
第1章
～ 式と証明 ～

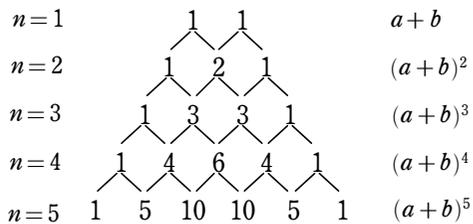
第1講 二項定理

1 二項定理

① パスカルの三角形

1 数の配列は左右対称で、各行の両端の数は1である。

2 2行目以降の両端以外の数は、左上と右上の数の和に等しい。



② 二項定理

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_r a^{n-r} b^r + \cdots + {}_n C_n b^n$$

③ $(a+b+c)^n$ の展開式 研究

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r \quad \text{ただし} \quad p+q+r=n$$

第1講 例題

1 ★☆☆

二項定理を用いて、次の式の展開式を求めよ。

(1) $(x-3)^4$

(2) $(2x+y)^6$

2 ★★★

次の式の展開式における [] 内の項の係数を求めよ。

(1) $(2x+3y)^5$ [x^3y^2]

(2) $(5x^2-2)^6$ [x^6]

(3) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^9$ [定数項]

3 ★★★

次の等式を証明せよ。

$${}_nC_0 + 2{}_nC_1 + 2^2{}_nC_2 + \cdots + 2^n{}_nC_n = 3^n$$

4 ★★★

次の式の展開式における、[]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(x+y+z)^5$ [xy^2z^2]

(2) $(a+b-2c)^7$ [$a^2b^3c^2$]

5 ★★★

$(1+x+x^2)^7$ の展開式における、 x^3 の項の係数を求めよ。

第1講 例題演習

1

次の式の展開式を求めよ。

(1) $(a+b)^6$ (2) $(x-1)^7$ (3) $(2x+y)^5$ (4) $(3x-2y)^4$

2

次の式の展開式における、[]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(x+2)^7$ $[x^4]$ (2) $(x^2-1)^7$ $[x^4, x^3]$

(3) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ $[x^{11}]$ (4) $\left(2x^4 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ [定数項]

3

次の等式を証明せよ。

(1) ${}_nC_0 - 3{}_nC_1 + 9{}_nC_2 - \dots + (-3)^n {}_nC_n = (-2)^n$

(2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \dots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

(3) ${}_nC_0 - \frac{{}_nC_1}{2} + \frac{{}_nC_2}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{{}_nC_n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4

次の式の展開式における、[]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(x+2y+3z)^4$ $[x^3z]$ (2) $\left(2x - \frac{1}{2}y + z\right)^4$ $[xy^2z]$

5

$(x^2 - 3x + 1)^{10}$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ。

第1講 レベルA

①(1)[千葉工業大] (2)[小樽商科大]

- (1) $(2x+1)^n$ を展開した式における x^2 の係数が 420 であるとき、 n の値を求めよ。
(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ の展開式において、定数項を求めよ。

②[中京大]

$(x+ay+bz)^4$ の展開式で、 x^2yz の係数が 1056、 x^3z の係数が 44 のとき、定数 a 、 b の値を求めよ。また、このときの x^2z^2 の係数を求めよ。

③

n は 2 以上の整数とする。二項定理を利用して、次の不等式を証明せよ。

- (1) $a > 0$ のとき $(1+a)^n > 1+na$ (2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$

第 1 講 レベル B

1 (1)[愛知大] (2)[愛媛大]

- (1) 11^{13} を 1000 で割るとき、余りを求めよ。
(2) 33^{20} を 90 で割ったときの余りを求めよ。

2

$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + \cdots + {}_n C_r x^r + \cdots + {}_n C_n x^n$ を利用して、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) ${}_n C_0 - \frac{{}_n C_1}{2} + \frac{{}_n C_2}{2^2} - \cdots + (-1)^n \frac{{}_n C_n}{2^n} = \frac{1}{2^n}$

