

$DB = 2OM$ ……①

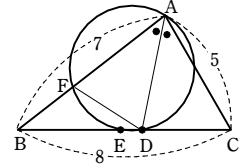
(2) 線分 CD は外接円の直径であるから、
 $DB \perp BC$, $AH \perp BC$ より $DB \parallel AH$

$DA \perp AC$, $BH \perp AC$ より $DA \parallel BH$

ゆえに、四角形 ADHB は平行四辺形である。

(3) (2) から $AH = DB$ ……②

①, ② から $AH = 2OM$



5

解答 (1) 1 (2) $r=1$, $NO = \frac{\sqrt{5}}{2}$

解説

(1) 頂点 A, B, C を中心とする円の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とすると、3 つの円は互いに外接しているから

$r_1 + r_2 = 4$ ……①

$r_2 + r_3 = 5$ ……②

$r_3 + r_1 = 3$ ……③

①, ②, ③ を解くと $r_1 = 1, r_2 = 3, r_3 = 2$

したがって、点 A を中心とする円の半径は 1

(2) $\triangle ABC$ の内接円と、辺 AB, BC, CA の接点をそれぞれ D, E, F とすると

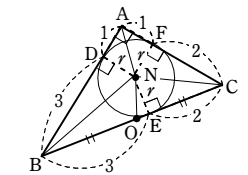
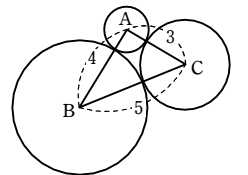
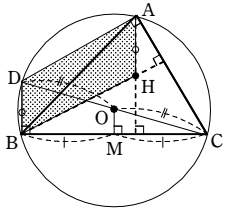
$AD = AF$, $BD = BE$, $CE = CF$

これと (1) の結果により

$AD = AF = 1$,

$BD = BE = 3$,

$CE = CF = 2$



章末問題B

また、 $\triangle ABC$ は、 $3^2+4^2=5^2$ より、 $\angle A=90^\circ$ の直角三角形であり、
 $\angle ADN=\angle AFN=90^\circ$ かつ $ND=NF=r$ であるから、四角形 $ADNF$ は正方形である。
 よって、内接円の半径 r は $r=ND=AD=1$
 さらに、 $\angle A=90^\circ$ より、辺 BC は $\triangle ABC$ の外接円の直径であるから

$$BO=CO=\frac{5}{2}$$

$$CE=2 \text{ より } OE=CO-CE=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$$

したがって、直角三角形 NOE において、三平方の定理により

$$NO=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

別解 (内接円の半径 r)

$$\text{直角三角形 } ABC \text{ の面積について } \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} r(3+4+5)$$

これを解くと $r=1$

6

解答 (1) $3ab+24a-35b=0$ (2) $a=\frac{31}{15}, b=\frac{31}{18}$

解説

(1) $\triangle ABC$ と直線 DF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\text{よって } \frac{b}{6-b} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{5-a}{a} = 1$$

$$\text{ゆえに } 7b(5-a) = 4a(6-b)$$

$$\text{これを整理すると } 3ab+24a-35b=0 \dots\dots ①$$

(2) 4点 B, C, E, F が同一円周にあるから、方べきの定理により

$$AF \cdot AB = AE \cdot AC$$

$$\text{すなわち } 6b=5a \quad \text{よって } b=\frac{5}{6}a$$

$$\text{これを } ① \text{ に代入して整理すると } a(15a-31)=0$$

$$a \neq 0 \text{ であるから } a=\frac{31}{15} \quad \text{このとき } b=\frac{31}{18}$$

(これらは、 $0 < a < 5, 0 < b < 6$ を満たす)

$$\text{したがって } a=\frac{31}{15}, b=\frac{31}{18}$$

7

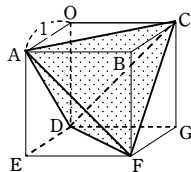
解答 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

解説

(1) 求める体積は、右の図のような、1辺の長さが1の立方体 $OABC-DEFG$ の内部にある、正四面体 $ACDF$ の体積である。

正四面体 $ACDF$ は、立方体から4つの四面体 $OADC, BAFD, EADF, GCDF$ を除いたものであり、これら4つの四面体の体積はすべて

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2\right) \cdot 1 = \frac{1}{6}$$



よって、求める正四面体の体積は $1^3 - 4 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

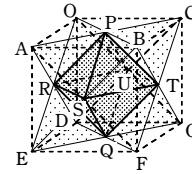
(2) 求める共通部分の体積は、右の図のような、正八面体 $PRSTUQ$ の体積である。

