$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$p=\frac{1}{3}$，$n=2$ のとき，点 A の移動は次の 3 通り。

(i)　負の向きに 2 回移動する

このとき，$X=-1-1={}^{ア}-2$ で　$P(X=-2)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{{}^{エ}4}{{}^{オ}9}$

(ii)　正の向きと負の向きに 1 回ずつ移動する

このとき，$X=3-1={}^{イ}2$ で　$P(X=2)={}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{{}^{カ}4}{9}$

(iii)　正の向きに 2 回移動する

このとき，$X=3+3={}^{ウ}6$ で　$P(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{{}^{キ}1}{9}$

(2)　n 回移動して，正の向きに移動した回数が Y であるから

$$X=3Y+(-1)\cdot(n-Y)={}^{ク}-n+{}^{ケ}4Y$$

また，1 回ごとの移動は独立であるから，確率変数 Y は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

ゆえに，Y の平均と分散は

$$E(Y)=np\quad({}^{コ}⓪)$$

$$V(Y)=np(1-p)\quad({}^{サ}①)$$

よって，X の平均と分散は

$$E(X)=E(-n+4Y)=4E(Y)-n=4np-n\quad({}^{シ}⑨)$$

$$V(X)=V(-n+4Y)=4^2V(Y)=16np(1-p)\quad({}^{ス}⑧)$$

(3)　(2) の結果に $p=\frac{1}{4}$，$n=1200$ を代入すると，

Y の平均は　$1200\cdot\frac{1}{4}={}^{セソタ}300$

Y の標準偏差は　$\sqrt{1200\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{1200\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}={}^{チツ}15$

このとき，$X=-1200+4Y$ であるから，$X\geqq 120$ に代入すると

$$-1200+4Y\geqq 120$$

ゆえに　$Y\geqq 330$

よって　$\frac{Y-300}{15}\geqq\frac{330-300}{15}=2.00$

ゆえに　$P(X\geqq 120)=P\left(\frac{Y-300}{15}\geqq{}^{テ}2.{}^{トナ}00\right)$

ここで，$n=1200$ は十分に大きいので，確率変数 $\frac{Y-300}{15}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，標準正規分布に従う確率変数を Z とすると，求める確率の近似値は正規分布表から

$$P\left(\frac{Y-300}{15}\geqq 2.00\right)=P(Z\geqq 2.00)=0.5-0.4772=0.0228$$

したがって　$0.{}^{ニヌネ}023$

(4)　2400 回移動した後の点 A の座標が $X=1440$ であるから，(2) より

$$1440=-2400+4y$$

ゆえに　$y=960$

したがって，標本比率 r は　$r=\frac{960}{2400}=0.4$

ゆえに，求める信頼区間は

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}\leqq p\leqq 0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}$$

ここで　$1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}=1.96\cdot 0.01=0.0196$

であるから

$$0.4-0.0196\leqq p\leqq 0.4+0.0196$$

$$0.3804\leqq p\leqq 0.4196$$

ゆえに　$0.{}^{ノハヒ}380\leqq p\leqq 0.{}^{フヘホ}420$

参考　n が十分に大きいならば，確率変数 R は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$ に従うことから

$$W=\frac{R-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表から

$$P(|W|\leqq 1.96)=2P(0\leqq W\leqq 1.96)=2\cdot 0.4750=0.95$$

ゆえに，p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$r-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\leqq p\leqq r+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$n=2400$ が十分に大きいので大数の法則から，求める信頼区間は

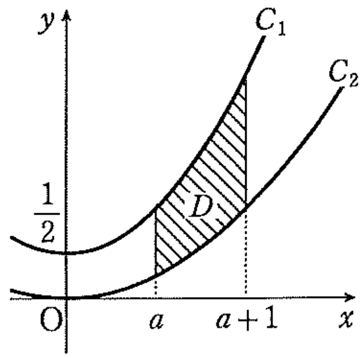
$$r-1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}\leqq p\leqq r+1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}>0$

よって，すべての実数 x について　$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}>\frac{1}{4}x^2$



ゆえに　$S=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{{}^{ア}4}x^2+\frac{1}{{}^{イ}2}\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{12}+\frac{x}{2}\right]_a^{a+1}$