(2) n が奇数のとき ${}_n C_0 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_{n-1} = {}_n C_1 + {}_n C_3 + \cdots + {}_n C_n = 2^{n-1}$

(3) n が偶数のとき ${}_n C_0 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n = {}_n C_1 + {}_n C_3 + \cdots + {}_n C_{n-1} = 2^{n-1}$

第2講 整式の割り算・分数式・恒等式

2 整式の割り算

1 整式の割り算

- 1 整式 A を整式 B で割った商を Q , 余りを R とすると

$$A = BQ + R \quad (\text{ただし, } R \text{ は } 0 \text{ か, } B \text{ より次数の低い整式})$$

- 2 整式 A を整式 B で割った商と余りを求める計算では, A, B を降べきの順に整理してから行う。

3 分数式とその計算

1 分数式

2つの整式 A, B によって $\frac{A}{B}$ の形で表され, B に文字を含む式を, 分数式 という。

2 分数式の計算

$$1 \quad \frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div D}{B \div D} \quad (C \neq 0, D \neq 0)$$

$$2 \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

$$3 \quad \frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

3 部分分数に分解 $a \neq b$ のとき

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right)$$

4 恒等式

1 恒等式の性質

恒等式の両辺が x についての整式のとき, 各辺で同類項を整理すると, 次のことが成り立つ。

両辺の同じ次数の項の係数は, それぞれ等しい。

たとえば, x についての2次の整式について, 次のことが成り立つ。

- 1 $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式である

$$\iff a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

- 2 $ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式である

$$\iff a = b = c = 0$$

2 恒等式の係数決定

- ① 係数比較法 両辺の同じ次数の項の係数を比較する。
② 数値代入法 適当な値を代入して, 連立方程式を作り, それを解く。

(逆の確認が必要)

第2講 例題

1 ★☆☆

次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A = x^2 + 5x + 8$, $B = x + 3$ (2) $A = 3x^3 + 8x^2 + 7$, $B = x^2 - 1 + 3x$

2 ★★★

次の条件を満たす整式 A , B を求めよ。

- (1) A を $x^2 - 2x - 1$ で割ると、商が $2x - 3$, 余りが $-2x$ となる。
(2) $6x^3 - x^2 + 3x + 5$ を B で割ると、商が $3x + 1$, 余りが $-2x + 3$ となる。

3 ★★★

次の式を計算せよ。

(1) $\frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3}$

(2) $\frac{5x}{x^2-4} + \frac{10}{4-x^2}$

(3) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$

(4) $\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-1}$

4 ★☆☆

次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{a+2}{a - \frac{2}{a+1}}$

(2) $\frac{1}{x + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}$

5 ★☆☆

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a , b , c の値を定めよ。

- (1) $ax^2 + bx = (x-2)(x+2) + c(x+2)^2$
(2) $x^2 = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$
(3) $4x^2 - 13x + 13 = a(x^2 - 1) + b(x+1)(x-2) + c(x-2)(x-1)$

6 ★★★

等式 $\frac{5x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1}$ が x についての恒等式となるように、定数 a , b の値を定めよ。

第2講 例題

7★★☆

等式 $(1-2k)x+(2-k)y-4-k=0$ が、 k のどのような値に対しても成り立つように、 x 、 y の値を定めよ。

8★★☆

x についての整式 $2x^3+ax+10$ を x^2-3x+b で割ると余りが $3x-2$ となるように、定数 a 、 b の値を定めよ。また、そのときの商を求めよ。

第2講 例題演習

1

次の整式 A , B について, A を B で割った商と余りを求めよ。

- (1) $A=2x^3+7x^2+5x+7$, $B=x+3$
- (2) $A=x^3-3x+2$, $B=x^2+4x-1$
- (3) $A=2x^4+x+5x^2+2-7x^3$, $B=2x^2-3x+1$
- (4) $A=4x^4-x^3+4x+8$, $B=2x^2-x+2$

2

次の条件を満たす整式 A , B を求めよ。

- (1) A を x^2+4x-3 で割ると, 商が $3x+2$, 余りが $4x+5$ となる。
- (2) $6x^4-7x^3+4x^2-3x+5$ を B で割ると, 商が $2x^2-3x+1$, 余りが $2x+3$ となる。

3

次の計算をせよ。

- (1) $\frac{x}{x-4} + \frac{x-8}{x-4}$
- (2) $\frac{x}{x-a} + \frac{a}{a-x}$
- (3) $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+2}$
- (4) $\frac{1}{(x-1)(x-5)} - \frac{1}{(x-5)(x+3)}$
- (5) $\frac{x+8}{x^2+x-2} + \frac{x-4}{x^2-x}$

4

次の式を簡単にせよ。

- (1) $\frac{x - \frac{6}{x-1}}{1 - \frac{2}{x-1}}$
- (2) $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}}$

5

次の等式が x についての恒等式となるように, 定数 a , b , c , d の値を定めよ。

- (1) $x = a(x-2) + b(x-1)$
- (2) $x^2 - x - 3 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
- (3) $12x^2 + 43x + c = (4x+5)(ax+b)$
- (4) $ax(x+1) + bx(x-1) + c(x+1)(x-1) = 2x^2 + 3x - 1$
- (5) $x^3 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$

第2講 例題演習

6

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

$$(1) \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \qquad (2) \frac{x-5}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

7

等式 $(k+1)x - (2k+3)y - 3k - 5 = 0$ が、 k のどのような値に対しても成り立つように、 x, y の値を定めよ。

8

- (1) x についての整式 $2x^3 + ax^2 + bx + 2$ を $x^2 - x + 1$ で割ると、余りが $x + 3$ となるように、定数 a, b の値を定めよ。また、そのときの商を求めよ。
- (2) x についての整式 $x^3 + ax^2 - 13x + b$ が $x^2 - 2x + 3$ で割り切れるように、定数 a, b の値を定めよ。また、そのときの商を求めよ。

第2講 レベルA

1

$2x^2+5xy+2y^2-2x+6y-4$ を $x+y-3$ で割る。

- (1) x の整式とみて、割り算をしたときの商と余りを求めよ。
- (2) y の整式とみて、割り算をしたときの商と余りを求めよ。

2 [武蔵大]

次の式を簡単にせよ。

$$(1) \frac{x^4-7x^2+12}{x^2-x-6} \times \frac{2x^2+7x+3}{2x+1}$$
$$\frac{}{x^2+x-6}$$

$$(2) \frac{3x-5}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}} - \frac{x(2x-3)}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{x-1}}}$$

3

次の等式が x, y についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

$$2x^2-xy-3y^2+5x-5y+a=(x+y+b)(2x-3y+c)$$

第2講 レベルB

1 [武庫川女子大]

$2x-4y+5z=3$, $3x+y+4z=1$ が成り立つとき, $px^2+qy^2+rz^2=2$ が x, y, z についての恒等式となるように, 定数 p, q, r の値を定めよ。

2 (1) [摂南大] (2) [東北学院大]

(1) a, b を整数とする. $x^4+ax^3+11x^2+bx+1$ が, ある2次式の平方になるとき, a, b の値を求めよ。

(2) 整式 $x^4-x^3-ax^2+bx-6$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき, a, b の値を求めよ。

3 [東京都立大]

多項式 $f(x)$ について, 恒等式 $f(x^2) = x^3f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ が成り立つとする。

(1) $f(0), f(1), f(2)$ の値を求めよ。 (2) $f(x)$ の次数を求めよ。

(3) $f(x)$ を決定せよ。

第3講 等式の証明

5 等式の証明

① 恒等式の証明

恒等式 $A = B$ の証明方法

- 1 A か B の一方を変形して、他方を導く。
- 2 A と B の両方を変形して、同じ式を導く。
- 3 $A - B$ を変形して、0 になることを示す。

