$\boxed{1}$

n を自然数とする。原点 O から出発して数直線上を n 回移動する点 A を考える。点 A は，1 回ごとに，確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ここで，$0<p<1$ である。n 回移動した後の点 A の座標を X とし，n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を Y とする。
以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　$p=\dfrac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 X のとり得る値は，小さい順に $-\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ であり，これらの値をとる確率は，それぞれ $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　n 回移動したとき，X と Y の間に $X=\boxed{\text{ク}}n+\boxed{\text{ケ}}Y$ の関係が成り立つ。
確率変数 Y の平均 (期待値) は $\boxed{\text{コ}}$，分散は $\boxed{\text{サ}}$ なので，X の平均は $\boxed{\text{シ}}$，分散は $\boxed{\text{ス}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⓑ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ np	① $np(1-p)$	② $\dfrac{p(1-p)}{n}$
③ $2np$	④ $2np(1-p)$	⑤ $p(1-p)$
⑥ $4np$	⑦ $4np(1-p)$	⑧ $16np(1-p)$
⑨ $4np-n$	ⓐ $4np(1-p)-n$	ⓑ $16np(1-p)-n$

(3)　$p=\dfrac{1}{4}$ のとき，1200 回移動した後の点 A の座標 X が 120 以上になる確率の近似値を求めよう。
(2) により，Y の平均は $\boxed{\text{セソタ}}$，標準偏差は $\boxed{\text{チツ}}$ であり，求める確率は次のようになる。

$$P(X \geqq 120)=P\left(\frac{Y-\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}} \geqq \boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{トナ}}\right)$$

いま，標準正規分布に従う確率変数を Z とすると，$n=1200$ は十分に大きいので，求める確率の近似値は正規分布表から次のように求められる。

$$P\left(Z \geqq \boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{トナ}}\right)=0.\boxed{\text{ニヌネ}}$$

(4)　p の値がわからないとする。2400 回移動した後の点 A の座標が $X=1440$ のとき，p に対する信頼度 95 % の信頼区間を求めよう。

n 回移動したときに Y がとる値を y とし，$r=\dfrac{y}{n}$ とおくと，n が十分に大きいならば，確率変数 $R=\dfrac{Y}{n}$ は近似的に平均 p，分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。

$n=2400$ は十分に大きいので，このことを利用し，分散を $\dfrac{r(1-r)}{n}$ で置き換えることにより，求める信頼区間は $0.\boxed{\text{ノハヒ}} \leqq p \leqq 0.\boxed{\text{フヘホ}}$ となる。

$\boxed{2}$

座標平面上で，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ を C_1 とし，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を C_2 とする。

(1)　実数 a に対して，2 直線 $x=a$，$x=a+1$ と C_1，C_2 で囲まれた図形 D の面積 S は

$$S=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{\boxed{ア}}x^2+\frac{1}{\boxed{イ}}\right)dx=\frac{a^2}{\boxed{ウ}}+\frac{a}{\boxed{エ}}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$$ である。

S は $a=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}$ をとる。

(2)　4 点$(a,\ 0)$，$(a+1,\ 0)$，$(a+1,\ 1)$，$(a,\ 1)$ を頂点とする正方形を R で表す。
a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，正方形 R と (1) の図形 D の共通部分の面積を T とおく。
T が最大となる a の値を求めよう。

直線 $y=1$ は，C_1 と $\left(\pm\boxed{ソ},\ 1\right)$ で，C_2 と $\left(\pm\boxed{タ},\ 1\right)$ で交わる。

したがって，正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは，$0\leqq a\leqq\boxed{チ}$ のときである。

$\boxed{ソ}\leqq a\leqq\boxed{チ}$ のとき，正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり，この範囲で a が増加するとき，T は $\boxed{ツ}$。$\boxed{ツ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ② のうちから一つ選べ。

⓪　増加する　　　① 　減少する　　　②　変化しない

したがって，T が最大になる a の値は，$0\leqq a\leqq\boxed{ソ}$ の範囲にある。

$0\leqq a\leqq\boxed{ソ}$ のとき，(1) の図形 D のうち，正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U=\frac{a^3}{\boxed{テ}}+\frac{a^2}{\boxed{ト}}$$ である。

よって，$0\leqq a\leqq\boxed{ソ}$ において

$$T=-\frac{a^3}{\boxed{ナ}}-\frac{a^2}{\boxed{ニ}}+\frac{a}{\boxed{ヌ}}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}\quad\cdots\cdots ①$$ である。

① の右辺の増減を調べることにより，T は $a=\dfrac{\boxed{ネノ}+\sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}$ で最大値をとることがわかる。

$\boxed{3}$

白球 3 個，赤球 2 個，青球 1 個合計 6 個の球の入っている袋がある．最初に A 君が，次のルール (a)，(b) に従って袋から球を 1 個または 2 個取り出す．次に B 君が同じルールに従って，袋に残った球を 1 個または 2 個取り出す．ただし，いったん取り出した球は元の袋には戻さないものとする．

(a)　取り出した 1 個目が赤球ならば，2 個目を取り出すことはできない．

(b)　取り出した 1 個目が赤球以外ならば，更に 1 個だけ取り出す．

白球は 1 点，赤球は 2 点，青球は 3 点とし，取り出した球の合計点を各自の得点とする．

(1)　A 君と B 君の得点が同じになる確率 p_1 を求めよ．

(2)　A 君の得点が B 君の得点より大きくなる確率 p_2 を求めよ．

$\boxed{4}$

(1)　a，b，c を整数とする．x に関する 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が有理数の解をもつならば，その解は整数であることを示せ．ただし，正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 m，n を用いて $\dfrac{n}{m}$ と表せることを用いよ．

(2)　方程式 $x^3+2x^2+2=0$ は，有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ．