$\boxed{1}$

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。
ある市の市立図書館の利用状況について調査を行った。

(1)　ある高校の生徒 720 人全員を対象に，ある 1 週間に市立図書館で借りた本の冊数について調査を行った。
その結果，1 冊も借りなかった生徒が 612 人，1 冊借りた生徒が 54 人，2 冊借りた生徒が 36 人であり，3 冊借りた生徒が 18 人であった。4 冊以上借りた生徒はいなかった。
この高校の生徒から 1 人を無作為に選んだとき，その生徒が借りた本の冊数を表す確率変数を X とする。

このとき，X の平均 (期待値) は $E(X)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，X^2 の平均は $E(X^2)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$

である。よって，X の 標準偏差は $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2)　市内の高校生全員を母集団とし，ある 1 週間に市立図書館を利用した生徒の割合 (母比率) を p とする。この母集団から 600 人を無作為に選んだとき，その 1 週間に市立図書館を利用した生徒の数を確率変数 Y で表す。

$p=0.4$ のとき，Y の平均は $E(Y)=\boxed{\text{キクケ}}$，標準偏差は $\sigma(Y)=\boxed{\text{コサ}}$ になる。ここで，$Z=\dfrac{Y-\boxed{\text{キクケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ とおくと，標本数 600 は十分に大きいので，Z は近似的に標準正規分布に従う。このことを利用して，Y が 215 以下となる確率を求めると，その確率は 0.$\boxed{\text{シス}}$ になる。

また，$p=0.2$ のとき，Y の平均は $\boxed{\text{キクケ}}$ の $\dfrac{1}{\boxed{\text{セ}}}$ 倍，標準偏差は $\boxed{\text{コサ}}$ の

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{3}$ 倍である。

(3)　市立図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とする。1 回あたりの利用時間 (分) を表す確率変数を W とし，W は母平均 m，母標準偏差 30 の分布に従うとする。
この母集団から大きさ n の標本 W_1，W_2，……，W_n を無作為に抽出した。
利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために

$$U_1=W_1-60,\ U_2=W_2-60,\ \cdots\cdots,\ U_n=W_n-60$$

とおくと，確率変数 U_1，U_2，……，U_n の平均と標準偏差はそれぞれ

$$E(U_1)=E(U_2)=\cdots\cdots=E(U_n)=m-\boxed{\text{タチ}}$$

$$\sigma(U_1)=\sigma(U_2)=\cdots\cdots=\sigma(U_n)=\boxed{\text{ツテ}}$$

である。

ここで，$t=m-60$ として，t に対する信頼度 95 % の信頼区間を求めよう。この母集団から無作為抽出された 100 人の生徒に対して U_1，U_2，……，U_{100} の値を調べたところ，その標本平均の値が 50 分であった。標本数は十分大きいことを利用して，この信頼区間を求めると

$$\boxed{\text{トナ}}.\boxed{\text{ニ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{ヌネ}}.\boxed{\text{ノ}}$$

になる。

$\boxed{2}$

数列 $\{a_n\}$ は，初項 a_1 が 0 であり，$n=1$，2，3，…… のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}\quad\cdots\cdots①$$

(1)　$a_2=\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$ の初項 b_1 は $\boxed{\text{イ}}$ である。① の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$b_{n+1}=b_n+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\left(n+\boxed{\text{エ}}\right)\left(n+\boxed{\text{オ}}\right)}-\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし，$\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$ とする。

したがって

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{エ}}}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{n+\boxed{\text{オ}}}\right)-\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

である。

n を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{エ}}}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{k+\boxed{\text{オ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left(\frac{n-\boxed{\text{ケ}}}{n+\boxed{\text{コ}}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{k+1}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^n$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n=\frac{n-\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\left(n+\boxed{\text{チ}}\right)}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^n$$

が得られる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3) (2) により，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ツ}}^{\,n-\boxed{\text{テ}}}\left(n^2-\boxed{\text{ト}}\right)+\frac{\left(n+\boxed{\text{ナ}}\right)\left(n+\boxed{\text{ニ}}\right)}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

で与えられる。ただし，$\boxed{\text{ナ}}<\boxed{\text{ニ}}$ とする。

このことから，すべての自然数 n について，a_n は整数となることがわかる。

(4) k を自然数とする。a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ である。また，$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

$\boxed{3}$

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$0<m\leqq n$ となる整数 m，n があり $2\vec{a}\cdot\vec{b}=m\vec{a}\cdot\vec{a}=n\vec{b}\cdot\vec{b}$ が成り立つとする．このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ)$ の値と，そのときの $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ の値をすべて求めよ．

$\boxed{4}$

半径 1 の円に外接する正 n 角形 $(n\geqq 3)$ の周の長さを $2a_n$，また, 半径 1 の円に内接する正 n 角形 $(n\geqq 3)$ の周の長さを $2b_n$ とする．

(1) a_n，b_n を n で表せ．

(2) $0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき, 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

(3) a_{12}，b_{12} の値を求めよ．