② 条件付きの等式の証明

- ① 条件式を用いて文字を消去し、①で示した恒等式の証明方法で行う。
- ② 条件式が $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($\iff a:b=c:d, a:c=b:d$) のような比の値を用いた式 (比例式) のときは、(比の値) = k とおく。

第3講 例題

1 ★☆☆

等式 $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$ を証明せよ。

2 ★★☆☆

次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $a+b=1$ のとき $a^2 + b^2 + 1 = 2(a+b-ab)$

(2) $a+b+c=0$ のとき $bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) = -3abc$

(3) $a+b+c=0$ のとき $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = 0$

3 ★★☆☆

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $(a+b)(c-d) = (a-b)(c+d)$

(2) $\frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

4 ★★★

$2(ab+bc+ca) = abc$, $a+b+c=2$ のとき, a, b, c のうち少なくとも1つは2であることを示せ。

第3講 例題演習

1

次の等式を証明せよ。

(1) $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

(2) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

2

$a + b + c = 0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = 0$

(2) $(b + c)^2 + (c + a)^2 + (a + b)^2 = -2(bc + ca + ab)$

3

次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき [1] $\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$ [2] $\frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{cd}{c^2 + d^2}$

(2) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ のとき [1] $\frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{x}{a}$ [2] $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{xy + yz + zx}{ab + bc + ca}$

4

$x + y + z = a$, $a(yz + zx + xy) = xyz$ が成り立つとき、 x , y , z のうち、少なくとも1つは a であることを証明せよ。

第3講 レベルA

1 [倉敷芸術科学大]

$a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} = 3$$

2

$\frac{x+y}{6} = \frac{y+z}{7} = \frac{z+x}{8} \neq 0$ のとき、 $\frac{x^2-y^2}{x^2+xz+yz-y^2}$ の値を求めよ。

3

$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$ のとき、この式の値を求めよ。

第3講 レベルB

1

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ のとき, x, y, z のうち, どれか2つの和は0であることを証明せよ。

2 [大阪市立大]

実数 α, β, γ が $\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$ を満たしているとき, α, β, γ はすべて1であることを示せ。

3

$ax^2 + bx + c = 0$ が互いに異なる3つの x の値 x_1, x_2, x_3 に対して成り立つとき, $a = b = c = 0$ であることを証明せよ。

第4講 不等式の証明

6 不等式の証明

注 以下では、とくに断らない限り、文字は実数を表すものとする。

1 実数の大小関係

0 2つの実数 a, b については、 $a > b$, $a = b$, $a < b$ のうち、どれか1つの関係だけが成り立つ。

$$1 \quad a > b, b > c \implies a > c$$

$$2 \quad a > b \implies a + c > b + c, a - c > b - c$$

$$3 \quad a > b, c > 0 \implies ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$4 \quad a > b, c < 0 \implies ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$5 \quad a > b \iff a - b > 0$$

$$6 \quad a < b \iff a - b < 0$$

2 不等式の証明

不等式を証明するには、上記の大小関係、および以下の性質を利用する。

実数の平方 $a^2 \geq 0$ (等号は $a = 0$ のとき成り立つ)

$$a^2 + b^2 \geq 0 \quad (\text{等号は } a = b = 0 \text{ のとき成り立つ})$$

平方の大小 $a > 0, b > 0$ のとき $a^2 > b^2 \iff a > b, a^2 \geq b^2 \iff a \geq b$

絶対値 $|a| \geq 0, |a| \geq a, |a| \geq -a, |a|^2 = a^2, |ab| = |a||b|$

相加平均と相乗平均の大小関係

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{等号は } a = b \text{ のとき成り立つ})$$

第4講 例題

1 ★☆☆

次のことを証明せよ。

(1) $x > 3, y > 4$ のとき, $xy + 12 > 4x + 3y$

(2) $a > b > 0$ のとき, $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$

2 ★★★

次の不等式を証明せよ。また、(2) は等号が成り立つ場合を調べよ。

(1) $a^2 + 11 > 6a$

(2) $x^2 + 2y^2 \geq 2xy - 4y - 4$

(3) $x^2 - xy + y^2 + x - 2y + 2 > 0$

3 ★★★

次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a \geq 0, b \geq 0$ のとき $5\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \geq \sqrt{25a + 9b}$