この正八面体を、平面 $RSTU$ で切ったときの

断面は、1辺の長さが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の正方形であり、

正四角錐 $P-RSTU, Q-RSTU$ の高さは、立方体 $OABC-DEFG$ の1辺の長さの半分である。

$$\text{よって、求める共通部分の体積は } 2 \times \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



参考 (1辺の長さが a の正四面体, 正八面体の体積)

1辺の長さが a の正四面体の体積 V_1 は、(1) と同様に、1辺の長さが $\frac{a}{\sqrt{2}}$ の立方体から、かどの4つの四面体を除いた立体の体積として求めて

$$V_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 - 4 \times \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

1辺の長さが a の正八面体の体積 V_2 は、(2) と同様に、1辺の長さが $\sqrt{2}a$ の立方体の各面の中心を頂点とする2つの正四角錐を合わせた立体の体積として求めて

$$V_2 = 2 \times \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$

8

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) H は $\triangle ABC$ の垂心であるから

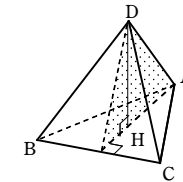
$$BC \perp AH$$

また、 DH は平面 ABC に垂直であるから

$$BC \perp DH$$

よって、 BC は平面 ADH に垂直である。

したがって $BC \perp DA$

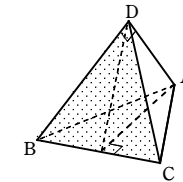


(2) 仮定より $DA \perp DB$

$$(1) \text{ より } DA \perp BC$$

よって、 DA は平面 BCD に垂直である。

したがって $DA \perp DC$



9

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ において、

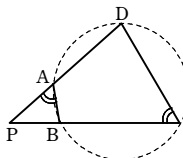
$$PA \cdot PD = PB \cdot PC \text{ から}$$

$$PA : PC = PB : PD$$

また $\angle P$ は共通

$$\text{よって } \triangle PAB \sim \triangle PCD$$

$$\text{ゆえに } \angle PAB = \angle PCD$$



1つの外角が、それと隣り合う内角の対角に等しいから、四角形 $ABCD$ は円に内接する。

(2) まず、四角形 $ACDF$ が円に内接することを示す。

方べきの定理により

$$BF \cdot BA = BP \cdot BE,$$

$$BP \cdot BE = BD \cdot BC$$

$$\text{よって } BF \cdot BA = BD \cdot BC$$

ゆえに、(1) より、四角形 $ACDF$ は円に内接する。

次に、点 P が $\triangle ABC$ の垂心であることを示す。

四角形 $AFPE$ が円に内接するから

$$\angle AFP + \angle AEP = 180^\circ$$

四角形 $CEPD$ が円に内接するから $\angle AEP = \angle PDC$

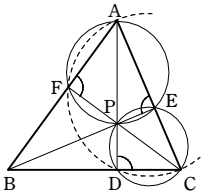
$$\text{これらより } \angle AFC + \angle ADC = 180^\circ \dots\dots ①$$

また、四角形 $ACDF$ は円に内接するから、円周角の定理により

$$\angle AFC = \angle ADC$$

$$\text{これと } ① \text{ から } \angle AFC = \angle ADC = 90^\circ$$

したがって、点 P は $\triangle ABC$ の垂心である。



10

解答 略

解説

2直線 BB', CC' の交点を I とし、 I から3辺 BC, CA, AB に垂線 IP, IQ, IR を引く。

IB は $\angle B$ の二等分線であるから $IP=IR \dots\dots ①$

IC は $\angle C$ の二等分線であるから $IP=IQ \dots\dots ②$

①, ② より、 $IQ=IR$ となるから、 IA は $\angle A$ の二等分線である。

したがって、3直線 AA', BB', CC' は1点 ($\triangle ABC$ の内心 I) で交わり、 H と I は一致する。

ここで、 AA' と $B'C'$ の交点を D とする。

円周角の定理により

$$\angle A'C'C = \angle A'AC = \frac{1}{2} \angle A$$

$$\angle CC'B' = \angle CBB' = \frac{1}{2} \angle B$$

$$\angle AA'C' = \angle ACC' = \frac{1}{2} \angle C$$

よって、 $\triangle A'DC'$ において

$$\angle A'DC' = 180^\circ - (\angle A'C'B' + \angle AA'C')$$

$$= 180^\circ - (\angle A'C'C + \angle CC'B' + \angle AA'C')$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B + \angle C) = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

したがって $AA' \perp B'C'$ すなわち $HA' \perp B'C'$

同様に $HB' \perp C'A', HC' \perp A'B'$

よって、 H は $\triangle A'B'C'$ の垂心と一致する。

