1

（解説）

(1)　確率変数 X の分散について，$\{\sigma(X)\}^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ が成り立つから

$$5^2=E(X^2)-(-7)^2 \qquad \text{よって}\quad E(X^2)={}^{\text{アイ}}74$$

$W=1000X$ とすると

$$E(W)=E(1000X)=1000E(X)=1000\cdot(-7)=-7\times10^{{}^{\text{ウ}}3}$$

$$V(W)=V(1000X)=1000^2V(X)=1000^2\cdot\{\sigma(X)\}^2=1000^2\cdot5^2=5^{{}^{\text{エ}}2}\cdot10^{{}^{\text{オ}}6}$$

(2)　$X\geqq0$ から　$\dfrac{X+7}{5}\geqq\dfrac{0+7}{5}=1.4$

よって　$P(X\geqq0)=P\left(\dfrac{X+7}{5}\geqq{}^{\text{カ}}1.{}^{\text{キ}}4\right)$

ここで，X が正規分布 $N(-7,\ 5^2)$ に従うから，確率変数 $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}=\dfrac{X+7}{5}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$Z=\dfrac{X+7}{5}$ とすると，正規分布表より

$$P(Z\geqq1.4)=0.5-P(0\leqq Z\leqq1.4)=0.5-0.4192=0.0808$$

小数第3位を四捨五入して　$P(Z\geqq1.4)=0.{}^{\text{クケ}}08$

これが，物質 A の量が減少しない確率 $P(X\geqq0)$ である。

よって，確率変数 M は二項分布 $B(50,\ 0.08)$ に従うから

$$E(M)=50\cdot0.08={}^{\text{コ}}4.{}^{\text{サ}}0$$

$$\sigma(M)=\sqrt{50\cdot0.08\cdot(1-0.08)}=\sqrt{4.0\cdot0.92}=\sqrt{3.68}$$

根号内の小数第2位を四捨五入して　$\sigma(M)=\sqrt{{}^{\text{シ}}3.{}^{\text{ス}}7}$

(3)　標本平均 $\overline{Y}$ の標準偏差は　$\sigma(\overline{Y})=\dfrac{6}{\sqrt{100}}={}^{\text{セ}}0.{}^{\text{ソ}}6$

よって，確率変数 $Z=\dfrac{\overline{Y}-m}{0.6}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，正規分布表より　$P(|Z|\leqq1.64)=2P(0\leqq Z\leqq1.64)=2\cdot0.4495=0.899$

小数第3位を四捨五入して　$P(|Z|\leqq1.64)=0.{}^{\text{タチ}}90$

ここで，$|Z|\leqq1.64$ から　$\left|\dfrac{\overline{Y}-m}{0.6}\right|\leqq1.64$　すなわち　$|\overline{Y}-m|\leqq0.984$

よって　$-0.984\leqq\overline{Y}-m\leqq0.984$　ゆえに　$\overline{Y}-0.984\leqq m\leqq\overline{Y}+0.984$

したがって　$P(\overline{Y}-0.984\leqq m\leqq\overline{Y}+0.984)=0.90$

これは，母平均 m に対する信頼度 90 % の信頼区間が $\overline{Y}-0.984\leqq m\leqq\overline{Y}+0.984$ であることを表している。

$\overline{Y}=-10.2$ を代入して　$-11.184\leqq m\leqq-9.216$

小数第2位をそれぞれ四捨五入して　$-11.2\leqq m\leqq-9.2$　（ツ ②）

2

（解説）

$$\begin{cases}\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 & \cdots\cdots ①\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^y-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

真数の条件により　$x+2>0$，$y+3>0$　ゆえに　$x>-2$，$y>-3$　（ア ②）

底の変換公式により　$\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(y+3)}{{}^{\text{イ}}2}$

よって，① から　$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1$

$$\log_2(y+3)=\log_2(x+2)+1$$

$$\log_2(y+3)=\log_2(x+2)+\log_2 2$$

$$\log_2(y+3)=\log_2 2(x+2)$$

したがって，$y+3=2(x+2)$ から　$y={}^{\text{ウ}}2x+{}^{\text{エ}}1$　……③

③ を ② に代入すると　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$

両辺に 3 を掛けて　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}+18=0$

$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ とおくと　$t^2-{}^{\text{オカ}}11t+{}^{\text{キク}}18=0$　……④