(2) $a \geq 0, b \geq 0$ のとき $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$

(3) $|a+b| \leq |a| + |b|$

4 ★★★

$a > 0, b > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $9a + \frac{1}{4a} \geq 3$

(2) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{16}{a}\right) \geq 25$

5 ★★★

$a > 0$ のとき、 $a - 2 + \frac{2}{a+1}$ の最小値を求めよ。

第4講 例題演習

1

次のことを証明せよ。

(1) $x > -3, y > 2$ のとき $xy - 6 > 2x - 3y$

(2) $2a > b > 0$ のとき $\frac{b}{a} < \frac{b+2}{a+1}$

(3) $x \geq y \geq z$ のとき $xy + yz \geq zx + y^2$

2

次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $x^2 - x + 4 \geq 3x$

(2) $x^2 + 6xy + 11y^2 \geq 0$

(3) $2(x^2 + 3y^2) \geq 5xy$

(4) $x^2 + 2xy + 5y^2 - 4x - 8y + 5 \geq 0$

3

次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a \geq 0, b \geq 0$ のとき $7\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \geq \sqrt{49a + 4b}$

(2) $a \geq b \geq 0$ のとき $\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

(3) $\sqrt{2(a^2 + b^2)} \geq |a| + |b|$

4

$a > 0, b > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a + \frac{9}{a} \geq 6$

(2) $(a+2b)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 8$

(3) $\frac{2}{a+b} + 2a + 2b \geq 4$

5

(1) $x > 0$ のとき、 $x + \frac{9}{x+2}$ の最小値を求めよ。

(2) $a > 0, b > 0$ のとき、 $(2a+3b)\left(\frac{8}{a} + \frac{3}{b}\right)$ の最小値を求めよ。

第4講 レベルB

1 [岩手医科大]

正の実数 x, y, z に対して、 $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ かつ $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ が成り立つことを示せ。

2 [福岡教育大]

a, b, c, x, y, z を実数とする。

(1) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ が成り立つことを示せ。

(2) $x + y + z = 1$ のとき、 $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値を求めよ。

3 [甲南大]

$a > \sqrt{2}$ を満たすとき、次の3つの数を小さい方から順に並べよ。

$$\frac{a+2}{a+1}, \frac{a}{2} + \frac{1}{a}, \sqrt{2}$$

4 [摂南大]

a, b, c を正の数とするとき、 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ のとりうる最小の値を求めよ。

章末問題A

1 [関西学院大]

$(x^3+1)^4$ の展開式における x^9 の係数は ア で x^6 の係数は イ であり,

$(x^3+x-1)^3$ の展開式における x^5 の係数は ウ で x^2 の係数は エ である。

また, $(x^3+1)^4(x^3+x-1)^3$ の展開式における x^{11} の係数は オ である。

2 [東北学院大]

n を自然数とするととき, 次の問いに答えよ。

(1) $\sum_{k=0}^n {}_n\text{C}_k = 2^n$ を示せ。

(2) $1 \leq k \leq n$ のとき $\frac{{}_n\text{C}_k}{{}_{n-1}\text{C}_{k-1}}$ を簡単にせよ。

(3) $\sum_{k=1}^n k \cdot {}_n\text{C}_k = n \cdot 2^{n-1}$ を示せ。

3 [東北学院大]

(1) $(3x-1)^4$ を x^3 で割ったときの余りを求めよ。

(2) $(x+1)^{40}$ を x^3 で割ったときの余りを求めよ。

(3) x^{40} を $(x-1)^3$ で割ったときの余りを求めよ。

4 [神戸国際大]