$=\frac{a^2}{{}^{ウ}4}+\frac{a}{{}^{エ}4}+\frac{{}^{オ}7}{{}^{カキ}12}$

$=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{48}$

よって，S は $a=\frac{{}^{クケ}-1}{{}^{コ}2}$ で最小値 $\frac{{}^{サシ}25}{{}^{スセ}48}$ をとる。

(2) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=1$ を解いて　$x=\pm1$

よって，C_1 と $y=1$ との交点の座標は　$(\pm{}^{ソ}1,\ 1)$

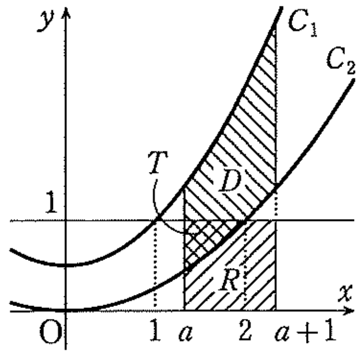
また，$\frac{1}{4}x^2=1$ を解いて　$x=\pm2$

よって，C_2 と $y=1$ との交点の座標は　$(\pm{}^{タ}2,\ 1)$

したがって，$a>2$ のとき，R は C_2 と x 軸の間にあるから，D と R は共通部分をもたない。

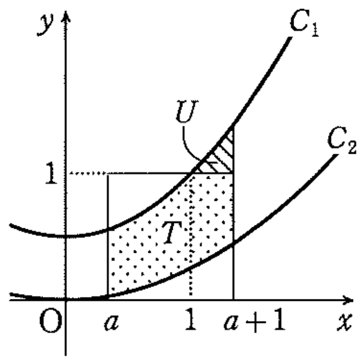
$a\geqq0$ であるから，求める a の範囲は　$0\leqq a\leqq{}^{チ}2$

$1\leqq a\leqq2$ のとき，R は C_1 と x 軸の間にあるから，共通部分は右の図のようになる。



図より，a が増加するとき，共通部分は小さくなるから，T は減少する。(^{ツ} ①)

$0\leqq a\leqq1$ のとき，D のうち R の外側にある部分の面積 U は，右の図より



$U=\int_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-1\right)dx=\int_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}\right]_1^{a+1}=\frac{a^3}{{}^{テ}6}+\frac{a^2}{{}^{ト}2}$

したがって，$0\leqq a\leqq1$ において

$T=S-U=\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}-\left(\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}\right)$

$=-\frac{a^3}{{}^{ナ}6}-\frac{a^2}{{}^{ニ}4}+\frac{a}{{}^{ヌ}4}+\frac{7}{12}$

ゆえに　$T'=-\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}$

$T'=0$ とすると　$a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

よって，$0\leqq a\leqq1$ における T の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
T'		$+$	0	$-$	
T		↗	極大	↘	

したがって，T は $a=\frac{{}^{ネノ}-1+\sqrt{{}^{ハ}3}}{{}^{ヒ}2}$ で最大値をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

(1) (A 君) $\longrightarrow$ (B 君) の順で取り出す球の色を表す.

[1] 2 点の場合

(赤) $\longrightarrow$ (赤), (赤) $\longrightarrow$ (白, 白), (白, 白) $\longrightarrow$ (赤)

このときの確率は $\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{4}{15}$

[2] 3 点の場合

(白, 赤) $\longrightarrow$ (白, 赤)

このときの確率は $\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{30}$

4 点以上で得点が同じになる場合はない.

したがって $p_1=\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{3}{10}$

(2) [1] A 君が 3 点の場合

(白, 赤) $\longrightarrow$ (赤), (白, 赤) $\longrightarrow$ (白, 白)

このときの確率は $\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

[2] A 君が 4 点以上の場合は必ず B 君より得点が大きい.

A 君の取り出し方は (白, 青), (青, 白), (青, 赤)

このときの確率は $\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{15}$

したがって $p_2=\dfrac{1}{12}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{7}{20}$

$\boxed{4}$

(解説)

m と n が 1 以外に公約数をもたない自然数であるとき,「m と n は互いに素である」という.

(1) 方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が有理数の解 $x=\alpha$ をもつとする.

$\alpha=0$ のとき, α は整数となる.

$\alpha>0$ のとき, $\alpha=\dfrac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数) とする.

$x=\alpha$ は方程式の解であるから

$$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

すなわち $\left(\dfrac{n}{m}\right)^3+a\left(\dfrac{n}{m}\right)^2+b\left(\dfrac{n}{m}\right)+c=0$

ゆえに $n^3+amn^2+bm^2n+cm^3=0$

よって $n^3=-m(an^2+bmn+cm^2)$

a, b, c, m, n は整数であるから, n^3 は m の倍数である.

m と n は互いに素であるから, m と n^3 も互いに素である.

したがって $m=1$

ゆえに, α は整数となる.

また, $\alpha<0$ のとき, $\alpha=-\dfrac{n}{m}$ とすると, 同様の結果が得られる.

(2) 方程式 $x^3+2x^2+2=0$ が有理数の解 $x=\alpha$ をもつと仮定する.

(1) から, α は整数である.

$\alpha^3+2\alpha^2+2=0$ から $\alpha^3+2\alpha^2=-2$

すなわち $\alpha^2(\alpha+2)=-2$

α は整数であるから $(\alpha,\ \alpha+2)=(1,\ -2),\ (-1,\ -2)$

しかし, これを満たす α は存在しないから, 矛盾.

したがって, 方程式 $x^3+2x^2+2=0$ は有理数の解をもたない.