$x>-2$，$y>-3$ であるから　$x>-2$，$2x+1>-3$

ゆえに　$x>-2$

$0<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ であるから　${}^{\text{ケ}}0<t<{}^{\text{コ}}9$　……⑤

④ から　$(t-2)(t-9)=0$　⑤ より　$t={}^{\text{サ}}2$

よって　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2$　すなわち　$3^x=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$x=\log_3\dfrac{1}{2}$

③ から　$y=2\log_3\dfrac{1}{2}+1=\log_3\dfrac{1}{4}+\log_3 3=\log_3\left(\dfrac{1}{4}\times3\right)=\log_3\dfrac{3}{4}$

したがって，連立方程式 ①，② を満たす実数 x，y の値は

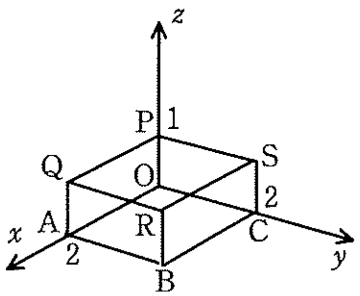
$$x=\log_3\frac{{}^{\text{シ}}1}{{}^{\text{ス}}2},\quad y=\log_3\frac{{}^{\text{セ}}3}{{}^{\text{ソ}}4}$$

3

解説

(1) $\overrightarrow{OD}=(x,\ y,\ 1)=(x,\ 0,\ 0)+(0,\ y,\ 0)+(0,\ 0,\ 1)$

$$=\frac{x}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{y}{2}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}$$ 答



(2) $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}=(2,\ -2,\ 1)$ であるから

$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{CQ}$ より　$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$

よって　$2x-2y+1=0$　$(0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2)$　答

(3) (2) から　$\overrightarrow{OD}=\left(x,\ x+\frac{1}{2},\ 1\right)$

ゆえに　$|\overrightarrow{OD}|^2=x^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

$0\leqq x\leqq 2$ の範囲において，$|\overrightarrow{OD}|^2$ は $x=0$ のとき最小となり，$|\overrightarrow{OD}|\geqq 0$ であるから，

このとき $|\overrightarrow{OD}|$ も最小となる．

また，$x=0$ のとき，$y=\frac{1}{2}$ であり，これは $0\leqq y\leqq 2$ を満たす．

答　$x=0,\ y=\frac{1}{2}$

4

解説

(1) $f(-x)=|(-x)^3-3a^2(-x)|=|x^3-3a^2x|=f(x)$ であるから，$-1\leqq x\leqq 1$ における最大値は $0\leqq x\leqq 1$ における最大値と同じである．

よって，$0\leqq x\leqq 1$ において考える．

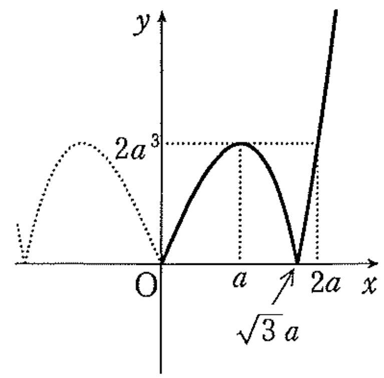
$g(x)=x^3-3a^2x$ とおく．

$g'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$g(x)=0$ すなわち $x(x^2-3a^2)=0$ について，これは

$a>0,\ 0\leqq x\leqq 1$ であるから　$x=0,\ \sqrt{3}a$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．



$f(a)=2a^3$ であるから，$x>\sqrt{3}a$ のとき，

$f(x)=x^3-3a^2x=2a^3$ とすると

$$(x-2a)(x+a)^2=0$$

よって　$f(a)=f(2a)$

以上のことから，$M(a)$ は次の通りである．

$0<2a\leqq 1$ すなわち $0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき　$M(a)=f(1)=1-3a^2$

$a\leqq 1<2a$ すなわち $\frac{1}{2}<a\leqq 1$ のとき　$M(a)=f(a)=2a^3$

$1<a$ のとき　$M(a)=f(1)=3a^2-1$　答

(2) (1) より，$M(a)$ は $0<a\leqq\frac{1}{2}$ で単調減少であり，$\frac{1}{2}<a$ で単調増加である．

よって，$a=\frac{1}{2}$ において $M(a)$ は最小になる．　答　$a=\frac{1}{2}$