$\boxed{1}$

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　ある食品を摂取したときに，血液中の物質 A の量がどのように変化するか調べたい。食品摂取前と摂取してから 3 時間後に，それぞれ一定量の血液に含まれる物質 A の量 (単位は mg) を測定し，その変化量，すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数を X とする。X の期待値 (平均) は $E(X)=-7$，標準偏差は $\sigma(X)=5$ とする。

このとき，X^2 の期待値は $E(X^2)=\boxed{\text{アイ}}$ である。

また，測定単位を変更して $W=1000X$ とすると，その期待値は $E(W)=-7\times 10^{\boxed{\text{ウ}}}$，分散は $V(W)=5^{\boxed{\text{エ}}}\times 10^{\boxed{\text{オ}}}$ となる。

(2)　(1) の X が正規分布に従うとするとき，物質 A の量が減少しない確率 $P(X\geqq 0)$ を求めよう。この確率は

$$P(X\geqq 0)=P\left(\frac{X+7}{5}\geqq \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}\right)$$

であるので，標準正規分布に従う確率変数を Z とすると，正規分布表から，次のように求められる。

$$P\left(Z\geqq \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}\right)=0.\boxed{\text{クケ}} \quad \cdots\cdots ①$$

無作為に抽出された 50 人がこの食品を摂取したときに，物質 A の量が減少するか，減少しないかを考え，物質 A の量が減少しない人数を表す確率変数を M とする。M は二項分布 $B\left(50,\ 0.\boxed{\text{クケ}}\right)$ に従うので，期待値は $E(M)=\boxed{\text{コ}}.\boxed{\text{サ}}$，標準偏差は $\sigma(M)=\sqrt{\boxed{\text{シ}}.\boxed{\text{ス}}}$ となる。ただし，$0.\boxed{\text{クケ}}$ は ① で求めた小数第 2 位までの値とする。

(3)　(1) の食品摂取前と摂取してから 3 時間後に，それぞれ一定量の血液に含まれる別の物質 B の量 (単位は mg) を測定し，その変化量，すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数を Y とする。Y の母集団分布は母平均 m，母標準偏差 6 をもつとする。m を推定するため，母集団から無作為に抽出された 100 人に対して物質 B の変化量を測定したところ，標本平均 $\overline{Y}$ の値は -10.2 であった。

このとき，$\overline{Y}$ の期待値は $E(\overline{Y})=m$，標準偏差は $\sigma(\overline{Y})=\boxed{\text{セ}}.\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\overline{Y}$ の分布が正規分布で近似できるとすれば，$Z=\dfrac{\overline{Y}-m}{\boxed{\text{セ}}.\boxed{\text{ソ}}}$ は近似的に標準正規分布に従うとみなすことができる。

正規分布表を用いて $|Z|\leqq 1.64$ となる確率を求めると $0.\boxed{\text{タチ}}$ となる。

このことを利用して，母平均 m に対する信頼度 $\boxed{\text{タチ}}$ % の信頼区間，すなわち，

$\boxed{\text{タチ}}$ % の確率で m を含む信頼区間を求めると，$\boxed{\text{ツ}}$ となる。

$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $-11.7 \leqq m \leqq -8.7$

① $-11.4 \leqq m \leqq -9.0$

② $-11.2 \leqq m \leqq -9.2$

③ $-10.8 \leqq m \leqq -9.6$

$\boxed{2}$

連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 & \cdots\cdots ① \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 x，y を求めよう。

真数の条件により，x，y のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

⓪ $x>0$，$y>0$　① $x>2$，$y>3$　② $x>-2$，$y>-3$

③ $x<0$，$y<0$　④ $x<2$，$y<3$　⑤ $x<-2$，$y<-3$

底の変換公式により $\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

よって，① から

$$y=\boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エ}} \quad \cdots\cdots ③$$

が得られる。

次に，$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき，③ を用いて ② を t の方程式に書き直すと

$$t^2-\boxed{\text{オカ}}t+\boxed{\text{キク}}=0 \quad \cdots\cdots ④$$

が得られる。また，x が $\boxed{\text{ア}}$ における x の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ケ}}<t<\boxed{\text{コ}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

である。

⑤ の範囲で方程式 ④ を解くと，$t=\boxed{\text{サ}}$ となる。したがって，連立方程式 ①，② を満たす実数 x，y の値は

$$x=\log_3\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad y=\log_3\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であることがわかる。

$\boxed{3}$

座標空間内の 8 点 O$(0, 0, 0)$, A$(2, 0, 0)$, B$(2, 2, 0)$, C$(0, 2, 0)$, P$(0, 0, 1)$, Q$(2, 0, 1)$, R$(2, 2, 1)$, S$(0, 2, 1)$ を頂点とする直方体を考える.

(1) D$(x, y, 1)$ を面 PQRS 上の点とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を x, y およびベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ.

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と直交する (垂直である) ための条件を x, y を用いて表せ.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ である D の中で $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ が最小となるような D を与える x, y の値を求めよ.

$\boxed{4}$

$a>0$ とする．関数 $f(x)=|x^3-3a^2x|$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ.

(2) $M(a)$ を最小にする a の値を求めよ.