(1) $15^{10} + 2 \cdot 15^2 + 1$ を $15^4 - 15^2 + 1$ で割った余りを求めよ。

(2) x の整式 $x^3 + 4x^2 + 2x + k$ が $x+1$ で割り切れるとき, その商は $x^2 + \text{ア}$ $x - 1$ であり, $k = \text{イ}$ である。

5 [東北学院大]

方程式 $x^4 - 31x^2 + 20x + 5 = 0$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $x^4 - 31x^2 + 20x + 5 = (x^2 + a)^2 - (bx - 2)^2$ が x についての恒等式となるように, 定数 a, b の値を定めよ。

(2) (1) を用いて, $x^4 - 31x^2 + 20x + 5$ を因数分解せよ。

(3) 方程式 $x^4 - 31x^2 + 20x + 5 = 0$ を解け。

章末問題A

6 [愛媛大]

次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

(2) a, b, c が正の数 のとき $\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3}$

(3) $a > 0, b > 0$ のとき $\left| \frac{a}{b}\sqrt{a} - \frac{b}{a}\sqrt{b} \right| \geq |\sqrt{a} - \sqrt{b}|$

7

(1) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ を示せ。

(2) $3x + 2y = 1$ のとき、 $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。

(3) $x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $2x + 3y$ の最大値を求めよ。

8

$x > 0$ のとき、 $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ の最大値を求めよ。

章末問題B

1 [弘前大]

- (1) $(x+5)^{80}$ を展開したときの、 x^k ($1 \leq k \leq 80$) の係数を a_k とするとき、 $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ を、 k を用いて表せ。
- (2) $(x+5)^{80}$ を展開したとき、 x の何乗の係数が最大になるか答えよ。

2

- (1) $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ の展開式を利用して、等式
$${}_nC_0^2 + {}_nC_1^2 + \cdots + {}_nC_n^2 = {}_{2n}C_n$$
が成り立つことを証明せよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、等式 ${}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 + \cdots + n{}_nC_n = n \cdot 2^{n-1}$ が成り立つことを証明せよ。

3 [佐賀大]

- (1) 整数 n, r が $n \geq 2, 1 \leq r \leq n$ を満たすとする。このとき、 $r \cdot {}_nC_r = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$ が成り立つことを示せ。
- (2) p を素数とし、整数 r が $1 \leq r \leq p-1$ を満たすとする。このとき、 ${}_pC_r$ が p で割り切れることを示せ。
- (3) p を 3 以上の素数とする。 2^p を p で割った余りが 2 であることを示せ。
- (4) p を 5 以上の素数とする。 3^p を p で割った余りを求めよ。

4 [神戸大]

a は正の無理数で、 $X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$, $Y = a^2 - 2a$ を考えると、 X と Y はともに有理数である。

- (1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ。
- (2) X と Y の値を求めよ。
- (3) a の値を求めよ。ただし、素数の平方根は無理数であることを用いてよい。

5 [一橋大]

$P(0) = 1, P(x+1) - P(x) = 2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。

章末問題B

6 [岐阜聖徳学園大]

a, b, x, y を実数とし, $0 \leq x \leq y$ とする。次の不等式を証明せよ。

$$(1) \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$$

$$(2) |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$(3) \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

7 [学習院大]

a, b, c を実数とする。

(1) 不等式 $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ を証明せよ。また、等号が成り立つとき $a = b = c$ であることを証明せよ。

(2) 不等式 $27(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a + b + c)^4$ を証明せよ。

8 [大阪大]

a, b, c を 0 以上の実数とする。

(1) $2^a + 2^b \leq 1 + 2^{a+b}$ を示せ。

(2) a, b, c が $a + b + c = 3$ を満たしながら動くとき $2^a + 2^b + 2^c$ の最大値を求めよ。
また、最大値を与える a, b, c の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

9 [愛知教育大]

中心 O の円周上に異なる 2 点 A, B をとり、弧 \widehat{AB} を 3 等分する点を、 A に近い方から C, D とする。また、弦 AB と OC, OD の交点をそれぞれ P, Q とする。このとき、 $AP > PQ$ であることを示せ。ただし、弧 \widehat{AB} に対する中心角 $\angle AOB < 180^\circ$ とする。

10 [自治医科大]

x が 0 以上の実数であるとき、関数 $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 34}{x^2 - x + 3}$ の最小値を求めよ。

11 [神奈川大]

$x > 0, y > 0, z > 0$ とする。 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{4}$ のとき、 $x + 2y + 3z$ の最小値を求めよ。

章末問題C

1 [大阪大]

p は素数, r は正の整数とする。

(1) x_1, x_2, \dots, x_r についての式 $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p$ を展開したときの単項式

$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_r^{p_r}$ の係数を求めよ。ここで, p_1, p_2, \dots, p_r は 0 または正の整数で $p_1 + p_2 + \dots + p_r = p$ を満たすとする。

(2) x_1, x_2, \dots, x_r が正の整数のとき,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^p - (x_1^p + x_2^p + \dots + x_r^p)$$

は p で割り切れることを示せ。

(3) r は p で割り切れないとする。このとき, $r^{p-1} - 1$ は p で割り切れることを示せ。

2 [徳島大]

次の問いに答えよ。ただし, ${}_n C_r$ は二項係数を表す。

(1) $(1 - x^2)^6$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。

(2) $(1 + x)^6(1 - y)^6$ の展開式における xy^3 の係数および x^2y^2 の係数を求めよ。

(3) ${}_6 C_0 \times {}_6 C_4 - {}_6 C_1 \times {}_6 C_3 + {}_6 C_2 \times {}_6 C_2 - {}_6 C_3 \times {}_6 C_1 + {}_6 C_4 \times {}_6 C_0$ の値を求めよ。

(4) n を $n \geq 4$ を満たす整数とし,

$$f(n) = {}_n C_0 \times {}_n C_4 - {}_n C_1 \times {}_n C_3 + {}_n C_2 \times {}_n C_2 - {}_n C_3 \times {}_n C_1 + {}_n C_4 \times {}_n C_0$$

とおく。 $f(n)$ は n の 2 次式であることを示せ。

3 [東北大]

多項式 $f(x)$ について, 次の条件 (A), (B), (C) を考える。

$$(A) \quad x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad (B) \quad f(1-x) = f(x) \quad (C) \quad f(1) = 1$$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 条件 (A) を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件 (A), (B), (C) をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

4 [早稲田大]

(1) $a + b + c \neq 0, abc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c が, 等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ を

満たしている。このとき, 任意の奇数 n に対して, 等式

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{(a+b+c)^n}$$
 が成り立つことを示せ。

(2) $x + y + z = 3, (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 = 0$ のとき, x, y, z の少なくとも 1 つは 1 に等しいことを証明せよ。

章末問題C

5 [大阪市立大]

n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1) $\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)} < n+2$

(2) $n+3 < \sqrt[3]{(n+1)(n+4)(n+6)}$

(3) $n+3 < \sqrt[3]{(n+2)(n+3)(n+5)}$

(4) $n+3 < \sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)} < n + \frac{7}{2}$

6 [上智大]

(1) k を実数の定数とする。実数 x, y が $x+2y=k$ を満たすとき、 x^2+2y^2 の最小値を求めよ。

(2) 2変数関数 $f(x, y) = \frac{x+2y+3}{x^2+2y^2+3}$ の最大値を求めよ。

7 [神戸大]

(1) 正の実数 x, y に対して $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$ が成り立つことを示し、等号が成立するための条件を求めよ。

(2) n を自然数とする。 n 個の正の実数 a_1, \dots, a_n に対して

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

が成り立つことを示し、等号が成立するための条件を求めよ。

8 [一橋大]

(1) 正の実数 x, y, z が $x^2 = y^2 + z$ を満たすとき、 $y < x < y + \frac{z}{2y}$ が成り立つことを示せ。

(2) $x^2 = y^2 + 8\sqrt{2y-1}$ を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

9 [大阪大]

実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ。

